Hemos asumido la posibilidad de intercambiar el orden de los operadores $E(.)$ y t_r. $t_r(MN) = t_r(NM)$ para matrices compatibles.

$$E(f) = E(Av) = AE(v) = 0$$

$$E(ff^t) = E(Avv^tA^t) = AE(vv^t)A^t = {\sigma_0}^2 AW^{-1}A^t$$

Por lo tanto ${\sigma_0}^2$ puede ser escrito de la siguiente manera:

$$E({\sigma_0}^2) = \frac{1}{r} t_r[(AW^{-1}A^t)^{-1}{\sigma_0}^2 AW^{-1}A^t] = {\sigma_0}^2 \frac{1}{r}\ t_v \overbrace{\underbrace{(I)}_{rxr}}^{=L} = {\sigma_0}^2$$

Entonces es Unbiased.

7) NUMERO DE ESCUACIONES CONDICIÓN EN REDES GEODESICAS

En general las observaciones geodésicas como diferencias de elevación, ángulos y distancia, no describen la posición absoluta de los puntos, sino más bien las posiciones relativas dentro de la red.

MODELO MATEMÁTICO

- Redundancia= $n - n_0$ grados de libertad
- n_0 minimo elementos deterinan únicamente el modelo

el DATUM PROBLEM aparece cuando $v + B\Delta = f\ \ (r)B\ < n\ \rightarrow B^TB = 0$ no es posible.

B es nuestra Matriz de Diseño

Ahora $\boldsymbol{n}$ son las observaciones realizadas

$$\boldsymbol{n_0} \equiv \boldsymbol{m_{FAN}} \rightarrow \begin{cases} r = n - n_0 \Longrightarrow n^{\underline{o}}\ Ec.Condicion \\ r = n - m \Longrightarrow es\ lo\ mismo \end{cases}$$

m_0 es mínimo numero data para definir en posición absoluta el ajuste respecto de un sistema de referencia ***(NECESSARY INITIAL DATA)***

En nivelación $m_0 = 1$

En red 2D $m_0 = 4 \begin{cases} 1\ vertice\ (x, y)\ \rightarrow 2 \\ 1\ azimuth\ \rightarrow 1 \\ 1\ base\ medida\ \rightarrow 1 \end{cases}$

En red 3D $m_0 = 7 \begin{cases} 1\ vertice\ (x, y, z) \rightarrow 3 \\ 3\ azimuth\ \rightarrow 3 \\ 1\ escala\ \rightarrow 1 \end{cases}$

$$\boldsymbol{m_0 \neq n_0 \neq n \neq r}$$

No solo importa el nº, si en RED 2D mido 2 bases $m_0 = 4$ pero no sirve pues falta la orientación, en este caso $d = \underbrace{4}_{m} - \underbrace{3}_{m_{INI}}$

$$d = m_0 - m_{INI} \Rightarrow RANK\ DEFECT$$

Con $d \neq 0$, se puede ajustar por CONDITION ADJUSTMENT ($\Delta v = f$). (no esta muy vinculado con Initial Data)

En cambio con ADJ BY ELEMENTS no se puede salvo con G^-(Absolutamente relacionado con m_{INI})

- (e) EXTRA CONSTRAINS

En estos casos podemos dar como fijo un nivel de un vertice de nivelación como libre de error, o una dirección entre vértices desconocidos

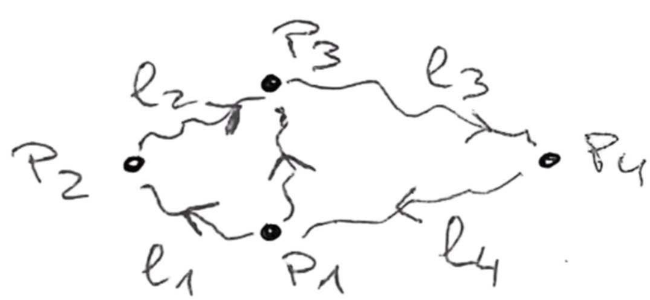
n_0 Observaciones necesarias para definir el modelo ($n_0 \equiv m$)

$$n_0 = \left[\left(n_p . n_d \right) - e \right]$$

$$\begin{cases} n_p = numero\ de\ vertices\ desconocidos\ red\ luego\ de\ \quad fixed \\ e = extra\ c. \\ n_d = dimension\ red \end{cases}$$

$$n_d \begin{cases} Nivelacion = 1 \\ RED\ 2D = 2 \\ RED\ 3D = 3 \end{cases}$$

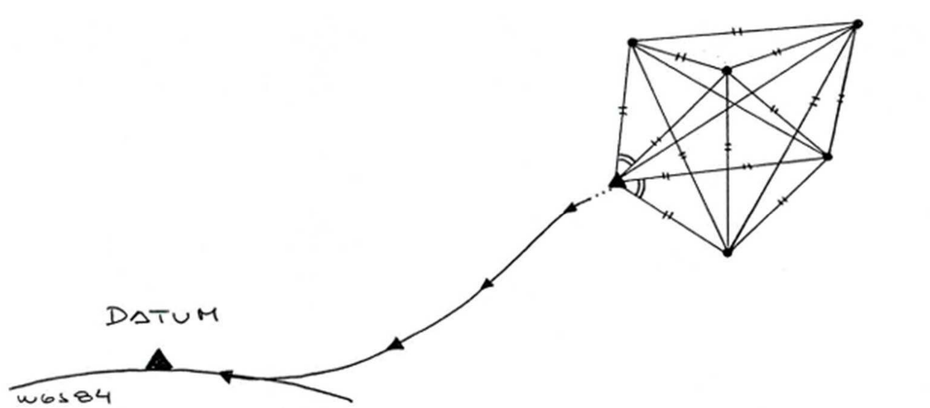
Ejemplo



$$n = l_1 \ldots . l_5\ \ 5\ observaciones, 4\ niveles\ desconocidos, SIN\ DATUM$$

- $m_0 = 1$
- $d = 1$
- $n_p = 3$
- $n_d = 1$
- $n_p n_d = 3$
- $e = 0$
- $n_0 = 3$
- $n = 5$
- $r = 2$

Aca no hay Fixed Point y elegimos un vertice como fijo, ó sea n_p pasa de 4 a 3.



- Red de nivelación: 1 punto fijo $\longrightarrow n_0 = 1$
- Red de triangulación 2D ($\hat{\alpha}$):
$$\begin{cases} 1\,punto\ fijo + 1\,azimuth + 1\,base(escala) \longrightarrow n_0 = 4 \\ 2\,puntos\ fijos \longrightarrow n_0 = 4 \end{cases}$$
- Red combinada 2D ($\hat{\alpha} + \bar{d}$): 1 punto fijo + 1 azimut $\longrightarrow n_0 = 3$

- **Datum Defecto ("d") (RANGO)**

En redes geodésicas, en algunas ocasiones no solamente resulta imprescindible contar con al menos n_0 ecuaciones de condición, sino también, el tipo de observación.

En el caso de una red de triangulación: $n_0 = 4 \begin{cases} 1\,punto\ fijo \\ 2\,bases \end{cases} \Longrightarrow ????!$

El conjunto inicial de datos es insuficiente, pues falta fijar la orientación.

"UNA RED GEODESICA CON UN CONJUNTO DE DATOS INCOMPLETO TIENE ASOCIADO UN DD(d) QUE RESULTA NECESARIO RESOLVERLO"

$\boldsymbol{d = |m - n_0|}$ (RANK DEFECT) observaciones existentes validas $m \neq n$

En el caso anterior d=1

Prof. Adj. Ing. Fabián Barbato (fabian.barbato@fing.edu.uy)

- **Extra constrains ("e")**

En ocasiones existen relaciones fijas entre parámetros incognitos, que deben ser consideradas como libres de error. Por ejemplo, una línea base entre 2 puntos a determinar en el cálculo de la red.

- **Observaciones necesarias (m)**

(Recordar que $n_0 \neq m \; y \; n \neq m$)

Las observaciones necesarias parten del supuesto que existen al menos n_0 observaciones.

Si determinamos un **RD** ("d"), una de las primeras cosas que podemos hacer es fijar artificialmente "d" cantidades de la red pudiendo calcular m.

$$\Longrightarrow m = n_p n_d - e$$

Siendo:

- n_p el numero de puntos a calcular, luego de la fijación artificial
- n_d la dimensión de la red
- e el numero de extra-constraint entre puntos a calcular

$$n_d = \begin{cases} Redes\ de\ Nivelacion \\ 2D\ networks \\ 3D\ networks\ (GPS) \end{cases}$$

8) DATUM DEFECT PROBLEM

En general, es deseable que el número de parámetros incognitos (Ʊ) sea por lo menos igual al mínimo numero de observaciones necesarias n_0.

Estos parámetros pueden ser observaciones independientes ($\hat{\alpha}$ y $\bar{d}$) u otras cantidades no-directamente observadas, como coordenadas.

En los ajustes de redes geográficas, las coordenadas de los puntos deben ser asumidas como (Ʊ) incognitas.

En una red geodésica con n_0 observaciones necesarias, si sleleccionamos $Ʊ \geq n_0$, estos parámetros necesariamente no resultaran independientes, y consecuentemente, deberan existir relaciones funcionales entre ellos.

Si esto ocurriera, el método general y sus fórmulas no resultan aplicables, por lo que se diseña un nuevo método

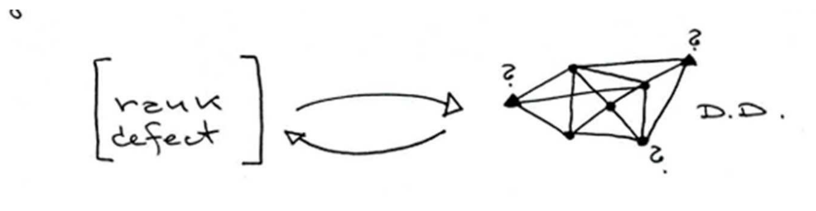
a) Ajuste por elementos+ restricciones (adjustment by elements with constrains)

Datum Defect (DD), es conocido como uno de los mayores problemas de las redes geodésicas, y consiste en, por ejemplo, no disponer de suficientes datos iniciales.

Matemáticamente el D.D. se expresa como una matriz de ecuaciones normales singulares.

Prof. Adj. Ing. Fabián Barbato (fabian.barbato@fing.edu.uy)

El número del "rank defect" de la matriz es igual al número de D.D de la red.



En este caso el ajuste por mínimos cuadrados (MMC) es todavía posible aplicarlo con la ayuda de matrices generalizadas inversas (GI^{-1}). Resulta claro que la resolución de las coordenadas absolutas no puede ser estimada.

Desde el punto de vista geodésico, cada selección de una matriz (GI^{-}) de la matriz de ecuaciones normales, implícitamente asumirá un datum defect especifico.

Recordamos que el método MMC+C ($Av = f$), solo ajusta las relaciones entre las observaciones independientes del datum de la red.

b) Ajuste por elementos con constrains.

En algunas redes geodésicas, 1 o más magnitudes entre puntos a calcular son fijos(conocidos), o se imponen.

En estos casos ("m") será casi siempre menor a la multiplicación del número de puntos desconocidos por la dimensión de la red (1, 2 o 3).

$$\Longrightarrow \boldsymbol{m = n_p n_d - e}$$

Resolvemos ahora esta incompatibilidad $\underbrace{v}_{nx1} + \underbrace{B}_{nxm}\underbrace{\Delta}_{mx1} = \underbrace{f}_{nx1}$ y los (m) parámetros en el vector Δ, satifacen la siguiente matriz de ecuaciones:

$$\underbrace{\left\{\underbrace{B_x}_{nxm}\underbrace{\Delta}_{mx1} + \underbrace{h}_{vx1} = \underbrace{\emptyset}_{vx1}\right\}}_{\text{"}Constraints\ of\ unknown\ parameters\text{"}}$$

Siendo B_x y h matrices dadas.

Asumimos las propiedades de siempre:

- $E(v) = 0$
- $E(vv^t) = {\sigma_0}^2 W^{-1}$

Las tareas involucradas en el ajuste son:

1. $v^t w v = 0 \longrightarrow$ minimo
2. $\begin{cases} \hat{v} + B\widehat{\Delta} = \mathrm{f} \\ Bx + h = 0 \end{cases}$ deben ser ambas satisfactorias
   $(Bx\Delta + h = 0)$

Para encontrar la solución, formamos la función de Lagrange R(Δ)

$$R\underbrace{[\Delta]}_{m\,x\,1} = v^t w v + 2\underbrace{\lambda^t}_{v\,x\,1}(Bx\Delta + \mathrm{h})$$

$$\frac{dR}{d\Delta} = 2\hat{v}^t w(-B) + 2\lambda^t B_x = 0$$

$$\longrightarrow\ B^t w\hat{v} - {B_x}^t\lambda = 0\ (*)$$

Como $\hat{v}$ también satisface $v + B\Delta = \mathrm{f}$, inserto la anterior ecuación en (*) obteniendo:

$$B^t wB\widehat{\Delta} + {B_x}^t\lambda = B^t wf$$

$$(**)\widehat{\Delta} = N^{-1}B^t Wf - N^{-1}{B_x}^t\lambda$$

→*siendo* $N = B^t wB$

Insertando esta ecuación en la constraint $B_x\Delta + \mathrm{h} = 0$

$$\lambda = {N_x}^{-1}(h + B_x{N_x}^{-1}B^t wf$$

→*siendo* $N_x = B_x N^{-1}{B_x}^t$

Sustituyendo en (**)

$$\left[\widehat{\Delta} = N^{-1}\left(I - {B_x}^t{N_x}^{-1}B_x N^{-1}\right)B^T Wf - N^{-1}{B_x}^t{N_x}^{-1}h\right]$$

Los residuales y las observaciones ajustadas son

$$\begin{cases}\hat{v} = f - B\widehat{\Delta}\\ \hat{l} = l + \hat{v}\end{cases}$$

Aplicando la Propagación De La Covarianza:

$$Q_{AA} = \left[N^{-1}\left(I - {B_x}^t{N_x}^{-1}B_x N^{-1}\right)B^t w\right]{\sigma_0}^2 w^{-1}\left[N^{-1}\left(I - {B_x}^t{N_x}^{-1}B_x N^{-1}\right)B^t w\right]^t$$

$$\boldsymbol{Q_{AA} = {\sigma_0}^2\left(N^{-1} - N^{-1}B_x{N_x}^{-1}B_x N^{-1}\right)}$$

$$\boldsymbol{Q_{\hat{l}\hat{l}} = BQ_{\hat{\Delta}\hat{\Delta}}B^t = {\sigma_0}^2 B\left(N^{-1} - N^{-1}{B_x}^t{N_x}^{-1}B_x N^{-1}\right)B^t}$$

Las ${\sigma_0}^2$ "a posteriori", puede ser obtenida basada en los $\hat{v}$:

$$\begin{cases}{\sigma_0}^2 = \dfrac{\hat{v}^T w\hat{v}}{\underbrace{n - m + r}_{t}}\end{cases}$$

t es el numero de sobre-determinaciones, mientras $[m - r]$ = parámetros independientes.

Prof. Adj. Ing. Fabián Barbato (fabian.barbato@fing.edu.uy)