Ejercicio 24. (Examen febrero 2009) ¿Cuántos vértices tiene un árbol con 16 vértices de grado 1, 20 vértices de grado 2 y el resto de grado 4?

Ejercicio 25. (Examen 2003) Halle el máximo número de aristas que se le puede quitar a K_6 sin que el grafo deje de ser conexo.

Ejercicio 26. (Parcial 2001) Sea G un grafo acíclico, con n vértices y k componentes conexas. Hallar cuantas aristas tienen G.

Ejercicio 27. (Examen febrero 2010) Dados $k \geq 2$, $v \geq 3$ y un grafo G, k-regular con v vértices diga cuáles de las siguientes es condición suficiente para que G tenga un ciclo Hamiltoniano.
a) $2k \geq v$; b) $k \leq v$; c) $2k < v$; d) $2k \neq v$

<u>Ejercicio 24</u>:

$\sum_{v \in V} gr(v) = 2|E|$ ← siempre

$|V| = |E| + 1$ ← árbol.

$$\Rightarrow \sum_{v \in V} gr(v) = 2(|V| - 1)$$

$|V| = \underbrace{16}_{\text{grado } 1} + \underbrace{20}_{\text{grado } 2} + \underbrace{r}_{\text{grado } 4} = 36 + r$

$56 + r$

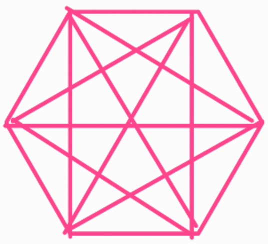
$$\Rightarrow \sum_{v \in V} gr(v) = 16 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + r \cdot 4$$

$$= 2(36 + r - 1)$$

$$= 70 + 2r$$

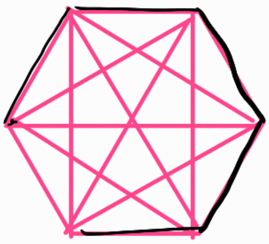
Luego $56 + 4r = 70 + 2r \Rightarrow 2r = 14$, $r = 7$ $\Rightarrow \underline{|V| = 43}$

Ejercicio 25. (Examen 2003) Halle el máximo número de aristas que se le puede quitar a K_6 sin que el grafo deje de ser conexo.

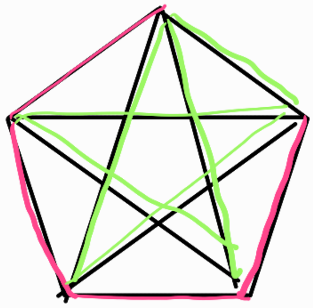


El grafo conexo más $\underbrace{\text{pequeño}}_{\#\text{ aristas}}$ con todos los vértices de K_6 es un árbol recubridor de K_6.

Un árbol recubridor de K_6 tiene $e = 6 - 1 = 5$ aristas $\Rightarrow$ puedo quitar hasta $15 - 5 = 10$ aristas



$5-4=1$

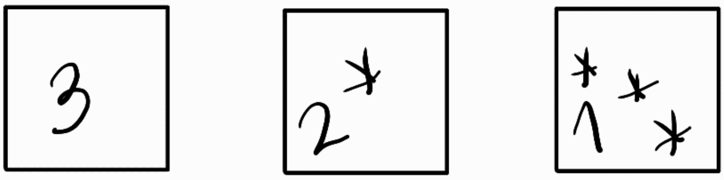


$10-4=6$

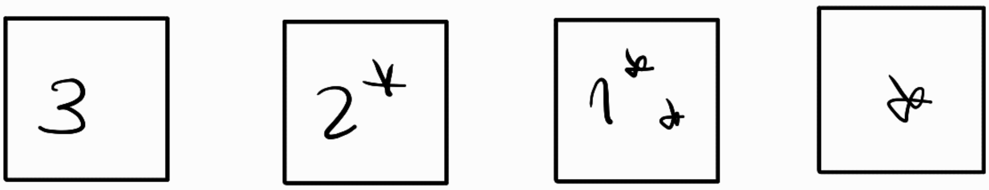
Múltiple Opción 5

¿Cuántas relaciones de equivalencia existen sobre $\{1,\ldots,7\}$ tales que $|[1]| > |[2]| > |[3]|$?
A) 15; B) 16; C) 17; D) 18.

Solo hay 2 opciones:



$1 \cdot 4 \cdot 1$

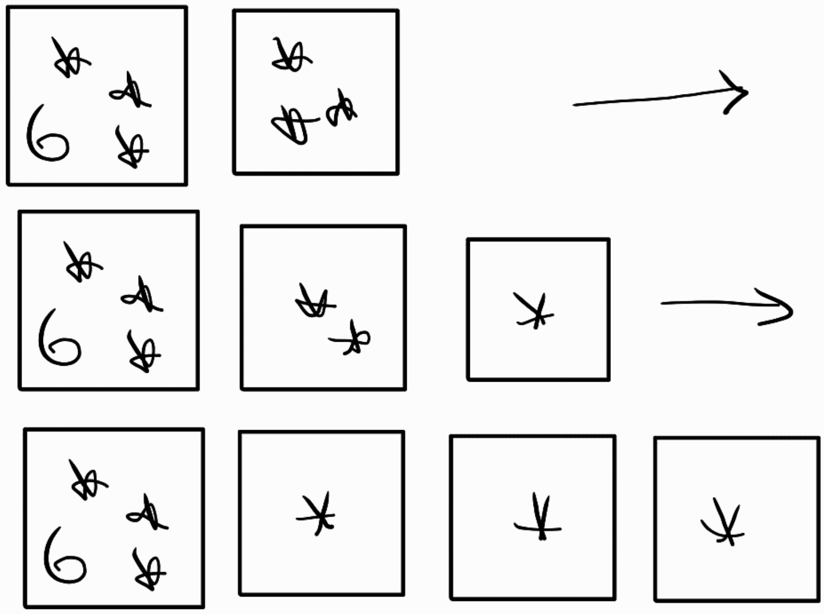


$1 \cdot 4 \cdot C_2^3 = 3 \cdot 1$

$\Rightarrow$ En total hay $4 + 4 \cdot 3 = 16$ relaciones de equivalencia.

¿Cuántas rel. de eq. hay sobre $A = \{1, \ldots, 7\}$ con $|[6]| = 4$?

Queremos contar las particiones de A / 6 está en un subconjunto de 4 elem.



$\to C^6_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$

$\to C^6_3 \cdot C^3_2 = 20 \cdot 3 = 60$

$\to C^6_3 = 20$

En total hay $20 + 60 + 20 = 100$ rel. de eq.

Sea G un grafo autocomplementario con al menos 12 vértices

a) ~~G plano y conexo~~

b) ~~G plano pero no conexo~~

c) G conexo pero no plano ✓

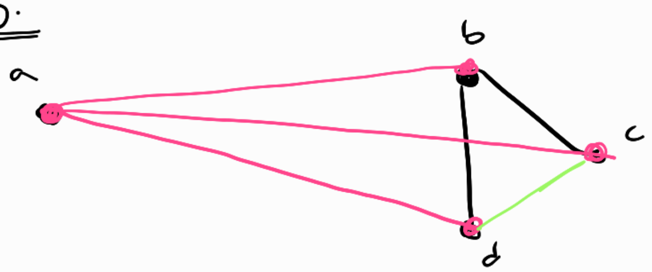
d) ~~no plano ni conexo~~

Múltiple Opción 5

Veamos primero que todo grafo simple G no conexo cumple que $\overline{G}$ sí es conexo. De hecho, si G no es conexo y tomamos una componente conexa de G, digamos G_1, resulta que el grafo complemento $\overline{G}$ tiene como subgrafo al grafo bipartito completo que une a cada vértice de G_1 con cada vértice de $G - G_1$. Como $\overline{G}$ tiene un subgrafo conexo recubridor, entonces es conexo.

Sea ahora G un grafo simple autocomplementario con $n \geq 12$ vértices y m aristas. Notemos que G es necesariamente conexo, puesto que si G no fuese conexo tendríamos que $\overline{G}$ sí lo es, contradiciendo el hecho que G es isomorfo a su complemento. Como es autocomplementario, tiene la mitad de aristas que el grafo completo K_n, por lo que $m = n(n-1)/4$. Usando que $n \geq 12$ se consigue que $m \geq 12(n-1)/4 = 3(n-1)$. Pero recordemos que los grafos planos y conexos con al menos 3 vértices deben verificar que $m \leq 3n - 6$, por lo que G no puede ser plano. Luego, el grafo G es conexo pero no es plano, y la opción correcta es la C.

Ejemplo:



$K_{1,3} \subseteq \overline{G}$ es recubridor

$\Rightarrow \overline{G}$ es conexo

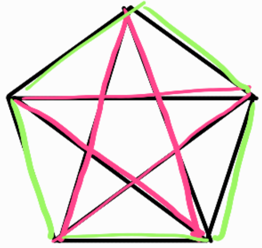
Si $G \cong \tilde{G} \Rightarrow$ no puede ser G disconexo, sino

$G \cong \tilde{G}$ ✗

disconexo conexo

Si G es plano $\rightarrow$ $\boxed{e \leq 3v - 6}$

Si G es autocomplementario, como



$2|E| = \#$ Aristas grafo completo

$= \frac{n(n-1)}{2}$

$\Rightarrow |E| = \frac{|V|(|V|-1)}{4}$ si $G \cong \overline{G}$

$\geq \frac{12(|V|-1)}{4} \geq 3(|V|-1)$

$> 3|V| - 6$

$\rightarrow$ no es plano.

$\Rightarrow$ # Aristas G + # Aristas $\overline{G}$

$=$

Aristas del grafo completo $= \frac{n(n-1)}{2}$