Obs: Por el ejercicio 6 si G es plano

$\Rightarrow$ $e \leq 3v - 6$

- si K_5 no cumple $e \leq 3v - 6$ no es plano

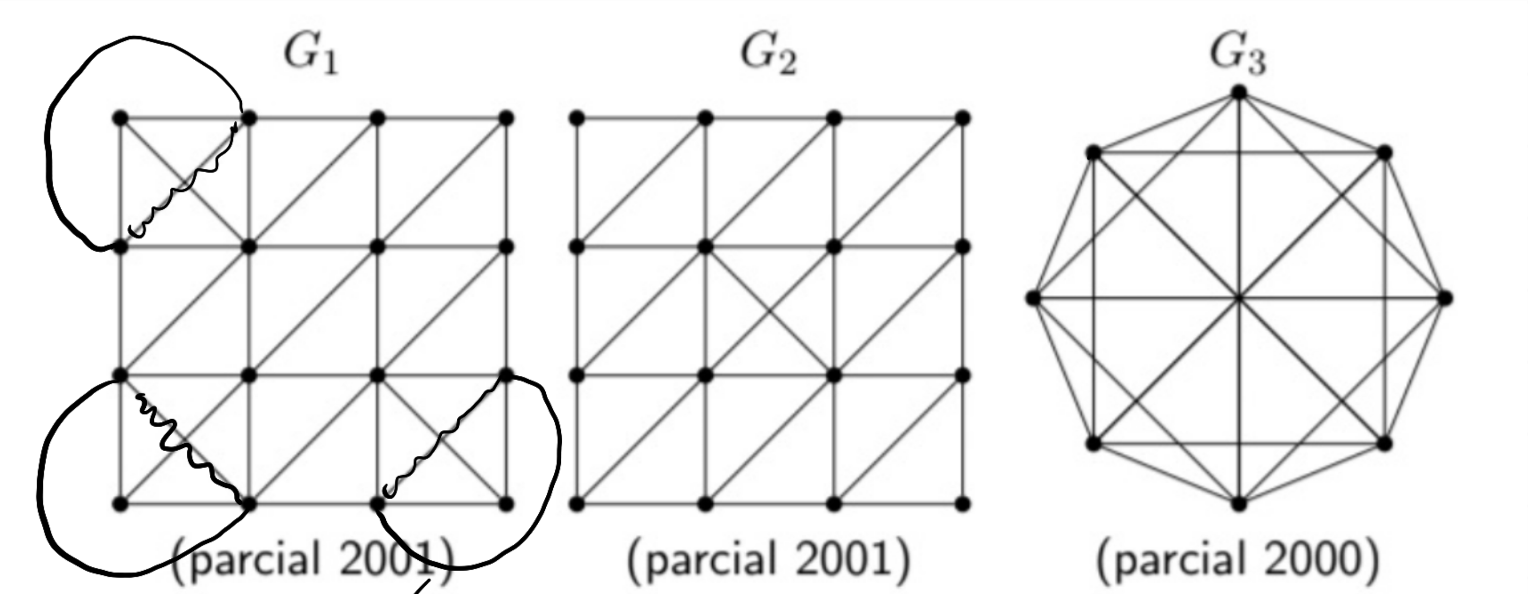
  $e = 10$ $v = 5$ $10 \not\leq 15 - 6 = 9$.

- si $K_{3,3}$ no cumple $e \leq 3v - 6$ no es plano

  $e = 9$ $v = 6$ $9 \leq 3 \cdot 6 - 6 = 12$

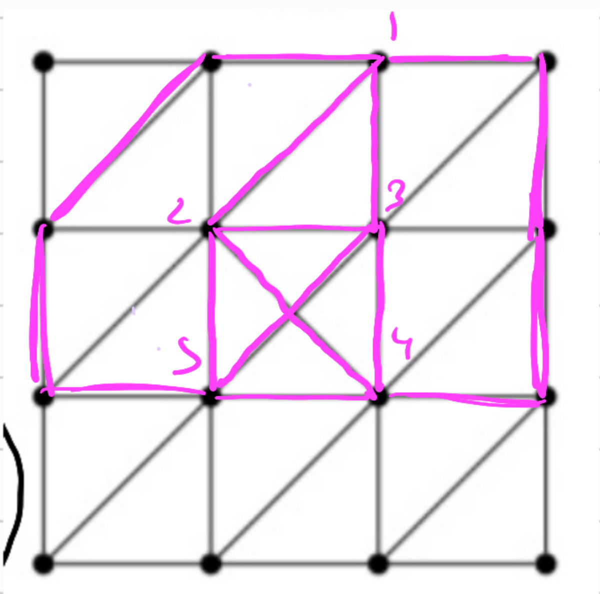
  $\Rightarrow$ podría ser plano o no.

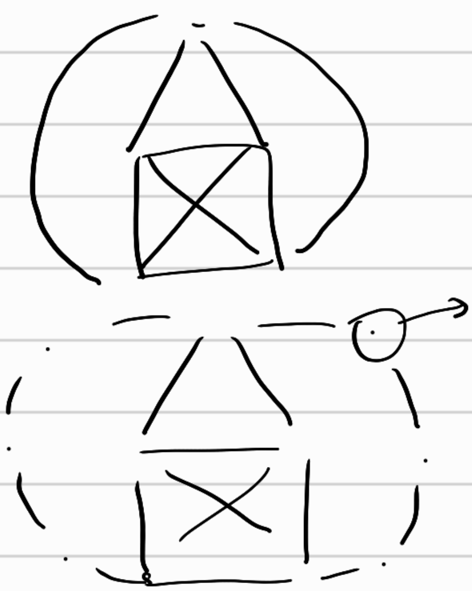
Ejercicio 5. Determine cuáles de los grafos de la Figura 1 son planos. Si un grafo es plano, vuelva a dibujarlo sin aristas solapadas. Si no es plano, encuentre un subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.



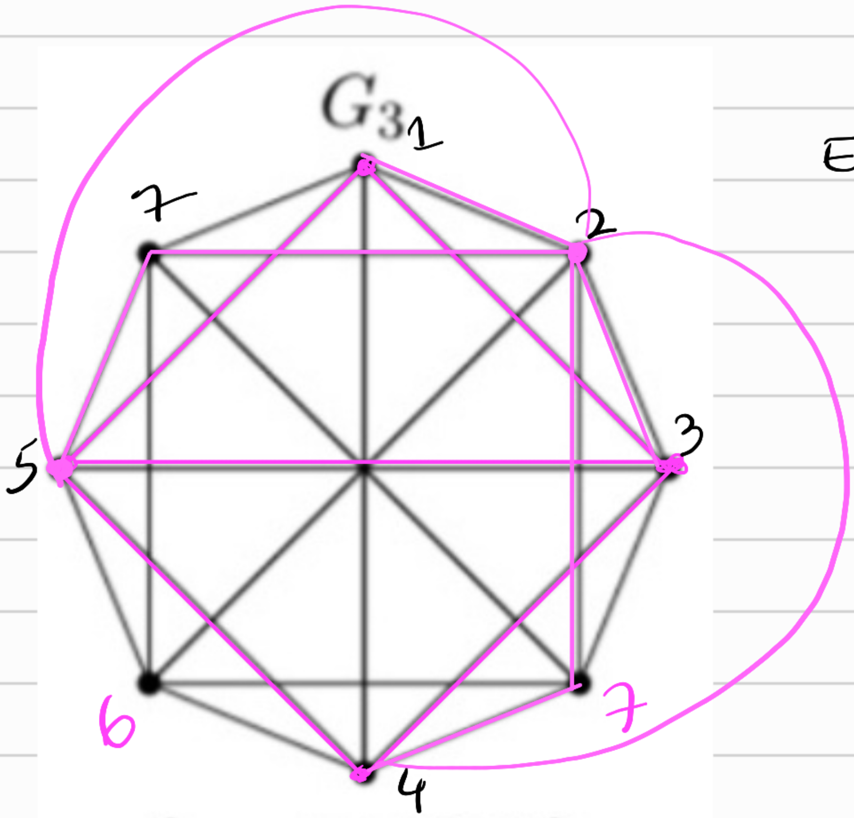
plano ✓

Figura 1





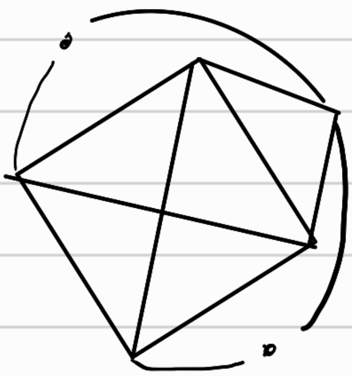
se agregan vértices nuevos



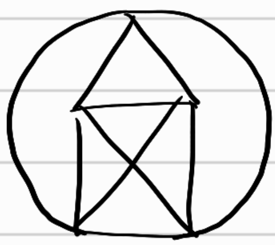
(parcial 2000)

Es homeomorfo a K_5

↓ homeomorfo a



es homeomorfo a



Ejercicio 6. Demostrar que en todo grafo plano $e \leq 3v - 6$, donde e y v denotan la cantidad de aristas y de vértices, respectivamente. Concluya que todo grafo plano tiene algún vértice de grado 5 o menor.

→ no lazos...

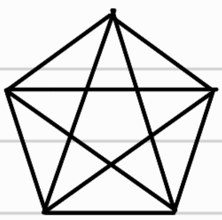
- Tenemos la fórmula
$$v - e + r = 1 + k$$
$$\Rightarrow r = 1 + k - v + e \geq 2 - v + e$$

- y la fórmula
$$\sum \text{grados regiones} = 2e$$

Si descartamos el caso en que hay 0 o 1 aristas
⇒ el grado de una región es al menor 3.

$$\Rightarrow 2e = \sum \text{grados regiones} \geq 3 \cdot r$$
$$\geq 3(2 - v + e)$$
$$= 6 - 3v + 3e$$
$$\Rightarrow 2e \geq 6 - 3v + 3e$$
$$\Rightarrow 3v - 6 \geq e$$

Obs: Si K_5 fuera plano cumpliria $e \leq 3v - 6$



$$\Rightarrow 10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9 \quad \times$$

Obs: ¿Qué paso con $K_{3,3}$?

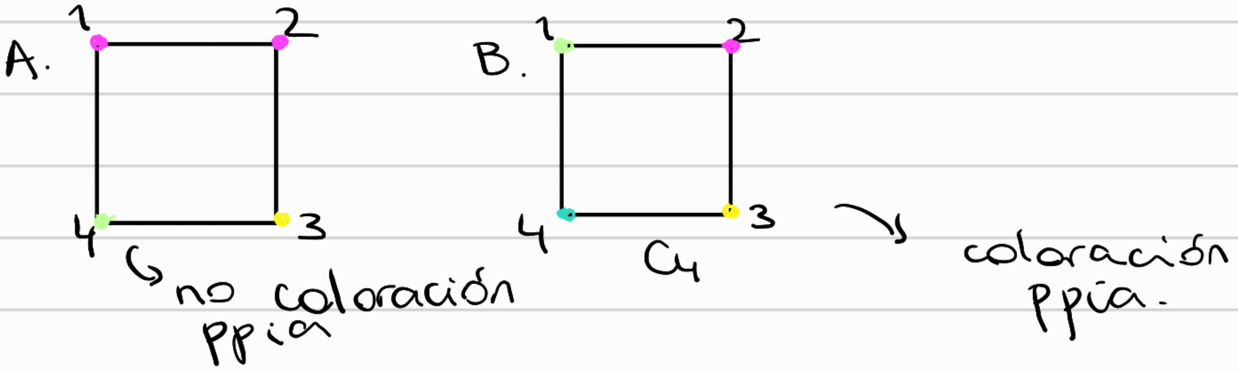
$e = 9 \qquad v = 6$

$9 \leq 3 \cdot 6 - 6 \quad , 9 \leq 12 \quad \checkmark$

La desigualdad $e \leq 3v - 6$ es una condición necesaria para que el grafo sea plano pero no suficiente.

Def (coloración propia): es una función $c: V \longrightarrow C$ (C cjto. finito de "colores") que verifica: $\{v,w\} \in E \Rightarrow c(v$

Ejemplo:



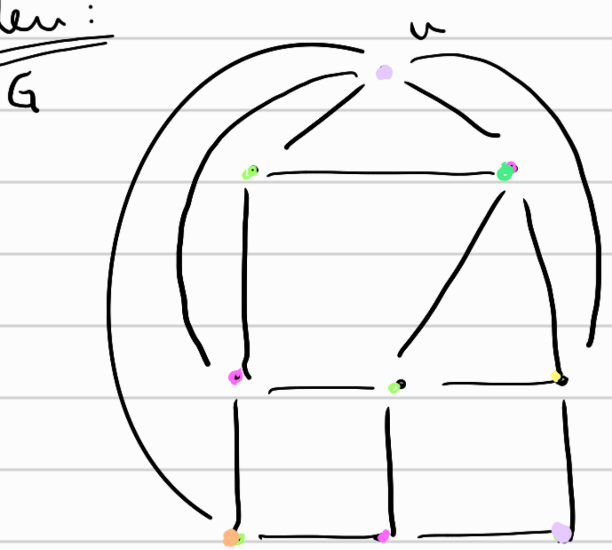
Ejercicio 7. Demostrar que todo grafo plano se puede colorear con seis colores.

P.B: Puedo colorear un grafo plano de 1, 2, 3, 4, 5, 6 vértices con 6 colores.

H.I.: Puedo colorear un grafo plano de n vértices con 6 colores.

T.I.: Puedo colorear un grafo plano de $n+1$ vértices con 6 colores.

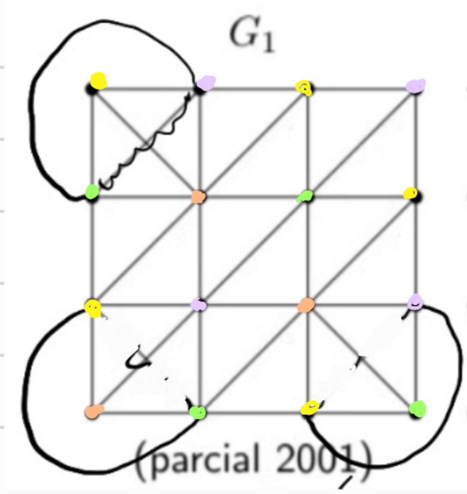
dem:



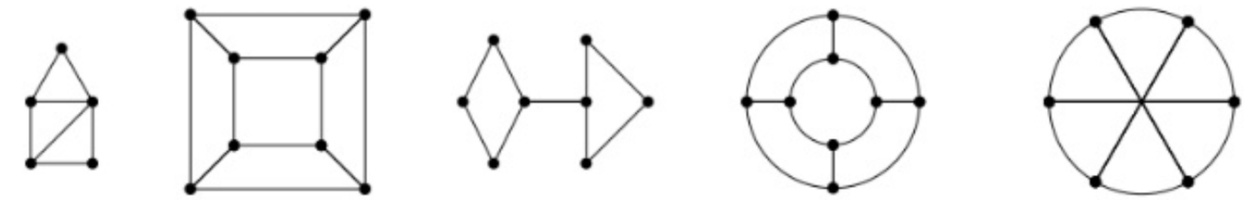
Como el grafo es plano $\Rightarrow$ tenemos un vértice de grado menor que 6, llamemosle u.

$G - u$ es plano $\Rightarrow$ lo puedo colorear con 6 colores.

u es adyacente a máximo 5 vértices $\Rightarrow$ lo coloreo con un color $\neq$ al de los ady.



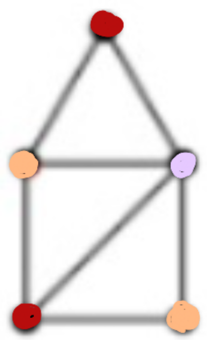
Ejercicio 8. Encotrar el número cromático de los siguientes grafos.



$P_G(\lambda) = \#\{$ coloraciones ppias. de G usando λ colores o menos $\}$

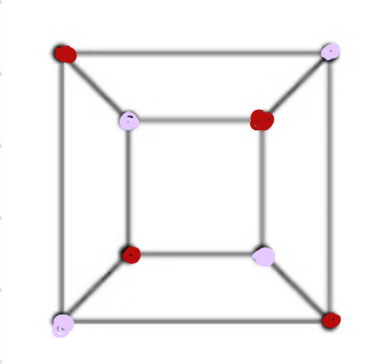
$\chi(G) = \min\{n \in \mathbb{Z}_{>0} : P_G(n) \neq 0\}$

↳ es la cantidad mínima de colores que necesitamos para colorear el grafo.

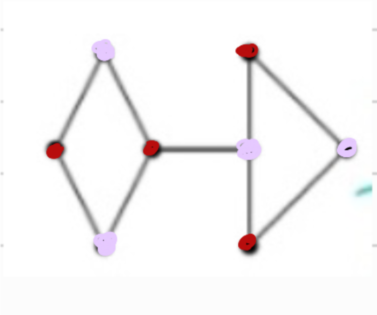


No lo podemos colorear con 3 colores porque tiene un 3-ciclo.

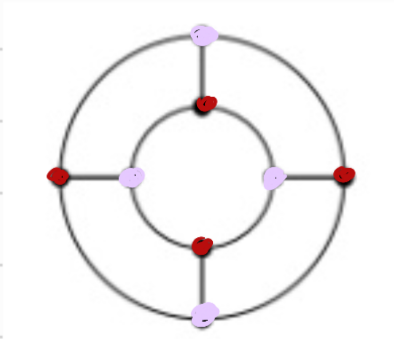
Si lo podemos colorear con $3 \Rightarrow \chi(G) = 3$.



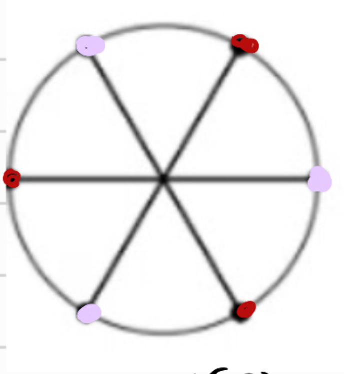
$\chi(G)=2$



$\chi(G)=2$



$\chi(G)=2$

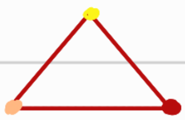


$\chi(G)=2$

Ejercicio 9. Hallar el polinomio cromático de C_n, K_n, P_n, $K_{2,n}$ y K_5 menos una arista. Deducir el número cromático de cada grafo y la cantidad de coloraciones usando 5 colores o menos.

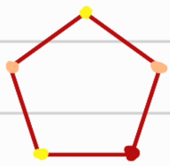
Calculemos el número cromático sin el polinomio cromático (como en el ejercicio de arriba) y luego confirmemos que coincide el mínimo natural positivo que no es raíz del polinomio cromático.

C_n

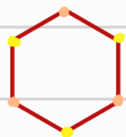


3 colores

2 colores



3 colores



2 colores.

. . .

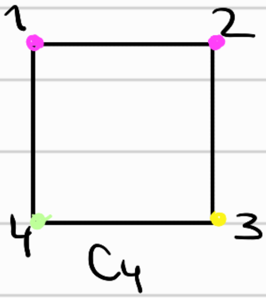
$$\Rightarrow \quad \chi(C_n) = \begin{cases} 3 & \text{ciclo impar} \\ 2 & \text{ciclo par} \end{cases}$$

COLORACIÓN

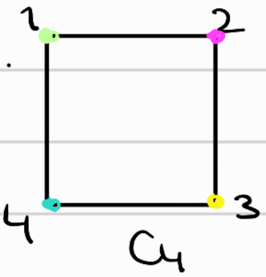
RESUMEN

Def (coloración propia): es una función $c: V \longrightarrow C$ (C cjto. finito de "colores") que verifica: $\{v,w\} \in E \Rightarrow c(v) \neq c(w)$.

Ejemplo: A.



B.

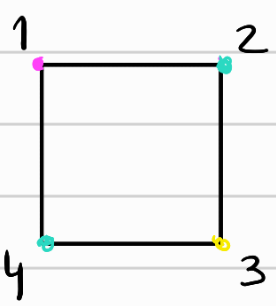


La función que manda cada vértice a su color es una coloración en el ejemplo B pero no en A.

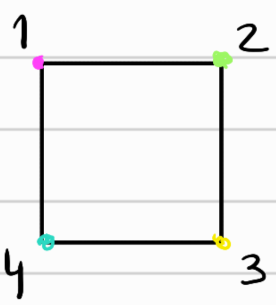
Def (polinomio cromático): G grafo $\Rightarrow$

$$P_G(\lambda) := \#\{c : \text{coloracion propia de } G \text{ usando } \lambda \text{ colores o menos}\}$$

Ejemplo: Sea $\lambda > 2$: para colorear C_4 tengo



o



Hay λ colores para colorear 1 y $\lambda - 1$ para colorear 2 y 4.

- Si coloreamos 2 y 4 del mismo color $\Rightarrow$ hay $\lambda - 1$ colores para 3.
- Si coloreamos 2 y 3 de distinto color $\Rightarrow$ hay $\lambda - 2$ colores para 3

$\Rightarrow$ Por la regla de la suma

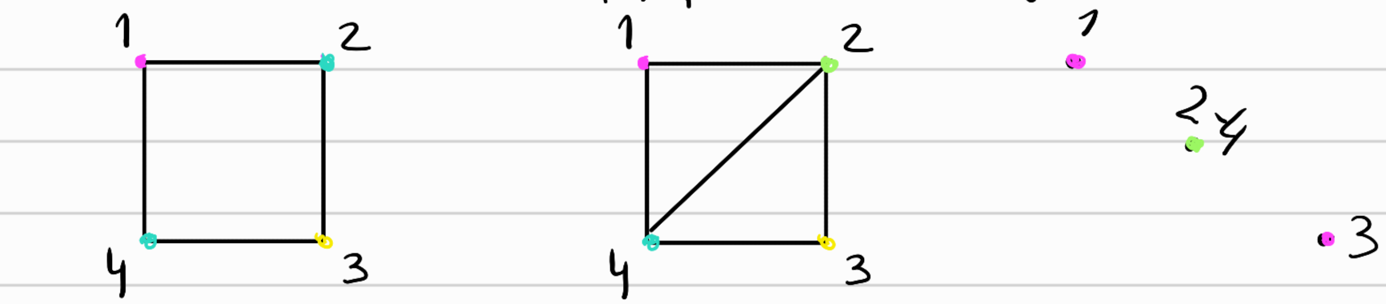
$$P_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-1) + \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-2) = \lambda(\lambda-1)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$$

Observación: calcular $p_G(\lambda)$ usando la regla de la suma y distinguiendo:

u y v vértices con distinto color
u y v vértices con el mismo color

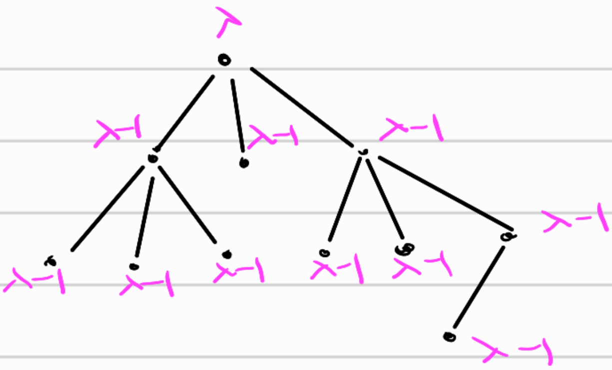
es lo mismo que calcular el polinomio cromático del grafo G agregando $\{u,v\}$ y sumarle el del grafo G identificando u con v (contracción)

G $\qquad G+\{u,v\}$ $\qquad G_{u=v}$



entonces $\quad p_G(\lambda) = p_{G+\{u,v\}}(\lambda) + p_{G_{u=v}}(\lambda)$.

Proposición: Si T es un árbol con n nodos $\Rightarrow p_T(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$



Teorema: Si $G = G_1 \cup G_2$ donde $G_1 \cap G_2 = K_n \Rightarrow$

$$p_G(\lambda) = \frac{p_{G_1}(\lambda)\, p_{G_2}(\lambda)}{p_{K_n}(\lambda)}$$

Definición (número cromático): $\chi(G) = \min\{\lambda \in \mathbb{N}^* : p_G(\lambda) \neq 0\}$