LEY DE PROPAGACIÓN DE COFACTORES

3er COMPONENTE DE LA OPTIMIZACION

1- Funcion MMCC
2- Ecs Condicion
3- Precisiones Fins mejores que Inics

$$\Sigma_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \cdots & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Matriz COVARIANZA

$$\Sigma_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Matriz VARIANZA *(cuando no hay correlaciones)*

$$\underbrace{Q_{XX}}_{\text{Matriz Cofactor}} = W^{-1} = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum XX = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \frac{\sigma_n^2}{\sigma_0^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \frac{1}{\omega_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{\omega_n} \end{bmatrix}$$

Matriz COFACTOR →

→ $\Sigma_{XX} = \sigma_0^2 Q_{XX}$ *Relaciones de Matrices:* $W \;\; Q \;\; \Sigma_{XX}$

De Teoría de errores 1, Propagación de la matriz varianza y covarianza:

Para funciones lineales *y=ax+b* $\Rightarrow \;\; \Sigma_{YY} = A\Sigma_{XX}A^T$
Para funciones no lineales *y=f(x)* $\Rightarrow \;\; \Sigma_{YY} = J_{YX}\Sigma_{XX}J_{YX}^T$

Sabemos que:

$\Sigma_{XX} = \sigma_0^2 \cdot Q_{XX}$ *para variables X*
$\Sigma_{YY} = \sigma_0^2 \cdot Q_{YY}$ *para variables Y*

Sustituyendo:

$$\Sigma_{YY} = A \cdot \sigma_0^2 \cdot Q_{XX} \cdot A^T \div \sigma_0^2 \Rightarrow \;\; Q_{YY} = AQ_{XX}A^T$$

$$\Sigma_{YY} = J_{YX} \cdot \sigma_0^2 \cdot Q_{XX} \cdot J_{YX}^T \div \sigma_0^2 \Rightarrow Q_{YY} = Jyx \;\; Q_{XX}\, Jyx^T$$

LEY DE APLICACIÓN DE COFACTORES

APLICACIÓN:

Demostración de que el peso de la Media Ponderada es igual a la suma de los pesos.

$$\overline{X} = \frac{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \cdots + \omega_n x_n}{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n} \quad \textit{Media ponderada}$$

En notación matricial:

$$\overline{Xw} = \left[\frac{\omega_1}{\Sigma\omega}, \frac{\omega_2}{\Sigma\omega}, \cdots, \frac{\omega_n}{\Sigma\omega}\right] \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + 0$$

Es una formulación del tipo Y = A X (función lineal)* $\Rightarrow$

$$Q_{XX} = W^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\omega_n} \end{bmatrix} \quad \textit{Entonces:}$$

$$Q_{YY} = A Q_{XX} A^T$$

$$Q_{YY} = \left[\frac{\omega_1}{\Sigma\omega}, \frac{\omega_2}{\Sigma\omega}, \cdots, \frac{\omega_n}{\Sigma\omega}\right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\omega_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\omega_1}{\Sigma\omega} \\ \frac{\omega_2}{\Sigma\omega} \\ \vdots \\ \frac{\omega_n}{\Sigma\omega} \end{bmatrix} = \left[\frac{\omega_1}{\Sigma\omega}, \frac{\omega_2}{\Sigma\omega}, \cdots, \frac{\omega_n}{\Sigma\omega}\right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\Sigma\omega} \\ \frac{1}{\Sigma\omega} \\ \vdots \\ \frac{1}{\Sigma\omega} \end{bmatrix}$$

$$Q_{YY} = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n}{(\Sigma\omega)^2} = \frac{1}{\Sigma\omega}$$

$$Q_{YY} = W_{YY}^{-1} \Rightarrow \boxed{W = \Sigma\omega}$$

PROPAGACIÓN DE COFACTORES PARA AMC + M

Ecuaciones de condición $\rightarrow \boldsymbol{v + B\Delta = f}$

con $f = d - l$ *donde* $d =$ *datos numéricos*
$l =$ *observaciones.*
Trabajaremos con funciones lineales:
Matriz cofactor asociada a las observaciones $\rightarrow Q_{ll} = Q = W^{-1}$ *pues simplifica la notación.*

Algoritmo AMC+M:

$$\boldsymbol{N = B^T W B}$$
$$\boldsymbol{t = B^T W f}$$
$$\boldsymbol{\Delta = N^{-1} t}$$
$$\boldsymbol{v = f - B\Delta}$$
$$\boldsymbol{\bar{l} = l + v}$$

Esta es la nueva Varianza Referencial producto del Ajuste $\widehat{\sigma_0^2} = \frac{v^t W v}{r}$***, y que deberá ser aplicada en las propagaciones, y no la*** σ_0^2 ***anterior "a priori" que sirvió para calcular pesos o relaciones relativas entre observaciones.***
Se verá con detalle este Estimador en una próxima clase.

$$f = (-I)l + d \rightarrow Q_{ff} = (-I)Q_{ll}(-I)^T = Q \rightarrow \boxed{Q_{ff} = Q}$$

$$Q_{tt} = (B^T W)Q_{ff}(B^T W)^T = B^T W Q W^T (B^T)^T = B^T \underbrace{WQ}_{= I} WB = B^T W B = N$$

$$\rightarrow \boxed{Q_{tt} = N}$$

Pasamos a desarrollar ahora $Q_{\Delta\Delta} \rightarrow$

$$Q_{\Delta\Delta} = (N^{-1}) \cdot Q_{tt} \cdot (N^{-1})^T = N^{-1} \cdot \overbrace{Q_{tt}}^{= N} \cdot \underbrace{(N^T)}^{-1} = \underbrace{N^{-1} \cdot N}_{= I} \cdot N^{-1} = N^{-1} \rightarrow Q_{\Delta\Delta} = N^{-1} \Rightarrow \boxed{\Sigma_{\Delta\Delta} = \sigma_0^2 \cdot Q_{\Delta\Delta}}$$

$$N^T = (B^T W B)^T = (WB)^T (B^T)^T = B^T W B = N$$

$$\boxed{Q_{\Delta\Delta} = N^{-1}}$$

$\Sigma_{\Delta\Delta} = \sigma_0^2 Q_{\Delta\Delta}$

$v = f - BW^{-1}t = f - BN^{-1}B^TWf \rightarrow v = (I - BN^{-1}B^TW)f \Rightarrow$

$Q_{vv} = (I - BN^{-1}B^T \cdot W)\underbrace{Q_{ff}}_{=Q}(I - BN^{-1}B^TW)^T =$

$(IQ - BN^{-1}B^TWQ)(I^T - (BN^{-1}B^TW)^T) \Rightarrow$

$(B^TW)^T(BN^{-1})^T = WB(N^{-1})^TB^T = WBN^{-1}B^T$

$$Q_{vv} = (IQ - BN^{-1}B^TWQ)(I - WBN^{-1}B^T) =$$

$$= \underbrace{I \cdot Q \cdot I}_{=Q} - \underbrace{B \cdot N^{-1} \cdot B^T \cdot \underbrace{W \cdot Q}_{=I} \cdot I}_{=B\cdot N^{-1}\cdot B^T} - \underbrace{I \cdot \underbrace{Q \cdot W}_{=I} \cdot B \cdot N^{-1} \cdot B^T}_{=B\cdot N^{-1}\cdot B^T}$$

$$+ \underbrace{B \cdot \underbrace{N^{-1} \cdot \underbrace{\underbrace{B^T \cdot \underbrace{W \cdot Q}_{=I} \cdot W \cdot B}_{=N}}_{} \cdot N^{-1}}_{=I} \cdot B^T}_{=B\cdot N^{-1}\cdot B^T}$$

$= Q - BN^{-1}B^T - BN^{-1}B^T + BN^{-1}B^T \rightarrow \boxed{Q_{vv} = Q - BN^{-1}B^T}$

$\Rightarrow \boxed{\Sigma_{vv} = \sigma_0^2 Q_{vv}}$

1

Si trabajamos con $\bar{l}$ ajustada $\Rightarrow B\Delta = d - \bar{l} \Rightarrow \bar{l} = -B\Delta + d$ *(tipo (y=ax+b))*

$Q_{\bar{l}\bar{l}} = (-B)\underbrace{Q_{\Delta\Delta}}_{N^{-1}}(-B)^T = BN^{-1}B^T \Rightarrow Q_{\bar{l}\bar{l}} = BN^{-1}B^T \Rightarrow \boxed{\Sigma_{\bar{l}\bar{l}} = \sigma_0^2 Q_{\bar{l}\bar{l}}}$

2

Por 1 y 2 $\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{Q_{\bar{l}\bar{l}} = Q - Q_{vv}}}$

Las varianzas de las observaciones ajustadas son menores que las de las observaciones realizadas. OPTIMIZACION FINALIZADA

Con la propagación de cofactores del AMC+M de las magnitudes, podemos calcular las σ^2 o σ de las magnitudes ajustadas, de las observaciones ajustadas y de los residuales de cada observación.

Otra forma de llegar a lo mismo pero más desarrollada es:

ANEXO:

$$v = -B\Delta + f \rightarrow v = -B(N^{-1}t) + f = -B(N^{-1})(B^{+}Wf) + f =$$

$$* \rightarrow v = (I - BN^{-1}B^{+}W)f \;.\checkmark$$

$$\hat{l} = l + v \rightarrow = l + (f - B\Delta) = -B\Delta + (l + f) = -B\Delta + d \;\checkmark$$

$$Q_{tt} = (B^{+}W)\underset{\overset{\parallel}{Q}}{Q_{ff}}(B^{+}W)^{+} = B^{+}WQW^{+}(B^{+})^{+} = B^{+}W\underset{\overset{\parallel}{W^{-1}}}{Q}WB = B^{+}WB = N$$

$$\rightarrow Q_{tt} = N \;\checkmark$$

$$Q_{\Delta\Delta} = N^{-1}Q_{tt}(N^{-1})^{+} = N^{-1}N(N^{-1})^{+} = (N^{-1})^{+} = (N^{+})^{-1} = N^{-1}$$ por ser simétrica.

dem: $N = N^{+} \rightarrow (B^{+}WB)^{+} = B^{+}W^{+}(B^{+})^{+} = B^{+}WB \;\checkmark$

$$\rightarrow Q_{\Delta\Delta} = N^{-1} \;\checkmark$$

$$Q_{vv} \Rightarrow * = (I - BN^{-1}B^{+}W) \,.\, \underset{\overset{\parallel}{Q}}{Q_{ff}} \,.\, (I - BN^{-1}B^{+}W)^{+} =$$

$$= (I - BN^{-1}B^{+}W) \,.\, Q \,.\, [I^{+} - (BN^{-1}B^{+}W)^{+}] =$$

$$= (I - BN^{-1}B^{+}W) \,.\, Q \,.\, (I - W^{+}(B^{+})^{+}(N^{-1})^{+}B^{+}) =$$

$$= (I - BN^{-1}B^{+}W) \,.\, Q \,.\, (I - WBN^{-1}B^{+}) =$$

$$= (IQ - BN^{-1}B^{+}WQ)(I - WBN^{-1}B^{+}) =$$

$$= IQI - BN^{-1}B^{+}\underbrace{WQ}_{I}I - IQWBN^{-1}B^{+} + BN^{-1}\underbrace{\underbrace{B^{+}\underbrace{WQ}_{I}WB}_{N}N^{-1}}_{I}B^{+} =$$

$$= Q - 2BN^{-1}B^{+} + BN^{-1}B^{+}$$

$$= Q - BN^{-1}B^{+}$$

$$\rightarrow Q_{vv} = Q - BN^{-1}B^{+} \;\checkmark$$

$$\rightarrow Q_{\hat{l}\hat{l}} = (-B)Q_{\Delta\Delta}(-B)^{+} = BN^{-1}B^{+} \;\checkmark$$ ➡ por ser $\hat{l} = -B\Delta + d$ $(ax+b)$

$$Q_{\hat{l}\hat{l}} = Q - Q_{vv} \longleftrightarrow Q_{vv} = Q - Q_{\hat{l}\hat{l}} \;\checkmark$$

APLICACIONES ALGORITMO Y PROPAGACION AMMC + M

$$N = B^T W B$$
$$t = B^T W f$$
$$\Delta = N^{-1} t$$
$$v = f - B\Delta$$
$$\bar{l} = l + v$$

$$Q = W^{-1}$$
$$Q_{\Delta\Delta} = N^{-1} \Rightarrow \Sigma_{\Delta\Delta} = \sigma_0^2 Q_{\Delta\Delta}$$
$$Q_{vv} = Q - BN^{-1}B^T \Rightarrow \Sigma_{vv} = \sigma_0^2 Q_{vv}$$
$$Q_{\overline{ll}} = BN^{-1}B^T \Rightarrow \Sigma_{\overline{ll}} = \sigma_0^2 Q_{\overline{ll}}$$
$$\sigma_0^2 = \frac{v^t W v}{r}$$

Ej. de la recta: se desea determinar y = ax + b.
Se realizan 3 observaciones de la coordenada y. La x se conoce sin error.

Consider the data for Examples 3-5 and 4-1 in which a straight line with the equation $y = ax + b$ is fitted to three points: $x_1 = 2$, $y_1 = 3.2$; $x_2 = 4$, $y_2 = 4.0$; $x_3 = 6$, $y_3 = 5.0$. All coordinates are in centimeters. The y-coordinates are the observations, which are assumed to be (1) uncorrelated and of equal precision, and (2) uncorrelated with variances 0.10 cm², 0.08 cm², and 0.08 cm², respectively. Compute the least squares estimates $\hat{a}$, $\hat{b}$ of the two parameters for each of the two cases.

Solution

The three condition equations corresponding to the three points are (see also Example 4-1)

$$\begin{aligned} y_1 + v_1 - ax_1 - b = 0 \quad &\text{or} \quad v_1 - 2a - b = -y_1 = -3.2 \\ y_2 + v_2 - ax_2 - b = 0 \quad &\text{or} \quad v_2 - 4a - b = -y_2 = -4.0 \\ y_3 + v_3 - ax_3 - b = 0 \quad &\text{or} \quad v_3 - 6a - b = -y_3 = -5.0 \end{aligned}$$

and in the form $\mathbf{v} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$ they become

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.2 \\ -4.0 \\ -5.0 \end{bmatrix}.$$

Punto	X	Y
1	**2**	**3.2**
2	**4**	**4.0**
3	**6**	**5.0**

$$\sigma_1^2 = 0.10, \sigma_2^2 = 0.08, \sigma_3^2 = 0.08$$

$$\sigma_0^2 = 0.10$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1.25 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 69 & 14.5 \\ 14.5 & 3.5 \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} 0.452 \\ 2.256 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q = W^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \Rightarrow Q_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} 0.112 & -0.464 \\ -0.464 & 2.208 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Sigma_{\Delta\Delta} = 0.10 \cdot Q_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} 0.0112 & -0.0464 \\ -0.0464 & 0.2208 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_a^2 = 0.0112 \Rightarrow \sigma_a = 0.106$$

$$\Rightarrow \sigma_b^2 = 0.2208 \Rightarrow \sigma_b = 0.470$$

$$\Rightarrow \Sigma_{\overline{ll}} = \begin{bmatrix} 0.08 & 0.032 & -0.016 \\ 0.032 & 0.0288 & 0.0256 \\ -0.016 & 0.0256 & 0.0672 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Sigma_{vv} = \begin{bmatrix} 0.02 & -0.032 & 0.016 \\ -0.032 & 0.0512 & -0.0256 \\ 0.016 & -0.0256 & 0.0218 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \sigma_{Y_1}^2 = 0.0800 & \sigma_{Y_1} = 0.3 \\ \sigma_{Y_2}^2 = 0.0288 \rightarrow & \sigma_{Y_2} = 0.2 \\ \sigma_{Y_3}^2 = 0.0672 & \sigma_{Y_3} = 0.3 \end{matrix}$$

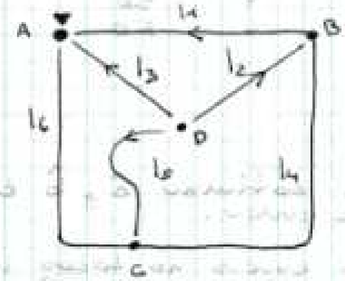
varianzas ajustadas

Las varianzas ajustadas y propagadas son mejores que las observadas.

$$\Rightarrow \begin{matrix} \sigma_{v_1}^2 = -0.020 & \sigma_{v_1} = 0.11 \\ \sigma_{v_2}^2 = 0.0512 \rightarrow & \sigma_{v_2} = 0.23 \\ \sigma_{v_3}^2 = 0.0128 & \sigma_{v_3} = 0.11 \end{matrix}$$

Ej. de la red de nivelación: (3.7 + 6.8 M & G) para Observaciones con Pesos Iguales

- Esto es una red de nivelación donde A es un repere de cota conocida 281.13 m, y se ha nivelado con el método directo.



(desde)	(a)	ΔN (l_i)
B	A	11.973
D	B	10.940
D	A	22.932
B	C	21.040
D	C	31.891
A	C	8.983

Hay que calcular las elevaciones de B, C y D.

$n_0 = 3 \quad n = 6 \rightarrow r = 3.$

Si todo estuviera bien, no habría discrepancia al cerrar la nivelación: $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A = 0.019$
$(-11.973 - 10.940 + 32.932)$

para facilitar las cosas, la elevación de $A = A$:

$$\begin{cases} B + \hat{l}_1 - A = B + l_1 + v_1 - 281.130 = 0 \\ D + \hat{l}_2 - B = D + l_2 + v_2 - B = 0 \\ D + \hat{l}_3 - A = D + l_3 + v_3 - 281.130 = 0 \\ B + \hat{l}_4 - C = B + l_4 + v_4 - C = 0 \\ D + \hat{l}_5 - C = D + l_5 + v_5 - C = 0 \\ A + \hat{l}_6 - C = 281.130 + l_6 + v_6 - C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = 269.157 - B \\ v_2 = B - D - 10.940 \\ v_3 = 258.198 - D \\ v_4 = C - B - 21.040 \\ v_5 = C - D - 31.891 \\ v_6 = C - 290.113 \end{cases} \rightarrow \phi = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + v_5^2 + v_6^2 \text{ mínimo}$$

$$= (269.157 - B)^2 + (B - D - 10.940)^2 + (258.198 - D)^2 + (C - B - 21.040)^2 + (C - D - 31.891)^2 + (C - 290.113)^2.$$

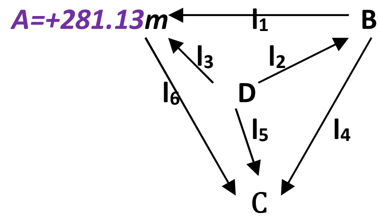
$$\frac{\partial \phi}{\partial B} = -2(269.157 - B) + 2(B - D - 10.940) - 2(C - B - 21.040) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial C} = 2(C - B - 21.040) + 2(C - D - 31.891) + 2(C - 290.113) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial D} = -2(B - D - 10.940) - 2(258.198 - D) - 2(C - D - 31.891) = 0$$

$$\begin{cases} 3B - C - D = 259.057 \\ -B + 3C - D = 343.044 \\ -B - C + 3D = 215.367 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} B = 269.131 \text{ m} \\ C = 290.128 \text{ m} \\ D = 258.209 \text{ m}. \end{array}$$

18



B = τ_1, C = τ_2, D = τ_3

$$W = I\ \Delta = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\ N = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

A los efectos de poder calcular las varianzas de las cotas ajustadas aseguramos $\sigma_0^2 = 0.0016m^2$.

$$Q_{\Delta\Delta} = N^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma_{\Delta\Delta} = 0.0016 \cdot N^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0008 & 0.0004 & 0.0004 \\ 0.0004 & 0.0008 & 0.0004 \\ 0.0004 & 0.0004 & 0.0008 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \sigma_{l_1}^2 = 0.0008 \rightarrow \boxed{\begin{matrix} \sigma_B = 0.028m \\ \sigma_C = 0.028m \\ \sigma_D = 0.028m \end{matrix}}$$

para Observaciones con Ponderadas según Distancias, Ajustadas y Propagadas:

- Hay que resolver el problema de la red de nivelación (p. 23) tomando el caso de observaciones de igual precisión y de observaciones con peso W.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} 269.157 \\ -10.940 \\ 258.198 \\ -21.040 \\ -31.891 \\ -290.113 \end{bmatrix}$$

(a) $N = B'B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$t = B'f = \begin{bmatrix} 259.057 \\ 343.044 \\ 215.367 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = N^{-1}t = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 259.057 \\ 343.044 \\ 215.367 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 269.131 \\ 290.128 \\ 258.209 \end{bmatrix}$$ } elevaciones de los puntos B, C y D

(b)

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6
OBSERV.	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
DIST.	20	12	15	28	20	26
RECIPROCOL.	0.050	0.083	0.067	0.036	0.050	0.039
PESO	1.400	2.333	1.867	1.000	1.400	1.077

Al menor recíproco le asignamos peso = 1, el resto en forma proporcional.

$$W = \begin{bmatrix} 1.400 & & & & & \\ & 2.333 & & & & \\ & & 1.867 & & & \\ & & & 1.000 & & \\ & & & & 1.400 & \\ & & & & & 1.077 \end{bmatrix}$$

$$N = B'WB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.733 & -1.000 & -2.333 \\ -1.000 & 3.477 & -1.400 \\ -2.333 & -1.400 & 5.600 \end{bmatrix}$$

$$t = B'Wf: \quad B'W \begin{bmatrix} 269.157 \\ -10.940 \\ 258.198 \\ -21.040 \\ -31.891 \\ -290.113 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 381.3028 \\ 378.1391 \\ 411.8852 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 0.337902 & 0.171085 & 0.183543 \\ 0.171085 & 0.406418 & 0.172880 \\ 0.183543 & 0.172880 & 0.298256 \end{bmatrix}$$

Los 3 parámetros buscados son $\Delta = N^{-1} t =$

$$= \begin{bmatrix} 269.135 \\ 290.124 \\ 258.205 \end{bmatrix}$$

- Ref. ex. 4-7 de una red, calcular la matriz covarianza para el ajuste de las elevaciones B C y D, para el caso de observaciones ponderadas dando la varianza referencial de 0.0016 m² - Calcular también las desviaciones standard en el ajuste de elevaciones de B, C y D. eq,

aplicado ... con datos del problema ⇒

$$Q_{\Delta\Delta} = N^{-1} = \begin{bmatrix} 0.337902 & 0.171085 & 0.183543 \\ & 0.406418 & 0.172880 \\ & & 0.298256 \end{bmatrix} m^2$$

la matriz requerida es:

$$\Sigma_{\Delta\Delta} = \sigma_0^2 Q_{\Delta\Delta} = (0.0016) N^{-1} = 10^{-4}$$

las desviaciones standard son:

$$\sigma_B = (10^{-2})\sqrt{5.406} = 0.023 \text{ m}$$

$$\sigma_C = (10^{-2})\sqrt{6.502} = 0.025 \text{ m}$$

$$\sigma_D = (10^{-2})\sqrt{4.773} = 0.022 \text{ m}$$

Hay un resumen en 9.5 #

RESUMEN EJECUTIVO ALGORITMO y PROPAGACION MMC + M

$$N = B^T \cdot W \cdot B$$
$$t = B^T \cdot W \cdot f$$
$$\Delta = N^{-1} \cdot t$$
$$\upsilon = f - B \cdot \Delta$$
$$\bar{l} = l + \upsilon$$

$$Q = W^{-1}$$
$$Q_{\Delta\Delta} = N^{-1} \Rightarrow \Sigma_{\Delta\Delta} = \sigma_0^2 \cdot Q_{\Delta\Delta}$$
$$Q_{\upsilon\upsilon} = Q - B \cdot N^{-1} \cdot B^T \Rightarrow \Sigma_{\upsilon\upsilon} = \sigma_0^2 \cdot Q_{\upsilon\upsilon}$$
$$Q_{\bar{l}\bar{l}} = B \cdot N^{-1} \cdot B^T \Rightarrow \Sigma_{\bar{l}\bar{l}} = \sigma_0^2 \cdot Q_{\bar{l}\bar{l}}$$

PROPAGACIÓN DE COFACTORES PARA AMC + C

Ecuaciones de condición → $Av = f$
con $f = d - l$ *donde* $d =$ *datos numéricos*
$l =$ *observaciones.*

ANEXO:

Dem. que Q_e es simétrico $\Rightarrow Q_e = Q_e^+$

$Q_e^+ = (AQA^+)^+ = (A^+)^+ Q^+ A^+ = AQA^+ = Q_e$ ✓

Dem. que Q_e^{-1} es simétrica $\Rightarrow Q_e^{-1} = (Q_e^{-1})^+$

$((AQA^+)^{-1})^+ = ((AQA^+)^+)^{-1} = Q_e^{-1}$ ✓

Ahora tratemos $\hat{l} = l + v$

$\hat{l} = l + QA^+K = l + QA^+W_e f = l + QA^+W_e\left[(-A)l + d\right] \rightarrow$

$\hat{l} = (I - QA^+W_eA)\,l + QA^+W_e d$

$$\rightarrow Q_{\hat{l}\hat{l}} = (I - QA^+W_eA)\,Q_{ll}\,(I - QA^+W_eA)^+$$
$$= (I - QA^+W_eA)\,Q\,(I^+ - A^+W_e^+AQ^+)$$
$$= (I - QA^+W_eA)\,Q\,(I - A^+W_eAQ)$$
$$= (IQ - QA^+W_eAQ)(I - A^+W_eAQ)$$
$$= IQI - IQA^+W_eAQ - QA^+W_eAQI + QA^+W_e\underbrace{\underbrace{AQA^+}_{Q_e}W_e}_{I}AQ =$$

$Q_{\hat{l}\hat{l}} = Q - 2QA^+W_eAQ + QA^+W_eAQ \rightarrow$

$Q_{\hat{l}\hat{l}} = Q - QA^+W_eAQ \rightarrow$

$Q_{\hat{l}\hat{l}} = Q - Q_{vv}$ recordando que $\hat{l} = l + v$, está bien que no se conserve el signo, así $Q_{\hat{l}\hat{l}}$ justeda es menor a Q_{ll} ✓

$\sigma_0^2 Q_{\hat{l}\hat{l}} = \sigma_0^2 Q - \sigma_0^2 Q_{vv}$

$\Sigma_{\hat{l}\hat{l}} = \Sigma_{ll} - \Sigma_{vv}$ → LAS VARIANZAS DE LOS RESULTADOS CORREGIDOS SON MENORES QUE LA DE LOS OBSERVADOS.

Presentado de otra forma llegamos a la misma definición:

Algoritmo AMC+C:

$$Q_e = AQA^T \ (=Q_{ff})$$
$$W_e = Q_e^{-1}$$
$$k = W_e f$$
$$v = QA^T k$$
$$\bar{l} = l + v$$
$$\sigma_0^2 = \frac{v^t W v}{r}$$

Trabajaremos con funciones lineales:
Matriz cofactor asociada a las observaciones → $Q_{ll} = Q = W^{-1}$ *pues simplifica la notación.*

Q_e *ya es una matriz cofactor* ⇒ W_e *es la matriz peso correspondiente.*

$f = -Al + d\ (propagación\ lineal) \Rightarrow Q_{ff} = (-A)Q_{ll}(-A)^T = AQA^T \rightarrow Q_{ff} = AQA^T = Q_e$

$Q_{kk} = \underbrace{(W_e)}_{Q_e^{-1}} \underbrace{Q_{ff}}_{Q_e} (W_e)^{-T} = W_e \Rightarrow Q_{kk} = W_e$ del algoritmo: K = inv(Qe). f

$Q_{vv} = (QA^T) \underbrace{Q_{kk}}_{W_e} \underbrace{(QA^T)^T}_{(A^T)^T \cdot Q^T} = QA^T W_e AQ \Rightarrow * \ Q_{vv} = QA^T W_e AQ$

Todos los Cofactores y Pesos son simétricos, y para obtener la Matriz Cofactor de $\bar{l} = l + v$, *debemos tratarla como una función lineal de l.*

$$\sigma_0^2 = \frac{v^t W v}{r}$$

$$\Sigma_{vv} = \sigma_0^2 Q_{vv}$$

Demostración que $(W_e)^T = W_e$

$W_e = Q_e^{-1} \Rightarrow Q_e^T = (AQA^T)^T = \underbrace{(A^T)^T}_{A} \underbrace{(AQ)^T}_{Q^T \cdot A^T} = AQA^T = Q_e \Rightarrow Q_e^T = Q_e$

Y demostraremos que Q_e^{-1} *es simétrica.*

$W_e^T = \left(\underbrace{(AQA^T)}_{Q_e}{}^{-1} \right)^T = \left(\underbrace{(AQA^T)}_{Q_e}{}^{T} \right)^{-1} = Q_e^{-1} = W_e \Rightarrow (W_e)^T = W_e$

Ahora trataremos: $\boldsymbol{\bar{l} = l + v = l + QA^T k}$

$$\bar{l} = l + QA^T W_e f = l + QA^T W_e (d - Al) = l + QA^T W_e d - QA^T W_e A l$$

$$\bar{l} = (I - QA^T W_e A) l + QA^T W_e d \qquad \text{(forma lineal)}$$

$$Q_{\bar{l}\bar{l}} = (I - QA^T W_e A)\, Q_{ll}\, (I - QA^T W_e A)^T = (I - QA^T W_e A)\, Q \left(I \; - \underbrace{(QA^T W_e A)}_{(W_e \cdot A)^T \cdot (Q \cdot A^T)^T} \right)^T$$

$$Q_{\bar{l}\bar{l}} = (IQ - QA^T W_e A Q)(I - QA^T W_e A)^T = (IQ - QA^T W_e A Q)(I^T - A^T W^T{}_e A Q^T)$$

$$= \underbrace{IQI}_{Q} - IQA^T W_e A Q - QA^T W_e A Q I + QA^T \underbrace{W_e \underbrace{AQA^T}_{Q_e}}_{I} W_e A Q$$

$$Q_{\bar{l}\bar{l}} = Q - QA^T W_e A Q - QA^T W_e A Q + QA^T W_e A Q$$

$Q_{\bar{l}\bar{l}} = Q - QA^T W_e A Q \Rightarrow \boxed{Q_{\bar{l}\bar{l}} = Q - Q_{vv}} \Rightarrow \boxed{\Sigma_{\bar{l}\bar{l}} = \sigma_0^2 Q_{\bar{l}\bar{l}}}$

$\boxed{\sigma_0 Q_{\bar{l}\bar{l}} = \sigma_0 Q - \sigma_0 Q_{vv} \Rightarrow}$

$\Sigma_{\bar{l}\bar{l}} = \Sigma_{ll} - \Sigma_{vv}$ $\quad$ $\sigma^2{}_{\bar{l}\bar{l}} i = \sigma^2{}_{ll} i - \sigma^2{}_{vv} i$

Lo que demuestra que luego de un ajuste con su correspondiente propagación de errores o varianzas, la precisión del resultado final es mejor que las precisiones iniciales, incluyendo el factor de Escala $\boldsymbol{\sigma_0^2 = \frac{v^t W v}{r}}$ *explicitando tácitamente la necesidad de obtener observaciones redundantes en cualquier operación de Agrimensura, para luego proceder a la depuración y ajuste de las observaciones.*