fbarbato@fing.edu.uy

Revisión del cálculo de coordenadas aproximadas

La mayoría de los PROYECTOS TOPOGRÁFICOS están basados en cálculos en dos dimensiones dentro de un sistema de referencia rectangular plano

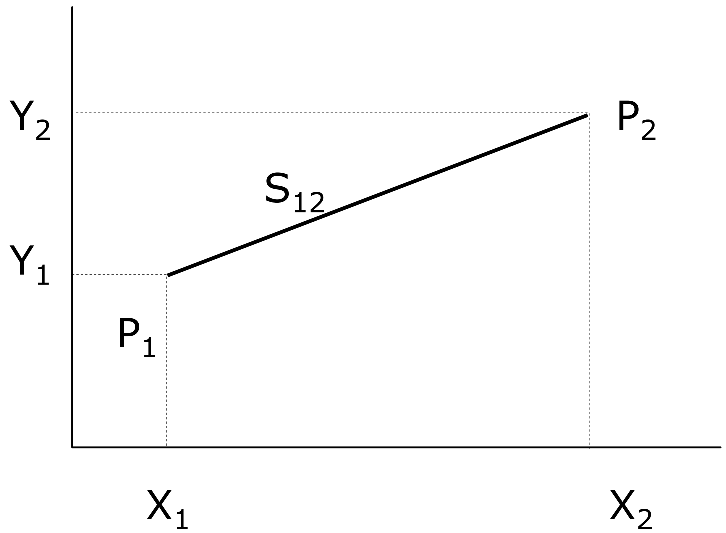
- En este tema se analizan las aplicaciones del método de ajuste mmcc a los problemas de topografía.
- Se incluye el planteamiento y linealización de las tres ecuaciones básicas de observación en ajustes topográficos:
  - » Ecuación de la distancia
  - » Ecuación del acimut, y
  - » Ecuación del ángulo
- que van a aparecer en el ajuste de coordenadas planas de un cierto punto, utilizando el método paramétrico, llamado en estos casos METODO DE VARIACION DE COORDENADAS).

- Para estos ajustes de las coordenadas se parte de valores aproximados de las mismas de cada punto P: $\boxed{X_P^0, Y_P^0}$ (ver documento de Cálculo de C.Aproximadas)
- En el proceso se obtienen las correcciones (Variaciones) de las coordenadas: $\boxed{\Delta X, \Delta Y}$
- El resultado final son las coordenadas ajustadas

$$\boxed{\begin{aligned} X_P &= X_P^0 + \Delta X \\ Y_P^0 &= Y_P^0 + \Delta Y \end{aligned}}$$

-Linealización de la ecuación de observación de distancia

– La distancia entre dos puntos P_1 ,P_2 es



$$\hat{S}_{12} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

Se trata de determinar las coordenadas de P_1 y P_2

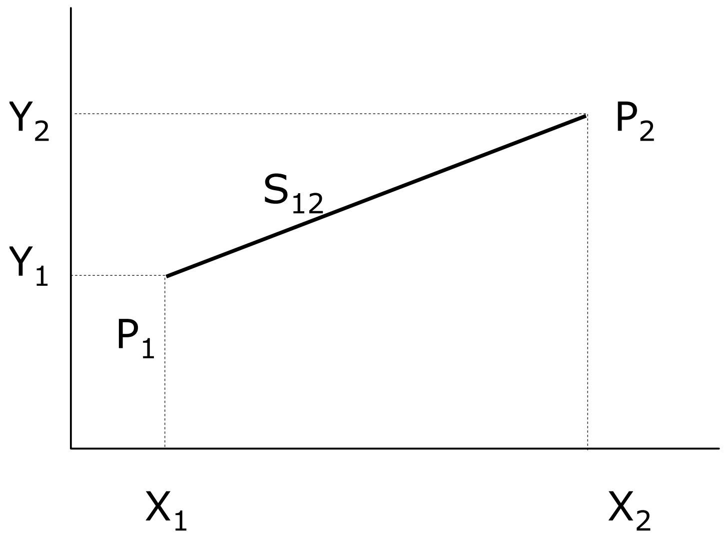
La ecuación es NO lineal : Debe linealizarse

La linealización se lleva a cabo a partir de unos valores aproximados de las coord. de P_1 y P_2 : $\boxed{(X_1^0, Y_1^0) ; (X_2^0, Y_2^0)}$

$$\hat{S}_{12} = S_{12}^0 + \left(\frac{\partial S}{\partial X_1}\right)_0 \Delta X_1 + \left(\frac{\partial S}{\partial Y_1}\right)_0 \Delta Y_1 + \left(\frac{\partial S}{\partial X_2}\right)_0 \Delta X_2 + \left(\frac{\partial S}{\partial Y_2}\right)_0 \Delta Y_2$$

– Siendo $S_{12}{}^0$ la distancia calculada con las coord. aproximadas

$$S_{12}^0 = \sqrt{\left(X_2^0 - X_1^0\right)^2 + \left(Y_2^0 - Y_1^0\right)^2}$$



Por otro lado sabemos que $\hat{S}_{12} = S_{12} + v_{S_{12}}$
siendo S_{12} el valor observado de la distancia
Entonces

$$\hat{S}_{12} = S_{12} + v_{S_{12}} = S_{12}^0 + \left(\frac{\partial S}{\partial X_1}\right)_0 \Delta X_1 + \left(\frac{\partial S}{\partial Y_1}\right)_0 \Delta Y_1 + \left(\frac{\partial S}{\partial X_2}\right)_0 \Delta X_2 + \left(\frac{\partial S}{\partial Y_2}\right)_0 \Delta Y_2$$

$$v_{S_{12}} = \left(\frac{\partial S}{\partial X_1}\right)_0 \Delta X_1 + \left(\frac{\partial S}{\partial Y_1}\right)_0 \Delta Y_1 + \left(\frac{\partial S}{\partial X_2}\right)_0 \Delta X_2 + \left(\frac{\partial S}{\partial Y_2}\right)_0 \Delta Y_2 - \left(S_{12} - S_{12}^0\right)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial X_1}\right)_0 = -\frac{X_2^0 - X_1^0}{S_{12}^0} \; ; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial Y_1}\right)_0 = -\frac{Y_2^0 - Y_1^0}{S_{12}^0}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial X_2}\right)_0 = \frac{X_2^0 - X_1^0}{S_{12}^0} \; ; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial Y_2}\right)_0 = \frac{Y_2^0 - Y_1^0}{S_{12}^0}$$

-Linealización de la ecuación de observación de distancia

En definitiva, la ecuación de observación en distancia, linealizada, es

$$v_{S_{12}} = -\frac{X_2^0 - X_1^0}{S_{12}^0}\Delta X_1 - \frac{Y_2^0 - Y_1^0}{S_{12}^0}\Delta Y_1 + \frac{X_2^0 - X_1^0}{S_{12}^0}\Delta X_2 + \frac{Y_2^0 - Y_1^0}{S_{12}^0}\Delta Y_2 - \left(S_{12} - S_{12}^0\right)$$

Si uno de los puntos fuera conocido (punto de control), por ejemplo P_1, sus coordenadas serían fijas y $\Delta X_1 = 0$; $\Delta Y_1 = 0$.

Así, la ecuación sería

$$v_{S_{12}} = \left(\frac{\partial S}{\partial X_2}\right)_0 \Delta X_2 + \left(\frac{\partial S}{\partial Y_2}\right)_0 \Delta Y_2 - \left(S_{12} - S_{12}^0\right) =$$

$$= \frac{X_2^0 - X_1^0}{S_{12}^0}\Delta X_2 + \frac{Y_2^0 - Y_1^0}{S_{12}^0}\Delta Y_2 - \left(S_{12} - S_{12}^0\right)$$

siendo

$$S_{12} = \sqrt{\left(X_2^0 - X_1\right)^2 + \left(Y_2^0 - Y_1\right)^2}$$

- En forma matricial la ecuación de observación de distancia, es

$$v = Ax - L$$

siendo

$$v = \left(v_{S_{12}}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{X_2^0 - X_1^0}{S_{12}^0} & -\dfrac{Y_2^0 - Y_1^0}{S_{12}^0} & \dfrac{X_2^0 - X_1^0}{S_{12}^0} & \dfrac{Y_2^0 - Y_1^0}{S_{12}^0} \end{pmatrix} \quad ; \quad x = \begin{pmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta Y_1 \\ \Delta X_2 \\ \Delta Y_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad L = \left(S_{12} - S_{12}^0\right)$$

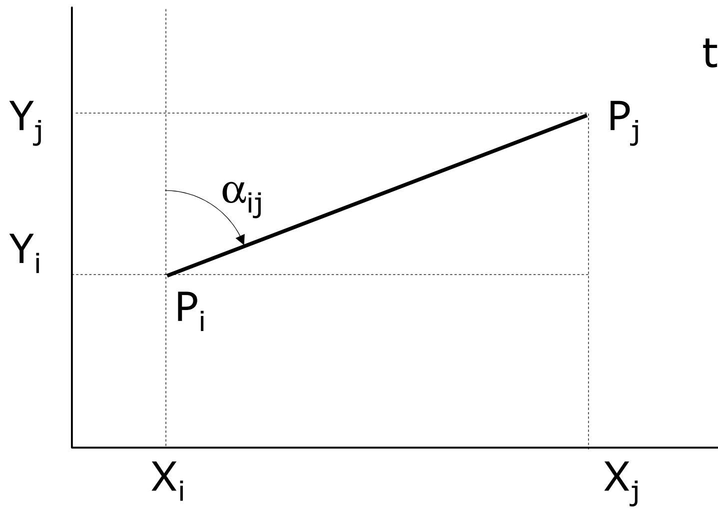
Es decir

$$\boxed{\left(v_{S_{12}}\right) = \begin{pmatrix} -\dfrac{X_2^0 - X_1^0}{S_{12}^0} & -\dfrac{Y_2^0 - Y_1^0}{S_{12}^0} & \dfrac{X_2^0 - X_1^0}{S_{12}^0} & \dfrac{Y_2^0 - Y_1^0}{S_{12}^0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta Y_1 \\ \Delta X_2 \\ \Delta Y_2 \end{pmatrix} - \left(S_{12} - S_{12}^0\right)}$$

- En resumen: <u>nº de ecs. de observación de distancia</u> = <u>nº de distancias observadas</u>

-Linealización de la ecuación de observación de Acimut

– El acimut de la dirección entre dos puntos P_i ,P_j viene dado por



$$\mathrm{tg}\,\hat{\alpha}_{ij} = \frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i} \quad \rightarrow \quad \hat{\alpha}_{ij} = \mathrm{arc\,tg}\frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i}$$

Se trata de determinar las coordenadas de P_i y P_j

La ecuación es NO lineal : Debe linealizarse

La linealización se lleva a cabo, como en el caso anterior, a partir de unos valores aproximados de las coord. de P_i y P_j :

$$(X_i^0, Y_i^0)\;;\;(X_j^0, Y_j^0)$$

$$\hat{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij}^0 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial X_i}\right)_0 \Delta X_i + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial Y_i}\right)_0 \Delta Y_i + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial X_j}\right)_0 \Delta X_j + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial Y_j}\right)_0 \Delta Y_j$$

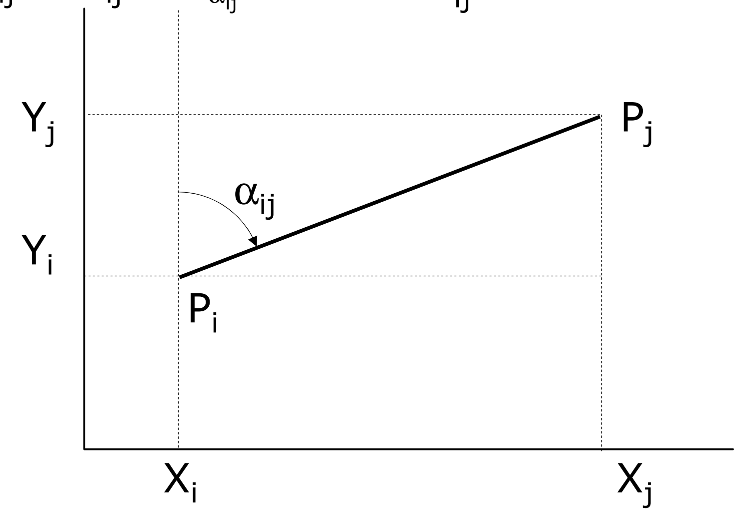
– Siendo $\alpha_{ij}{}^0$ el acimut calculado con las coord. aproximadas

$$\alpha_{ij}^0 = \mathrm{arc\,tg}\frac{X_j^0 - X_i^0}{Y_j^0 - Y_i^0}$$

-Linealización de la ecuación de observación de Acimut

$$\hat{\alpha}_{ij} = \operatorname{arc\,tg} \frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i}$$

– Sabemos que $\hat{\alpha}_{ij} = \hat{\alpha}_{ij} + v_{\alpha_{ij}}$ Siendo α_{ij} el acimut observado



$$\hat{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} + v_{\alpha_{ij}} = \alpha_{ij}^0 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial X_1}\right)_0 \Delta X_i + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial Y_1}\right)_0 \Delta Y_i + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial X_2}\right)_0 \Delta X_j + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial Y_2}\right)_0 \Delta Y_j$$

$$v_{\alpha_{ij}} = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial X_1}\right)_0 \Delta X_1 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial Y_1}\right)_0 \Delta Y_1 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial X_2}\right)_0 \Delta X_2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial Y_2}\right)_0 \Delta Y_2 - \left(\alpha_{ij} - \alpha_{ij}^0\right)$$

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial X_i}\right)_0 = -\frac{Y_j^0 - Y_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2} \; ; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial Y_i}\right)_0 = \frac{X_j^0 - X_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial X_j}\right)_0 = \frac{Y_j^0 - Y_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2} \; ; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial Y_j}\right)_0 = -\frac{X_j^0 - X_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2}$$

-Linealización de la ecuación de observación de Acimut

Así, la ecuación de observación de acimut, linealizada, es

$$v_{\alpha_{12}} = -\frac{Y_j^0 - Y_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2}\Delta X_i + \frac{X_j^0 - X_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2}\Delta Y_i + \frac{Y_j^0 - Y_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2}\Delta X_j - \frac{X_j^0 - X_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2}\Delta Y_j - \left(\alpha_{12} - \alpha_{12}^0\right)$$

Si uno de los puntos fuera conocido (punto de control), por ejemplo P_i, sus coordenadas serían fijas y $\Delta X_i = 0$; $\Delta Y_i = 0$.

Así, la ecuación sería

$$v_{\alpha_{12}} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial X_j}\right)\Delta X_j + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial Y_j}\right)\Delta Y_j - \left(\alpha_{12} - \alpha_{12}^0\right) =$$

$$= \frac{Y_j^0 - Y_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2}\Delta X_j - \frac{X_j^0 - X_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2}\Delta Y_j - \left(\alpha_{12} - \alpha_{12}^0\right)$$

siendo

$$\alpha_{12}^0 = \mathrm{arctg}\frac{X_j^0 - X_i}{Y_j^0 - Y_i}$$

-Linealización de la ecuación de observación de acimut

- En forma matricial la ecuación de observación de acimut, es

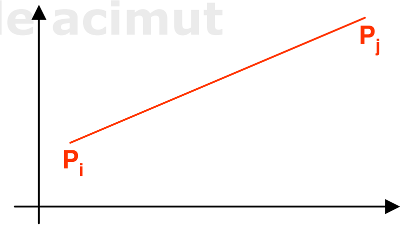
$$v = Ax - L$$
$$v = \left(v_{\alpha_{12}}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{Y_j^0 - Y_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2} & \dfrac{X_j^0 - X_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2} & \dfrac{Y_j^0 - Y_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2} & \dfrac{X_j^0 - X_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2} \end{pmatrix} \quad ; \quad x = \begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta X_j \\ \Delta Y_j \end{pmatrix} \quad ; \quad L = \left(\alpha_{12} - \alpha_{12}^0\right)$$

Es decir

$$\left(v_{\alpha_{12}}\right) = \begin{pmatrix} -\dfrac{Y_j^0 - Y_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2} & \dfrac{X_j^0 - X_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2} & \dfrac{Y_j^0 - Y_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2} & \dfrac{X_j^0 - X_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta X_j \\ \Delta Y_j \end{pmatrix} - \left(\alpha_{12} - \alpha_{12}^0\right)$$

- En resumen: <u>nº de ecs. de observación de acimut</u> = <u>nº de acimutes observados</u>
- <u>Comentario acerca de las unidades del vector de residuos</u>
- Podemos también plantear la ecuación de acimut de una manera más general, considerando que la dirección P_iP_j pueda estar en cada uno de los cuatro cuadrantes

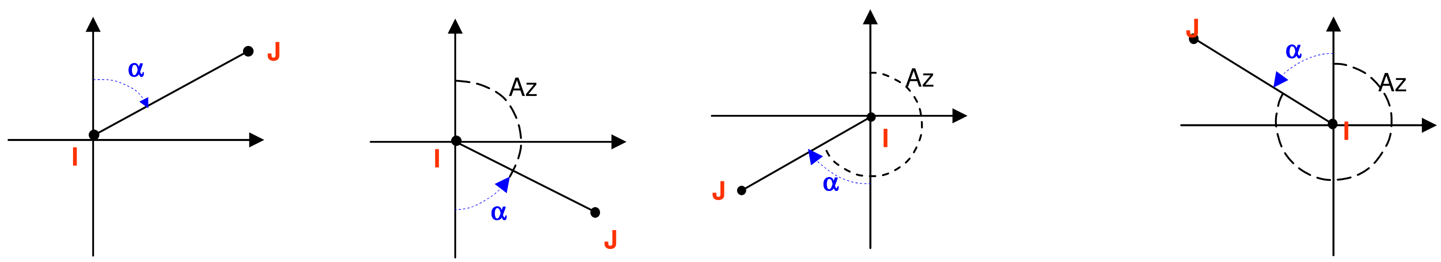


- La ecuación de acimut en forma paramétrica es Acimut = α + C

Donde

$$\alpha = arctg\left(\frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i}\right)$$

C es una constante angular que depende del cuadrante en el que está la dirección $P_i\, P_j$.

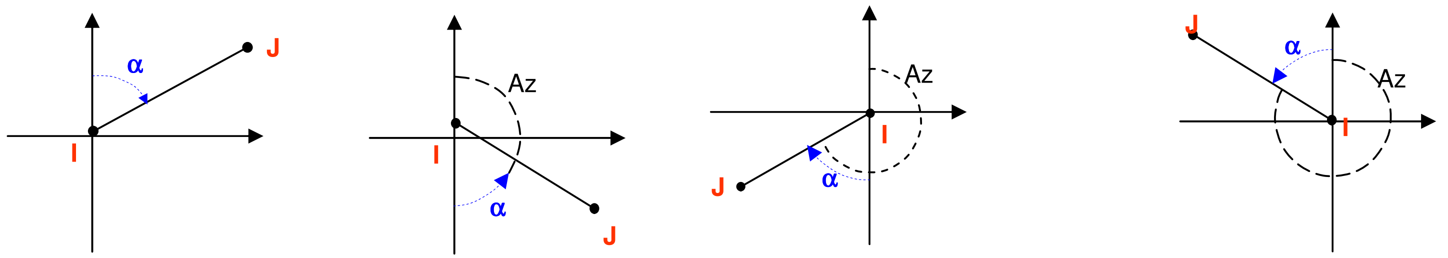


(*I*) : **C = 0º** (*II*) : **C = 180º** (*III*) : **C = 180º** (*IV*) : **C = 360º**

Cuadrante	Signo ($X_j - X_i$)	Signo ($Y_j - Y_i$)	Signo α	C	Acimut
I	+	+	+	0º	α
II	+	–	–	180º	α + 180º
III	–	–	+	180º	α + 180º
IV	–	+	–	360º	α + 360º

<u>Comentario</u>

- En el contexto de este estudio el valor angular α lleva consigo su signo, positivo si se considera en los cuadrantes I y III, y negativo en los cuadrantes II y IV.
- Este <u>signo de α</u> se corresponde con el <u>signo de su función tangente</u> y recíprocamente.



(*I*) : C = 0º (*II*) : C = 180º (*III*) : C = 180º (*IV*) : C = 360º

$$\alpha = tg^{-1}\left(\frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i}\right)$$

$$Az = \alpha + C$$

Cuadrante	Signo ($X_j - X_i$)	Signo ($Y_j - Y_i$)	Signo α	C	Acimut
I	+	+	+	0º	α
II	+	–	–	180º	α + 180º
III	–	–	+	180º	α + 180º
IV	–	+	–	360º	α + 360º

- Por ejemplo,
  - ⇨ si el signo de ($X_j - X_i$) es "más" y
  - ⇨ el de ($Y_j - Y_i$) es "menos",
  - ⇨ estaremos en el segundo cuadrante (***II***),
  - ⇨ su cociente $\frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i}$, (tgα) será negativo, y por ello
  - ⇨ el valor *arctg*$\left(\frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i}\right)$**,** (α) es también negativo
  - ⇨ En consecuencia el **Acimut** de la dirección **P_iP_j** tiene un valor comprendido entre 90º y 180º, ya que resulta de la <u>suma algebraica de 180</u> (valor de C) y <u>el valor</u> (negativo) <u>de α</u>

-Linealización de la ecuación de observación de acimut

- Basándonos en lo anterior, la ecuación completa para el acimut medido de la línea P_iP_j es

$$arctg\left(\frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i}\right) + C - \hat{A}_{zij} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\hat{A}_{z_{ij}} = arctg\left(\frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i}\right) + C} \qquad (*)$$

- Esta ecuación es una función no lineal y debe linealizarse **:**

- Veamos la **<u>LINEALIZACIÓN</u> de (*)** por medio de su desarrollo en serie de Taylor hasta el primer orden de aproximación.
  - <u>Matriz A</u>: Sabemos que la matriz de coeficientes de los parámetros es

$$A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial X}\right)_0 = \left(\frac{\partial A_z}{\partial X_i} \quad \frac{\partial A_z}{\partial Y_i} \quad \frac{\partial A_z}{\partial X_j} \quad \frac{\partial A_z}{\partial Y_j}\right)_0$$

  - Calculamos estas derivadas parciales

$$F(X,L) = arctg\left(\frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i}\right) + C - Az_{ij} =$$

$$\frac{\partial F}{\partial X_i} = \frac{\partial}{\partial X_i}\underbrace{\left(arctg\underbrace{\left[\frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i}\right]}_{y}\right)}_{\alpha}$$

- Considerando la expresión anterior, se tiene, en general que si

α = **arctg** (y) $\rightarrow$ y = **tg** α $\rightarrow$ $\rightarrow$ $y' = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\alpha'$ $\rightarrow\rightarrow$ $\alpha' = \cos^2\alpha \cdot y'$

- Aplicamos aquí esta regla de derivación

$$\frac{\partial A_z}{\partial X_i} \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial X_i} = \cos^2\alpha \cdot \frac{\partial y}{\partial X_i} = \frac{(Y_j - Y_i)^2}{S_{ij}^{\;2}} \frac{-1}{Y_j - Y_i} = \frac{-(Y_j - Y_i)}{S_{ij}^{\;2}} = \frac{Y_i - Y_j}{S_{ij}^{\;2}}$$

- De forma análoga se obtienen las demás derivadas

$$\boxed{\frac{\partial A_z}{\partial Y_i} = \frac{X_j - X_i}{S_{ij}^{\;2}}} \quad \boxed{\frac{\partial A_z}{\partial X_j} = \frac{Y_j - Y_i}{S_{ij}^{\;2}}} \quad \boxed{\frac{\partial A_z}{\partial Y_j} = \frac{X_i - X_j}{D_{ij}^{\;2}}}$$

- En definitiva,

$$A = \left(-\frac{Y_j^0 - Y_i^0}{(S_{ij}^0)^2} \quad \frac{X_j^0 - X_i^0}{(S_{ij}^0)^2} \quad \frac{Y_j^0 - Y_i^0}{(S_{ij}^0)^2} \quad -\frac{X_j^0 - X_i^0}{(S_{ij}^0)^2} \right)$$

- **En consecuencia: La relación de observación de acimut linealizada adopta aquí la forma**

$$\hat{A}_{Zij} = Az_{ij} + v_{Az_{ij}} = +Az_{ij}^{0} - \frac{Y_j^0 - Y_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2}\Delta X_i + \frac{X_j^0 - X_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2}\Delta Y_i + \frac{Y_j^0 - Y_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2}\Delta X_j - \frac{X_j^0 - X_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2}\Delta Y_j$$

$$v_{Az_{ij}} = -\frac{Y_j^0 - Y_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2}\Delta X_i + \frac{X_j^0 - X_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2}\Delta Y_i + \frac{Y_j^0 - Y_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2}\Delta X_j - \frac{X_j^0 - X_i^0}{\left(S_{ij}^0\right)^2}\Delta Y_j - (Az_{ij} - Az_{ij}^0)$$

- En forma matricial

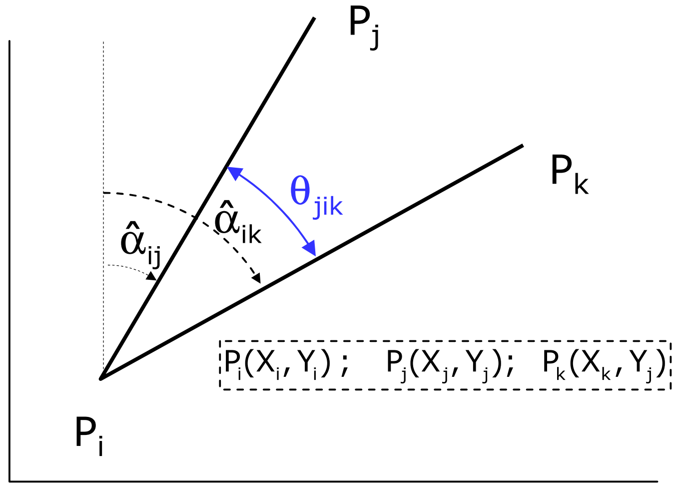
$$v_{Az_{ij}} = \begin{pmatrix} \frac{-\left(Y_j^0 - Y_i^0\right)}{\left(S_{ij}^0\right)^2} & \frac{\left(X_j^0 - X_i^0\right)}{\left(S_{ij}^0\right)^2} & \frac{\left(Y_j^0 - Y_i^0\right)}{\left(S_{ij}^0\right)^2} & \frac{-\left(X_j^0 - X_i^0\right)}{\left(S_{ij}^0\right)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta X_j \\ \Delta Y_j \end{pmatrix} - \left(Az_{ij} - Az_{ij}^0\right)$$

- Comentario acerca de las unidades del vector de residuos

- Observación-recordatorio:
  - **Az_{ij}^{0}** es el acimut calculado con las coordenadas aproximadas
  - **Az_{ij}** es el acimut observado.

-Linealización de la ecuación de observación de Ángulo

En la figura $\hat{\theta}_{jik}$ es el ángulo horizontal ajustado definido por los puntos P_i , P_j, P_k



$$\hat{\theta}_{jik} = \hat{\alpha}_{ik} - \hat{\alpha}_{ij}$$

Ecuación del ángulo

$$\boxed{\hat{\theta}_{jik} = \operatorname{arc\,tg}\frac{X_k - X_i}{Y_k - Y_i} - \operatorname{arc\,tg}\frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i}}$$

Al igual que en los casos anteriores, es necesario linealizar

$$\hat{\theta}_{kij} = \theta^0_{kij} + \left(\frac{\partial\theta}{\partial X_i}\right)_0 \Delta X_i + \left(\frac{\partial\theta}{\partial Y_i}\right)_0 \Delta Y_i + \left(\frac{\partial\theta}{\partial X_j}\right)_0 \Delta X_j + \left(\frac{\partial\theta}{\partial Y_j}\right)_0 \Delta Y_j + \left(\frac{\partial\theta}{\partial X_k}\right)_0 \Delta X_k + \left(\frac{\partial\theta}{\partial Y_k}\right)_0 \Delta Y_k$$

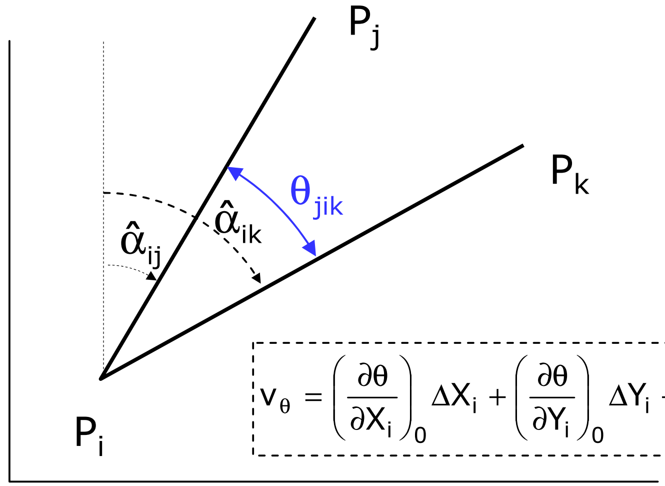
$$\hat{\theta}_{jik} = \theta_{jik} + v_\theta$$

$$\theta_{jik} + v_\theta = \theta^0_{kij} + \left(\frac{\partial\theta}{\partial X_i}\right)_0 \Delta X_i + \left(\frac{\partial\theta}{\partial Y_i}\right)_0 \Delta Y_i + \left(\frac{\partial\theta}{\partial X_j}\right)_0 \Delta X_j + \left(\frac{\partial\theta}{\partial Y_j}\right)_0 \Delta Y_j + \left(\frac{\partial\theta}{\partial X_k}\right)_0 \Delta X_k + \left(\frac{\partial\theta}{\partial Y_k}\right)_0 \Delta Y_k$$

$$\Downarrow$$

$$v_\theta = \left(\frac{\partial\theta}{\partial X_i}\right)_0 \Delta X_i + \left(\frac{\partial\theta}{\partial Y_i}\right)_0 \Delta Y_i + \left(\frac{\partial\theta}{\partial X_j}\right)_0 \Delta X_j + \left(\frac{\partial\theta}{\partial Y_j}\right)_0 \Delta Y_j + \left(\frac{\partial\theta}{\partial X_k}\right)_0 \Delta X_k + \left(\frac{\partial\theta}{\partial Y_k}\right)_0 \Delta Y_k - \left(\theta_{jik} - \theta^0_{kij}\right)$$

-Linealización de la ecuación de observación de Ángulo



$$\hat{\theta}_{jik} = \hat{\alpha}_{ik} - \hat{\alpha}_{ij}$$

$$\boxed{\hat{\theta}_{jik} = \operatorname{arc\,tg}\frac{X_k - X_i}{Y_k - Y_i} - \operatorname{arc\,tg}\frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i}}$$

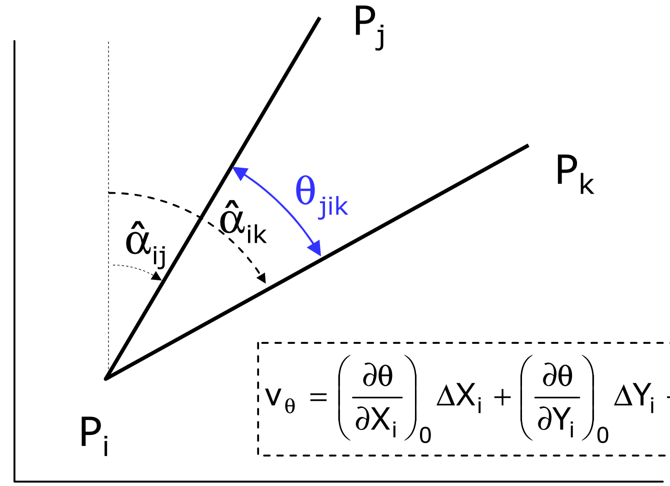
$$\boxed{v_\theta = \left(\frac{\partial\theta}{\partial X_i}\right)_0 \Delta X_i + \left(\frac{\partial\theta}{\partial Y_i}\right)_0 \Delta Y_i + \left(\frac{\partial\theta}{\partial X_j}\right)_0 \Delta X_j + \left(\frac{\partial\theta}{\partial Y_j}\right)_0 \Delta Y_j + \left(\frac{\partial\theta}{\partial X_k}\right)_0 \Delta X_k + \left(\frac{\partial\theta}{\partial Y_k}\right)_0 \Delta Y_k - \left(\theta_{jik} - \theta^0_{jik}\right)}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial X_i} = -\frac{Y_k^0 - Y_i^0}{\left(d_{ik}^0\right)^2} + \frac{Y_j^0 - Y_i^0}{\left(d_{ij}^0\right)^2} \quad ; \quad \frac{\partial\theta}{\partial Y_i} = \frac{X_k^0 - X_i^0}{\left(d_{ik}^0\right)^2} - \frac{X_j^0 - X_i^0}{\left(d_{ij}^0\right)^2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial X_j} = -\frac{Y_j^0 - Y_i^0}{\left(d_{ij}^0\right)^2} \quad ; \quad \frac{\partial\theta}{\partial Y_j} = \frac{X_j^0 - X_i^0}{\left(d_{ij}^0\right)^2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial X_k} = \frac{Y_k^0 - Y_i^0}{\left(d_{ik}^0\right)^2} \quad ; \quad \frac{\partial\theta}{\partial Y_k} = -\frac{X_k^0 - X_i^0}{\left(d_{ik}^0\right)^2}$$

-Linealización de la ecuación de observación de Ángulo



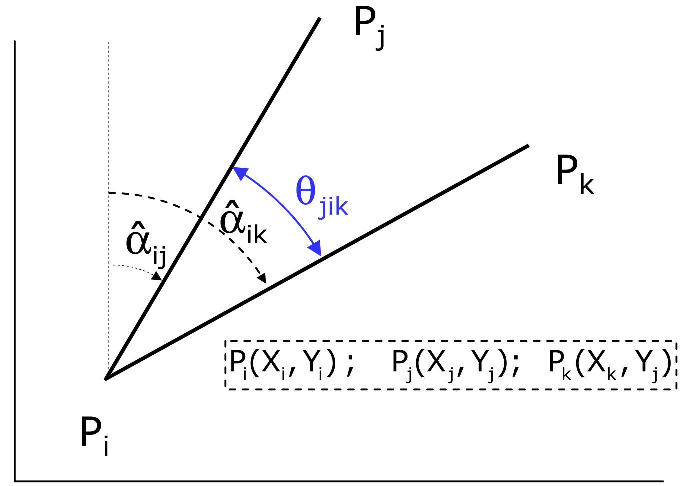
$$\hat{\theta}_{jik} = \hat{\alpha}_{ik} - \hat{\alpha}_{ij}$$

$$\boxed{\hat{\theta}_{jik} = \operatorname{arc\,tg}\frac{X_k - X_i}{Y_k - Y_i} - \operatorname{arc\,tg}\frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i}}$$

$$\boxed{v_\theta = \left(\frac{\partial\theta}{\partial X_i}\right)_0 \Delta X_i + \left(\frac{\partial\theta}{\partial Y_i}\right)_0 \Delta Y_i + \left(\frac{\partial\theta}{\partial X_j}\right)_0 \Delta X_j + \left(\frac{\partial\theta}{\partial Y_j}\right)_0 \Delta Y_j + \left(\frac{\partial\theta}{\partial X_k}\right)_0 \Delta X_k + \left(\frac{\partial\theta}{\partial Y_k}\right)_0 \Delta Y_k - \left(\theta_{jik} - \theta^0_{jik}\right)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_\theta = {} & \left(-\frac{Y^0_k - Y^0_i}{\left(d^0_{ik}\right)^2} + \frac{Y^0_j - Y^0_i}{\left(d^0_{ij}\right)^2}\right)\Delta X_i + \left(\frac{X^0_k - X^0_i}{\left(d^0_{ik}\right)^2} - \frac{X^0_j - X^0_i}{\left(d^0_{ij}\right)^2}\right)\Delta Y_i + \left(-\frac{Y^0_j - Y^0_i}{\left(d^0_{ij}\right)^2}\right)\Delta X_j + \frac{X^0_j - X^0_i}{\left(d^0_{ij}\right)^2}\Delta Y_j + \\ & + \left(\frac{Y^0_k - Y^0_i}{\left(d^0_{ik}\right)^2}\right)\Delta X_k + \left(-\frac{X^0_k - X^0_i}{\left(d^0_{ik}\right)^2}\right)\Delta Y_k - \left(\theta_{jik} - \theta^0_{jik}\right)\end{aligned}}$$

-Linealización de la ecuación de observación de Ángulo



$$\hat{\theta}_{jik} = \hat{\alpha}_{ik} - \hat{\alpha}_{ij}$$

$$\boxed{\hat{\theta}_{jik} = \operatorname{arc\,tg}\frac{X_k - X_i}{Y_k - Y_i} - \operatorname{arc\,tg}\frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i}}$$

En forma matricial

$$\boxed{v_\theta = \left(-\frac{Y_k^0 - Y_i^0}{\left(d_{ik}^0\right)^2} + \frac{Y_j^0 - Y_i^0}{\left(d_{ij}^0\right)^2} \quad \frac{X_k^0 - X_i^0}{\left(d_{ik}^0\right)^2} - \frac{X_j^0 - X_i^0}{\left(d_{ij}^0\right)^2} \quad -\frac{Y_j^0 - Y_i^0}{\left(d_{ij}^0\right)^2} \quad \frac{X_j^0 - X_i^0}{\left(d_{ij}^0\right)^2} \quad \frac{Y_k^0 - Y_i^0}{\left(d_{ik}^0\right)^2} \quad -\frac{X_k^0 - X_i^0}{\left(d_{ik}^0\right)^2} \right) \begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta X_j \\ \Delta Y_j \\ \Delta X_k \\ \Delta Y_k \end{pmatrix} - \left(\theta_{jik} - \theta_{jik}^0\right)}$$

fbarbato@fing.edu.uy
agosto 2024