Ejercicio 12. Sea $G = (V, E)$ un grafo y $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} gr(v)$.

(a) Demostrar que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

(b) Dar un ejemplo de grafo que cumpla la igualdad.

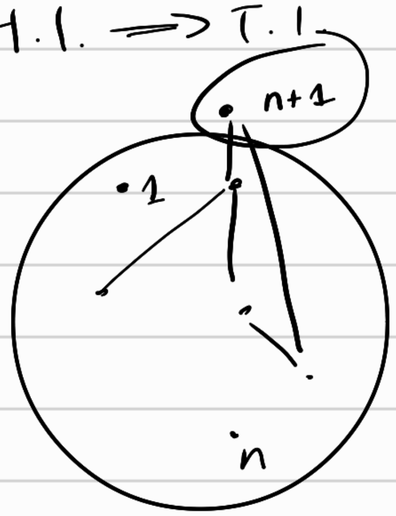
(a) Hay que ver que podemos colorear al grafo con n colores $n \leq \Delta(G) + 1$.

Inducción en $|V|$: P.B.: $n = 1$ ✓

P.I.: H.I.: Puedo colorear un grafo con n vértices con $\Delta(G) + 1$ colores o menos

H.I.: Puedo colorear un grafo con $n+1$ vértices con $\Delta(G) + 1$ colores o menos

H.I. $\Rightarrow$ T.I.

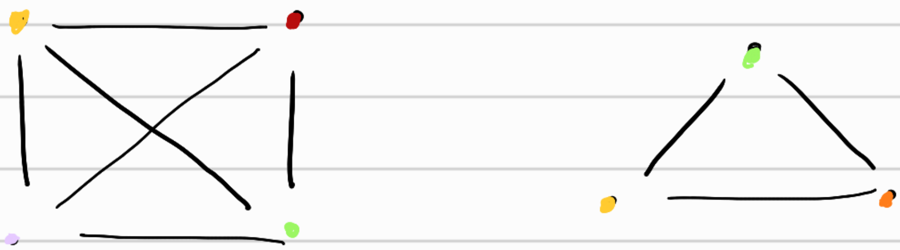


Obs: $\Delta(G-u) \leq \Delta(G)$.

Sea u un vértice cualquiera $\Rightarrow$ $G-u$ es un grafo que puedo colorear con $\Delta(G-u)+1$ colores o menos $\Rightarrow$ lo puedo colorear con $\Delta(G)+1$ colores o menos.

$\Rightarrow$ el vértice u es adyacente a lo más a $\Delta(G)$ vértices $\Rightarrow$ si tengo $\Delta(G)+1$ colores tengo al menos un color disponible para colorearlo.

(b)



Ejercicio 8. Encotrar el número cromático de los siguientes grafos.

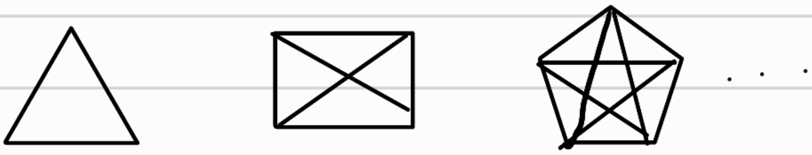
$\chi(G)=3$ $\quad$ $\chi(G)=2$ $\quad$ $\chi(G)=2$ $\quad$ $\chi(G)=2$ $\quad$ $\chi(G)=2$

↓

No podemos colorear con 2 colores pq hay un Δ.

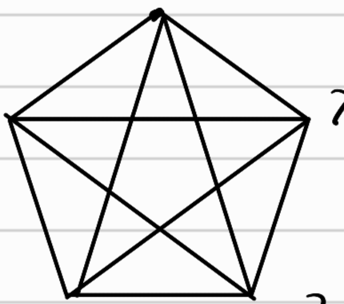
Ejercicio 9. Hallar el polinomio cromático de C_n, K_n, P_n, $K_{2,n}$ y K_5 menos una arista. Deducir el número cromático de cada grafo y la cantidad de coloraciones usando 5 colores o menos.

K_n



3 $\quad$ 4 $\quad$ 5

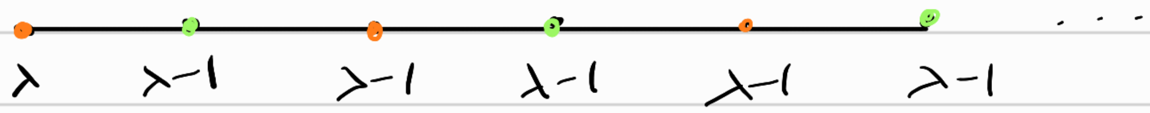
$\chi(K_n)=n$



$$P_G(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+1)$$

$$\chi_G(\lambda)=n$$

$P_n \;, \chi(P_n) = 2$



$$P_{P_n} = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$$

C_n :

$$p_G(\lambda) = P_{G+\{u,v\}}(\lambda) + P_{G_{u=v}}(\lambda).$$

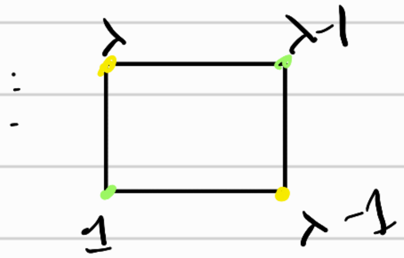
$$P_{G-e}(\lambda) = P_G(\lambda) - P_{G_{u=v}}(\lambda)$$

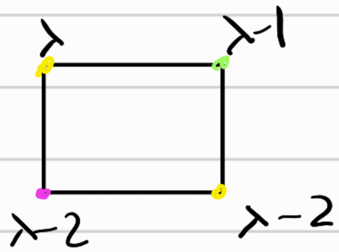
$$P_G(\lambda) = P_{G-e} - P_{G_{u=v}}..$$

$$P_{C_3} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$P_{C_4} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

:





$$P_{C_n} = P_{P_n} - P_{C_{n-1}}$$

$$P_{C_3}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = (\lambda-1)^3 - (\lambda-1)$$

$$P_{C_4}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-1) + \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = (\lambda-1)^4 + (\lambda-1)$$

$$P_{C_5}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^4 - (\lambda-1)^4 - (\lambda-1)$$

$$= (\lambda-1)^4(\lambda-1) - (\lambda-1)$$

$$= (\lambda-1)^5 - (\lambda-1)$$

⋮

$$¿\, P_{C_n}(\lambda) = (\lambda-1)^n + (-1)^n(\lambda-1)\,?$$

Prop: $P_{C_n}(\lambda) = (\lambda-1)^n + (-1)^n(\lambda-1) \quad \forall n \geq 3$

dem: Por inducción.

P.B: $n=3$ ✓

H.I: $P_{C_k}(\lambda) = (\lambda-1)^k + (-1)^k(\lambda-1)$

$\Downarrow$

T.I: $P_{C_{k+1}}(\lambda) = (\lambda-1)^{k+1} + (-1)^{k+1}(\lambda-1)$

Sabemos que $P_{C_{k+1}} = P_{P_{k+1}} - P_{C_k}$

Por inducción $P_{C_k} = (\lambda-1)^k + (-1)^k(\lambda-1)$

$\Rightarrow P_{C_{k+1}} = \lambda(\lambda-1)^k - (\lambda-1)^k - (-1)^k(\lambda-1)$

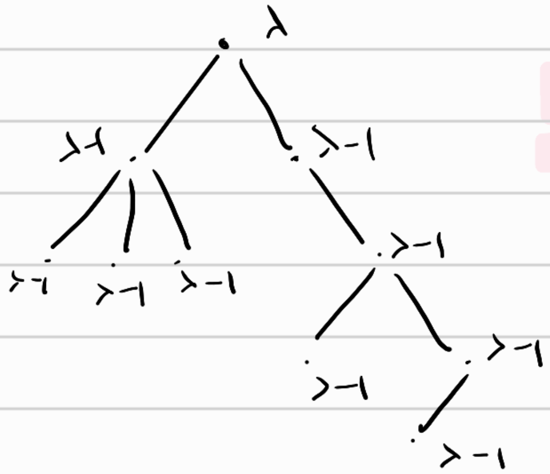
$= (\lambda-1)^k(\lambda-1) - (-1)^k(\lambda-1)$

$= (\lambda-1)^{k+1} + (-1)^{k+1}(\lambda-1)$.

$\chi(C_n) = ¿?$ $\longrightarrow$ PROX. CLASE

Ejercicio 10:

T_n árbol con n vértices: ¿cuál es su pol. car?



Afirmación: $P_a(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$

Idea de la prueba: por I.C.

Si sacamos una hoja de un árbol de $n+1$ vértices nos queda un árbol de n vértices.

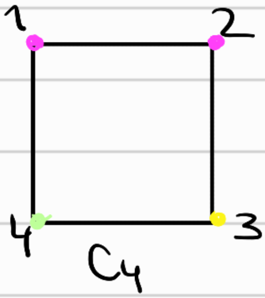
PROX. CLASE: CONSULTAS!

↓ RESUMEN DE COLORACIÓN

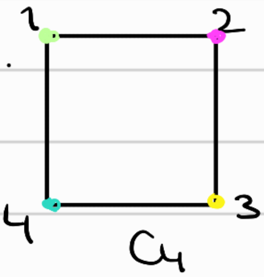
COLORACIÓN

Def (coloración propia): es una función $c: V \longrightarrow C$ (C cjto. finito de "colores") que verifica: $\{v,w\}\in E \Rightarrow c(v)\neq c(w)$.

Ejemplo: A.



B.

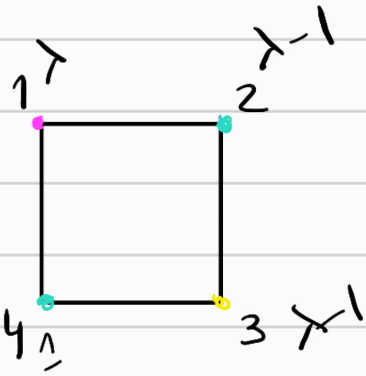


La función que manda cada vértice a su color es una coloración en el ejemplo B pero no en A.

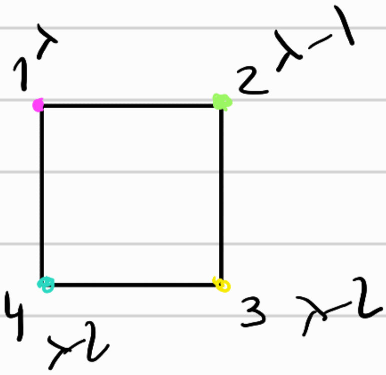
Def (polinomio cromático): G grafo $\Rightarrow$

$$P_G(\lambda) := \#\{c : \text{coloración propia de } G \text{ usando } \lambda \text{ colores o menos}\}$$

Ejemplo: Sea $\lambda > 2$: para colorear C_4 tengo



o



Hay λ colores para colorear 1 y $\lambda-1$ para colorear 2 y 4.

- Si coloreamos 2 y 4 del mismo color $\Rightarrow$ hay $\lambda-1$ colores para 3.
- Si coloreamos 2 y 3 de distinto color $\Rightarrow$ hay $\lambda-2$ colores para 3

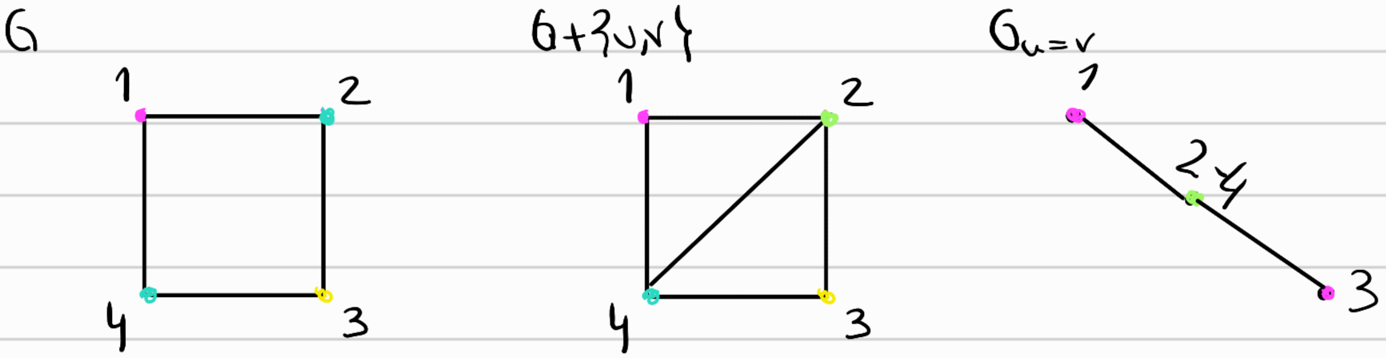
$\Rightarrow$ Por la regla de la suma

$$P_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-1) + \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-2) = \lambda(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+3)$$

Observación: calcular $p_G(\lambda)$ usando la regla de la suma y distinguiendo:

u y v vértices con distinto color
u y v vértices con el mismo color

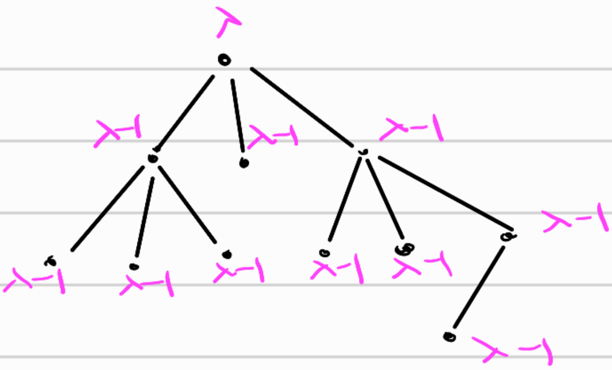
es lo mismo que calcular el polinomio cromático del grafo G agregando $\{u,v\}$ y sumarle el del grafo G identificando u con v (contracción)



entonces $$p_G(\lambda) = P_{G+\{u,v\}}(\lambda) + P_{G_{u=v}}(\lambda).$$

$$P_{G-e}(\lambda) = P_G(\lambda) - P_{G_{u=v}}(\lambda)$$

Proposición: Si T es un árbol con n nodos $\Rightarrow p_T(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$



Teorema: Si $G = G_1 \cup G_2$ donde $G_1 \cap G_2 = K_n \Rightarrow$

$$p_G(\lambda) = \frac{p_{G_1}(\lambda)\, p_{G_2}(\lambda)}{P_{K_n}(\lambda)}$$

Definición (número cromático): $\chi(G) = \min\{\lambda \in \mathbb{N}^* : p_G(\lambda) \neq 0\}$