MATRIZ COVARIANZA - VARIANZA / COFACTOR / PESO

CONCEPTO DE PESO

Hemos estudiado que las varianzas y las desviaciones estándar nos dan una idea de la precisión de un trabajo.
Las varianzas están en relación inversa con la precisión. Es por eso que definimos un nuevo módulo de precisión llamado **Peso = W**, de tal forma que está en relación directa con la precisión $\Rightarrow W_i = \frac{K}{\sigma_i^2}$, donde W_i es el peso de la i-èsima observación y K es una constante de proporcionalidad.
La varianza de aquella observación que tenga peso 1, está definida por el símbolo σ_0^2 y se define como Varianza Referencial.

$$1 = \frac{K}{\sigma_0^2} \Rightarrow K = \sigma_0^2 \Rightarrow W_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

Ejemplo:

Consideremos el caso de dos series de distinta precisión inherentes a una misma magnitud α, cuyos promedios son: $\begin{cases} \alpha_1 = 22º35'20\,.\,0 \text{ +- } 4.0 \\ \alpha_2 = 22º35'30\,.\,0 \text{ +- } 8.0 \end{cases}$ y $\begin{cases} \sigma_1^2 = 16 \\ \sigma_2^2 = 64 \end{cases}$

Si elegimos como $\sigma_0^2 = \sigma_2^2 = 64 \Rightarrow \begin{cases} W_1 = \frac{64}{16} = 4 \\ W_2 = \frac{64}{64} = 1 \end{cases}$

PROMEDIO PONDERADO

Veamos como hallar la media de una misma magnitud cuando las medidas se realizan con diferentes grados de confianza (por variar las condiciones de mediciones: niebla, luminosidad, prisas, etc.) o de precisión (por utilizar instrumentos de diferente precisión).

Supongamos que sobre una magnitud determinada se ejecutan diversas series de mediciones, todas ellas de la misma confianza. Cada serie está constituida por un número diferente de mediciones. El valor más probable para cada serie será:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{X}_1 = \frac{x_{11}+x_{12}+.....+x_{1P1}}{P_1} \\ \bar{X}_2 = \frac{x_{21}+x_{22}+.....+x_{2P2}}{P_2} \\ \vdots \\ \bar{X}_n = \frac{x_{n1}+x_{n2}+.....+x_{nPn}}{P_n} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P_1\bar{X}_1 = x_{11} + ... + x_{1P1} \\ P_2\bar{X}_2 = x_{21} + ... + x_{2P2} \\ \vdots \\ P_n\bar{X}_n = x_{n1} + ... + x_{nPn} \end{array}$$

El valor más probable de la media será la media aritmética de todas ellas:

$$X = \frac{(x_{11} + ... + x_{1P1}) + (x_{21} + ... + x_{2P1}) + ... + (x_{11} + ... + x_{\mathrm{nPn}})}{P_1 + P_2 + ... + P_n}$$

$$X = \frac{P_1\bar{X}_1 + P_2\bar{X}_2 + ... + P_n\bar{X}_n}{P_1 + ... + P_n} \quad \text{donde:} \quad \left.\begin{matrix} P_1 = W_1 \\ P_2 = W_2 \\ \vdots \\ P_n = W_n \end{matrix}\right\} \text{pesos o grados de importancia.}$$

$$\bar{X} = \frac{W_1X_1 + W_2X_2 + ... + W_nX_n}{W_1 + ... + W_n} = \frac{\sum W_iX_i}{\sum W_i}$$

En el ejemplo anterior:

$$\bar{\alpha} = \frac{W_1\alpha_1 + W_2\alpha_2}{W_1 + W_2} = \frac{4(22º35'20'') + 1(\ 22\ º\ 35\ '\ 30\ '')}{5} = 22º35'22''$$

En Teoría de Errores 1 se introdujo el concepto de ***COVARIANZA****, como la relación entre dos variables aleatorias.*
Si tres o más variables están conjuntamente distribuidas, debemos considerar las covarianzas como todos los posibles pares entre ellas:

$$\begin{matrix} X \rightarrow \sigma_{XZ} \\ Y \rightarrow \sigma_{XY} \\ Z \rightarrow \sigma_{YZ} \end{matrix} \qquad \textit{por ejemplo:}$$

Si tenemos m variables aleatorias conjuntamente distribuidas, es conveniente trabajar con un vector aleatorio: $X = [X_1, X_2, \ldots, X_m]$

$(X - \mu) = [X_1 - \mu_{1,} X_2 - \mu_{2,} \ldots, X_m - \mu_m]$, *donde* μ_i*es la media de* X_i.
Expresemos:

$$(X-\mu)\cdot(X-\mu)^t = \begin{bmatrix} (X_1-\mu_1) \\ (X_2-\mu_2) \\ \vdots \\ (X_m-\mu_m) \end{bmatrix} \cdot [X_1-\mu_1, X_2-\mu_2, \ldots, X_m-\mu_m] =$$

$$= \begin{bmatrix} (X_1-\mu_1)^2 & (X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & \cdots & (X_1-\mu_1)(X_m-\mu_m) \\ (X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & (X_2-\mu_2)^2 & \cdots & (X_2-\mu_2)(X_m-\mu_m) \\ \vdots & & \ddots & \\ (X_2-\mu_2)(X_m-\mu_m) & & \cdots & (X_m-\mu_m)^2 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que las esperanzas matemáticas son :

$$E[(X_i-\mu_i)^2] = \sigma_i^2$$
$$E[(X_i-\mu_i)\cdot(X_j-\mu_j)] = \sigma_{ij} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\Sigma_{XX}(covarianza)} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1\mathrm{m}} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2\mathrm{m}} \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{m1} & & \cdots & \sigma_m^2 \end{bmatrix}$$

Las varianzas de cada variable forman la diagonal y el resto de los valores son todas las posibles covarianzas de los pares de variables aleatorias.

Σ_{XX} ***es la matriz COVARIANZA***

*Si las variables no son correlacionadas entonces todas los términos fuera de la diagonal de la matriz anterior son cero. Y en este caso se le puede llamar **matriz VARIANZA**.*

$W_{XX} = \sigma_0^2 \cdot \Sigma_{XX}^{-1}$ *Esta ecuación es más general y se puede aplicar a observaciones tanto correlacionadas como no correlacionadas.*

*Si cada elemento de Σ_{XX}es dividido por σ_0^2 →se obtiene $\boldsymbol{Q_{XX}}$**matriz COFACTOR**, que además es igual a la inversa de la matriz W.*

$$\boldsymbol{Q_{XX(cofactor)}} = (1/\sigma_0^2) \cdot \Sigma_{XX} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} & \cdots & \frac{\sigma_{1\mathrm{m}}}{\sigma_0^2} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\sigma_{m1}}{\sigma_0^2} & \cdots & \frac{\sigma_m^2}{\sigma_0^2} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\Sigma_{XX} = \sigma_0^2 \cdot Q_{XX}}$$

Resumiendo tenemos 2 tipos de Matrices fundamentales en Teoría de Errores*:*

$$\boldsymbol{\Sigma_{XX}(covarianza)} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1\mathrm{m}} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2\mathrm{m}} \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{m1} & & \cdots & \sigma_m^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q_{XX(cofactor)}} = (1/\sigma_0^2) \cdot \Sigma_{XX} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} & \cdots & \frac{\sigma_{1\mathrm{m}}}{\sigma_0^2} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\sigma_{m1}}{\sigma_0^2} & \cdots & \frac{\sigma_m^2}{\sigma_0^2} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\Sigma_{XX} = \sigma_0^2 \cdot Q_{XX}}$$