PROPAGACIÓN DE VARIANZAS Y COVARIANZAS

PROPAGACIÓN DE INCERTIDUMBRES

Introducción

Por lo gral. los modelos con los cuales estudiamos la realidad no son tan sencillos y tan simples que se puedan definir con un solo mensurando, sino que partiendo de varias variables medidas debemos inferir o calcular otras más complejas.

En estos casos nos interesará conocer a partir de las incertidumbres o errores con las cuales medimos las variables originales, los efectos que tengan sobre las resultantes. A este proceso se le llama propagación.

Ejemplos:

1) Medimos ángulos y distancias → calculamos coordenadas.
2) Medimos coordenadas → calculamos superficies y deslindes.
3) Medimos niveles → calculamos desniveles y cotas.

Propagación de Errores Sistemáticos

Como ya vimos al realizar una observación el error de medida tiene dos componentes, el error sistemático y el error aleatorio.

Los errores sistemáticos los podemos eliminar directamente de nuestras observaciones mediante correcciones o podemos estudiar el efecto de su propagación.

X →variable independiente con errores dx sistemáticos.
Y →variable dependiente con error dy (*el que se quiere hallar*).

CASO LINEAL

$$Y = A \cdot X + B \rightarrow Y + dy = A \cdot (X + dx) + B$$
$$Y + dy = A \cdot X + A \cdot dx + B \rightarrow dy = A \cdot dx$$

CASO NO LINEAL

$Y = f(X)$

Linealizamos por Taylor $\quad Y = Y_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right) X - \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right) X_0$

$$Y = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)}_{A} X + \underbrace{\left(Y_0 - \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right) X_0\right)}_{B} \rightarrow Y = AX + B \rightarrow$$

→Aplicando el caso lineal → $dy = \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right) dx$

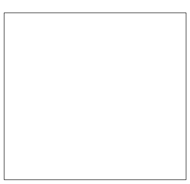
Generalización: $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$

1) Caso lineal → $Y = AX_1 + BX_2 + \cdots$
   $dy = Adx_1 + Bdx_2 + \cdots$

2) Caso no lineal → $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$
   $dy = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right) dx_2 + \cdots$

Ejemplo:

Se mide con una cinta de 30 m los lados de una figura rectangular.

X_1 

X_2

$X_1 = 50{,}170$ m
$X_2 = 61{,}090$ m

$Y = X_1 \times X_2$

Posteriormente se contrasta la cinta y se encuentra que la misma es 0,03 m más corta. Calcularemos el error en el área calculada debido al error sistemático en la medida con la cinta.

30 m ———— 0,03
50,170 m ———— $dX_1 = 0{,}050$ $\qquad \frac{\partial Y}{\partial X_1} = X_2$

30 m ———— 0,03
61,090 m ———— $dX_2 = 0{,}061$ $\qquad \frac{\partial Y}{\partial X_2} = X_1$

$$dy = \left(\frac{\partial Y}{\partial X_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial Y}{\partial X_2}\right) dx_2 = 6{,}1m^2$$

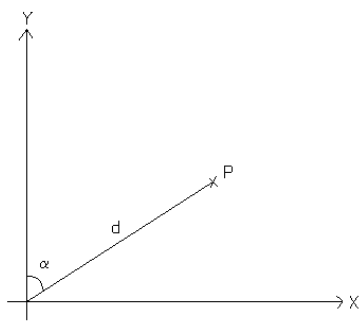
Area Corregida= X_1 x X_2 – 6,1 = 3058,785 m^2

Propagación de Varianzas y Covarianzas

Cuando tratamos con errores aleatorios, el valor específico no lo conocemos y es imposible aplicar la técnica de propagación vista anteriormente. Pero es posible estudiar los efectos de su propagación.

Consideremos dos vectores X e Y, donde X representa un conjunto de mediciones e Y representa al conjunto de cantidades calculadas.

Ejemplo: Observamos la distancia d, el azimut α



$$x_P = d.\text{sen}\alpha$$
$$y_P = d.\cos\alpha$$

=> $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} d \\ \alpha \end{pmatrix}$

El problema consiste en buscar la distribución del vector Y, conociendo la distribución del vector X.

Desarrollaremos primero la propagación suponiendo un vector aleatorio X compuesto por dos variables conjuntamente distribuidas x_1 y x_2 que tienen el mismo modelo aleatorio. Y un vector aleatorio Y compuesto por dos variables y_1 e y_2.

CASO LINEAL

Supongamos que se relacionan:

$$Y = \mathrm{AX} + B \quad \text{(Relación lineal)}$$

En donde:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ con A y B matrices numéricas.

Nuestro objetivo será calcular σ_{y1}^2, σ_{y2}^2 y σ_{y1y2}^2, conociendo σ_{x1}^2, σ_{x2}^2, σ_{x1x2}^2 y cómo se relacionan

$Y = \mathrm{AX} + B$.

$$=> \begin{cases} Y_1 = a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + b_1 \\ Y_2 = a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + b_2 \end{cases}$$

Recordemos: $\sigma_x^2 = E(x^2) - \big(E(x)\big)^2$

$$\sigma_{y1}^2 = E((a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + b_1)^2) - [E(a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + b_1)]^2$$

$$\sigma_{y1}^2 = E(a_{11}^2.x_1^2 + a_{12}^2.x_2^2 + 2a_{11}.a_{12}.x_1.x_2 + ... + b_1^2) - [a_{11}E(x_1) + a_{12}E(x_2) + b_1]^2$$

$$\sigma_{y1}^2 = a_{11}^2[E(x_1^2) - E(x_1)^2] + a_{12}^2.E(x_2^2) + 2a_{11}.a_{12}.E(x_1.x_2) + .. + b_1^2 \\ - [a_{11}^2 + a_{12}^2.E(x_2)^2 + 2a_{11}.a_{12}.E(x_1).E(x_2) + ... + b_1^2]$$

$$\sigma_{y1}^2 = a_{11}^2\sigma_{X1}^2 + a_{12}^2\sigma_{X2}^2 + 2a_{11}.a_{12}\sigma_{X1X2}$$

$$\sigma_{y2}^2 = a_{21}^2\sigma_{X1}^2 + a_{22}^2\sigma_{X2}^2 + 2a_{21}.a_{22}\sigma_{X1X2}$$

$$\sigma_{Y1Y2} = E\big[\big(Y_1 - E(Y_1)\big)\big(Y_2 - E(Y_2)\big)\big]$$

$$Y_1 - E(Y_1) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 - a_{11}E(x_1) - a_{12}E(x_2) - b_1 = a_{11}\big(x_1 - E(x_1)\big) + a_{12}\big(x_2 - E(x_2)\big)$$

$$Y_1 - E(Y_1) = a_{11}\big(x_1 - E(x_1)\big) + a_{12}\big(x_2 - E(x_2)\big)$$

$$Y_2 - E(Y_2) = a_{21}\big(x_1 - E(x_1)\big) + a_{22}\big(x_2 - E(x_2)\big)$$

$$\sigma_{Y1Y2} = E\left[\left(a_{11}\left(x_1 - E(x_1)\right) + a_{12}\left(x_2 - E(x_2)\right)\right).\left(a_{21}\left(x_1 - E(x_1)\right) + a_{22}\left(x_2 - E(x_2)\right)\right)\right]$$

$$\sigma_{Y1Y2} = E\left[a_{11}a_{21}\left(x_1 - E(x_1)\right)^2 + a_{12}a_{21}\left(x_1 - E(x_1)\right)\left(x_2 - E(x_2)\right) + a_{11}a_{22}\left(x_1 - E(x_1)\right)\left(x_2 - E(x_2)\right) + a_{12}a_{22}\left(x_2 - E(x_2)\right)^2\right]$$

$$\sigma_{Y1Y2} = a_{11}a_{21}E\left[\left(x_1 - E(x_1)\right)^2\right] + (a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22})E\left[\left(x_1 - E(x_1)\right)\left(x_2 - E(x_2)\right)\right] + a_{12}a_{22}E\left[\left(x_2 - E(x_2)\right)^2\right]$$

$$\sigma_{Y1Y2} = a_{11}a_{21}\sigma_{X1}^2 + (a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22})\sigma_{X1X2} + a_{12}a_{22}\sigma_{X2}^2$$

Lo anterior lo podemos expresar en forma matricial de la siguiente manera:

Definimos: $\Sigma_{\mathrm{XX}} = \begin{bmatrix} \sigma_{X1}^2 & \sigma_{X1X2} \\ \sigma_{X1X2} & \sigma_{X2}^2 \end{bmatrix}$ y $\Sigma_{\mathrm{YY}} = \begin{bmatrix} \sigma_{Y1}^2 & \sigma_{Y1Y2} \\ \sigma_{Y1Y2} & \sigma_{Y2}^2 \end{bmatrix}$ **Matrices Covarianzas**

$$\Rightarrow \qquad \Sigma_{\mathrm{YY}} = A.\Sigma_{\mathrm{XX}}.A^T$$

Podemos generalizar lo anterior:

Considerando: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

n variables aleatorias de las cuales conocemos: $\sigma_{X1}^2, \sigma_{X2}^2, \dots \sigma_{\mathrm{Xn}}^2, \sigma_{X1X2}, \sigma_{X1X3}, \dots.$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$Y = \mathrm{AX} + B$$

$$\Sigma_{\mathrm{YY}} = \begin{bmatrix} \sigma_{Y1}^2 & \sigma_{Y1Y2} & \dots & \sigma_{Y1Yn} \\ \sigma_{Y1Y2} & \sigma_{Y2}^2 & \dots & \sigma_{Y2Yn} \\ . & . & . & . \\ \sigma_{YmY1} & \sigma_{YmY2} & \dots & \sigma_{Ym}^2 \end{bmatrix} \Sigma_{\mathrm{XX}} = \begin{bmatrix} \sigma_{X1}^2 & \sigma_{X1X2} & \dots & \sigma_{X1Yn} \\ \sigma_{X1X2} & \sigma_{X2}^2 & \dots & \sigma_{X2Yn} \\ . & . & . & . \\ \sigma_{XmX1} & \sigma_{XmX2} & \dots & \sigma_{Xm}^2 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\Sigma_{\mathrm{YY}} = A\, \Sigma_{\mathrm{XX}}\, A^T}$ ***Ley de Propagación de Varianzas y Covarianzas para el CASO LINEAL***

CASO NO LINEAL

Cuando la relación entre X e Y no es lineal: $Y = f(x)$se pueden linealizar las relaciones usando Desarrollos de Taylor:

$$\begin{cases} Y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \\ Y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \\ \vdots \\ Y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \end{cases}$$

$$Y_i = Y_{i0} + \sum \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)_{x0} \Delta_{\mathrm{xi}}$$

con: $Y_{i0} = f_i(x_{10}, x_{20}, \ldots\ldots, x_{n0})$ y f evaluada en $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots\ldots, x_{n0})$

$$\Delta X_i = x_i - x_{i0}$$

$$Y_i = \sum \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)_{x0} .x_i + \left[Y_{i0} - \sum \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)_{x0} .x_{i0}\right] \text{Lineal en } x_i$$

$$Y = \mathrm{Ax} + B$$

Si para cada relación hacemos lo mismo:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = J_{\mathrm{YX}} \text{ (jacobiano)}$$

Ley GENERAL de Propagación de Varianzas y Covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{YY}} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{YX}}\, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{XX}} \boldsymbol{J}_{\mathrm{YX}}^{\boldsymbol{T}}$

En caso que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sean independientes, $\sigma_{\mathrm{xixj}} = 0$

$$\Sigma_{\mathrm{XX}} = \begin{bmatrix} \sigma_{X1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{X2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{\mathrm{Xn}}^2 \end{bmatrix} = \textbf{Matriz Varianza}$$

Si $Y = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \;\Rightarrow\; \sigma_Y^2 = a_{11}^2\sigma_{x1}^2 + a_{12}^2\sigma_{x2}^2 + \ldots.. + a_{1n}^2\sigma_{\mathrm{xn}}^2$

Si $Y = f(x_1, x_2, \ldots., x_n) \;\Rightarrow\; \sigma_Y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x2}^2 + \ldots.. + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{\mathrm{xn}}^2$

Ejemplo Propagación:

X_1, X_2 y X_3 son mediciones independientes con: $\sigma_{X1} = 2.0$cm, $\sigma_{X2} = 4.0$cm, $\sigma_{X3} = 2.0$cm. Las variables Y_1, Y_2, Z_1 y Z_2 pueden ser calculadas a partir de X_1, X_2 y X_3 de la siguiente manera:

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 + 2X_3 \\ Y_2 = X_1 - 2X_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} Z_1 = 0.5Y_1 - Y_2 \\ Z_2 = Y_1 + 0.5Y_2 \end{cases}$$

Calcular las matrices covarianzas de $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ y de $Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Y = A.X$$

$$\Sigma_{\mathrm{YY}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{x2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{x3}^2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2 + 4\sigma_{x3}^2 & \sigma_{x1}^2 - 2\sigma_{x2}^2 \\ \sigma_{x1}^2 - 2\sigma_{x2}^2 & \sigma_{x1}^2 + 4\sigma_{x2}^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \Sigma_{\mathrm{YY}} = \begin{bmatrix} \sigma_{Y1}^2 & \sigma_{Y1Y2} \\ \sigma_{Y1Y2} & \sigma_{Y1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & -28 \\ -28 & 68 \end{bmatrix}_{(\mathrm{cm2})}$$

$$X = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Y = A.X$$

$$\Sigma_{\mathrm{YY}} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{Y1}^2 & \sigma_{Y1Y2} \\ \sigma_{Y1Y2} & \sigma_{Y1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{\mathrm{YY}} = \begin{bmatrix} (1/4)\sigma_{Y1}^2 - (1/2)\sigma_{Y1Y2} - (1/2)\sigma_{Y1Y2} + \sigma_{Y2}^2 & (1/2)\sigma_{Y1}^2 + (1/4)\sigma_{Y1Y2} - \sigma_{Y1Y2} - (1/2)\sigma_{Y2}^2 \\ (1/2)\sigma_{Y1}^2 - \sigma_{Y1Y2} + (1/4)\sigma_{Y1Y2} - (1/2)\sigma_{Y2}^2 & \sigma_{Y1}^2 + (1/2)\sigma_{Y1Y2} + (1/2)\sigma_{Y1Y2} + (1/4)\sigma_{Y2}^2 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{\mathrm{YY}} = \begin{bmatrix} 105 & 5 \\ 5 & 25 \end{bmatrix}$$