Ejercicio 11. Demostrar que $\chi(G) \leq 2$ si y sólo si G no tiene ciclos impares.

Si $\chi(G) \leq 2 \Rightarrow$ Bipartito

no tiene ciclos impares, pues $\chi(C_n) = 3$ n impar.

Si G no tiene ciclos impares.

Inducción en e.

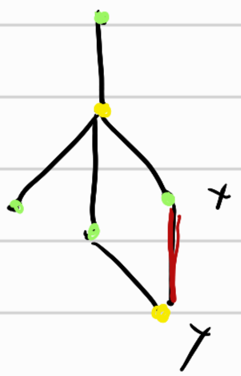
$e = 0$ $\quad \chi(G) = 1 \leq 2$

H.I. Si G con $e \leq m$ no tiene ciclos impares $\Rightarrow$ puedo colorear G con 2 colores o menos.

T.I. Si G con $e = m+1$ no tiene ciclos impares $\Rightarrow$ puedo colorear G con 2 colores o menos.

Idea de la prueba:

2



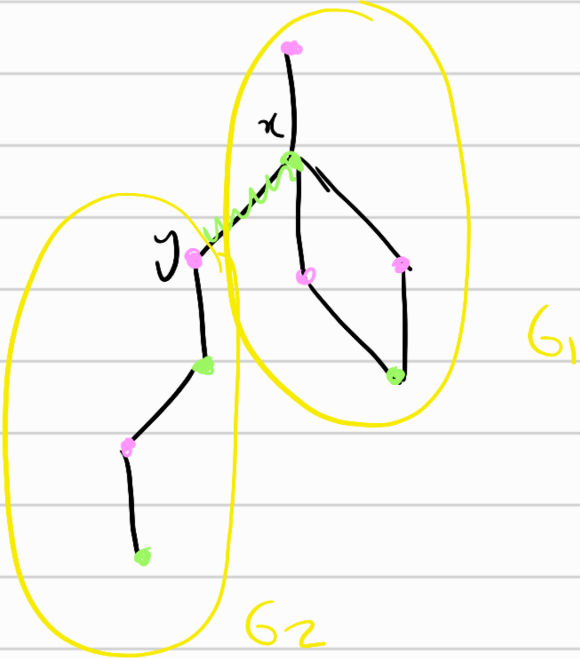
1

Sacamos una arista $\{x,y\} \Rightarrow$ pueden pasar 2 cosas

1 » Desconecté el grafo

2 » No desconecté el grafo $\Rightarrow$ hay un cmo de x a y.

1 . $G = G_1 \cup G_2$ $\quad x \in G_1$ $\quad y \in G_2$ $\quad G_1 \cap G_2 = \emptyset$

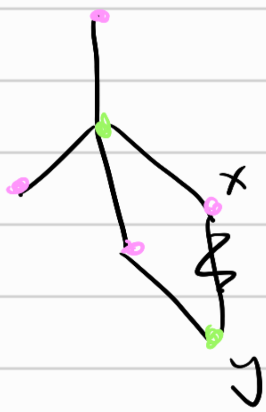


Por H.I.

$\Rightarrow$ Coloreo a G_1 con rosa y verde

$\Rightarrow$ Coloreo a G_2 con rosa y verde con el cuidado de que color $x \neq$ color y.

2. $G_1 = G - \{x,y\}$ puede colorearse con 2 colores o menos por H.I.



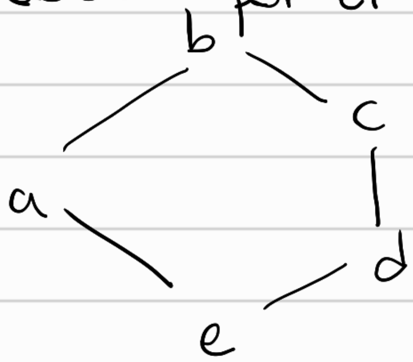
un camino de x a y en G_1 tiene largo impar (sino G tiene ciclo par)

$\Rightarrow$ color $x \neq$ color y.

$\Rightarrow$ la coloración de G_1 es col. propia de G.

$A = \{a, b, c, d, e\}$

R el orden dado por el diagrama de Hasse



e mínimo
$a \leq b$
$d \leq c$
$c \leq b$

Un orden lineal $\leqslant$ sobre A que incluya a R es:

A) $\cancel{e \leq a \leq b \leq c \leq d}$ $\quad c \nleq b$ X

B) $\cancel{e \leq d \leq c \leq b \leq a}$ $\quad a \nleq b$

C) $e \leq d \leq c \leq a \leq b$ ✓

D) $\cancel{e \leq c \leq a \leq d \leq b}$ $\quad d \nleq c$