

Ejercicio 5. Determine cuáles de los grafos de la Figura 1 son planos. Si un grafo es plano, vuelva a dibujarlo sin aristas solapadas. Si no es plano, encuentre un subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.

Ejercicio 6. Demostrar que en todo grafo plano $e \leq 3v - 6$, donde e y v denotan la cantidad de aristas y de vértices, respectivamente. Concluya que todo grafo plano tiene algún vértice de grado 5 o menor.

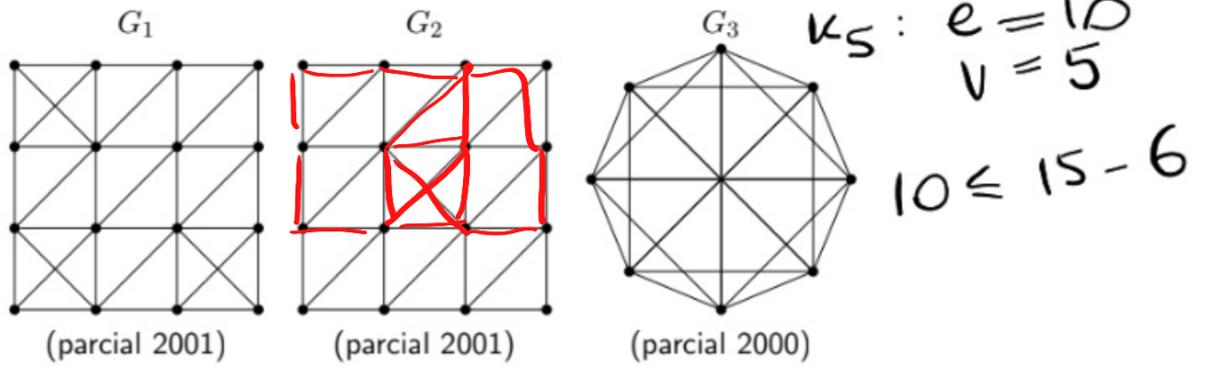
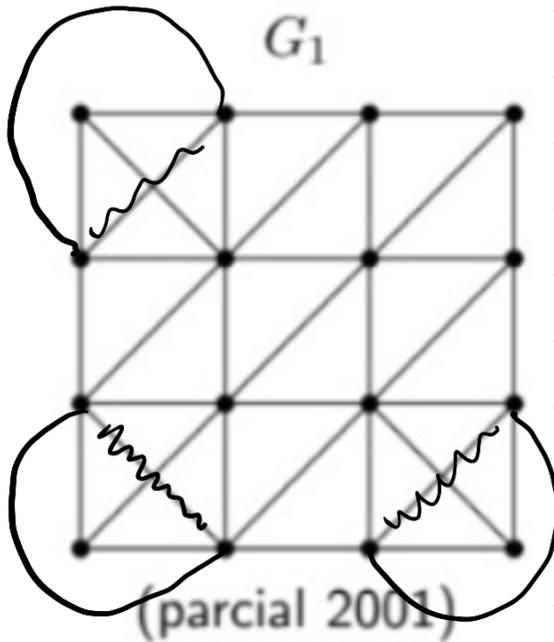


Figura 1

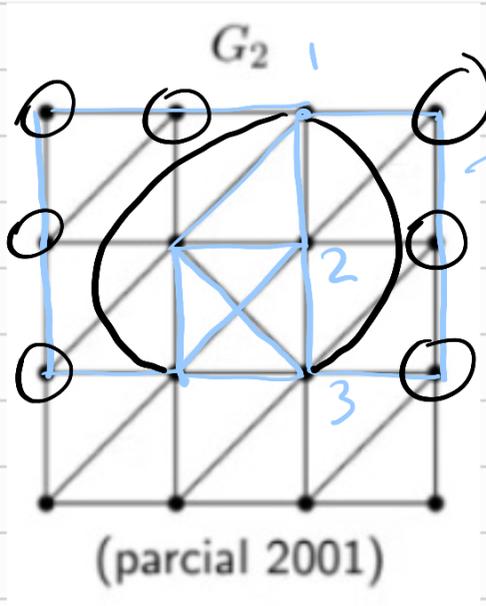


Dos subgrafos son homeomorfos si :

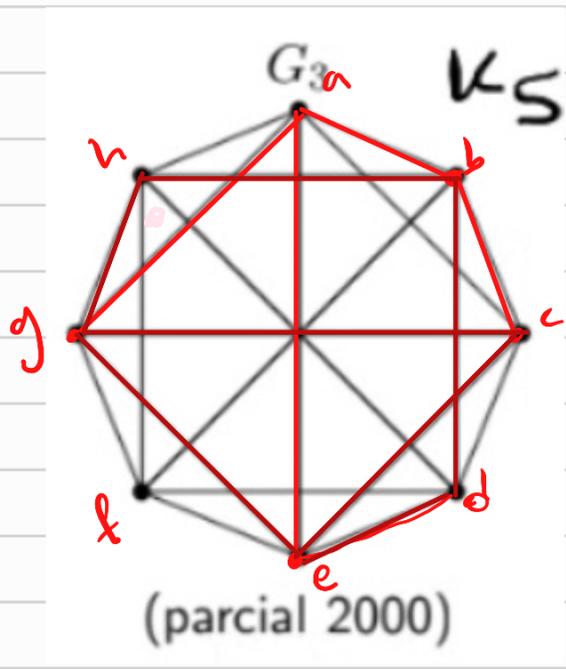
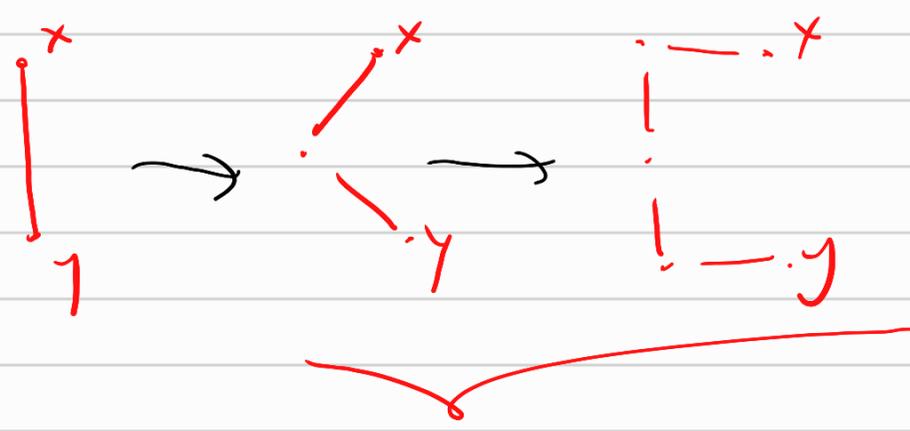
- son isomorfos

- uno se puede obtener a partir del otro via subdivisiones elementales.



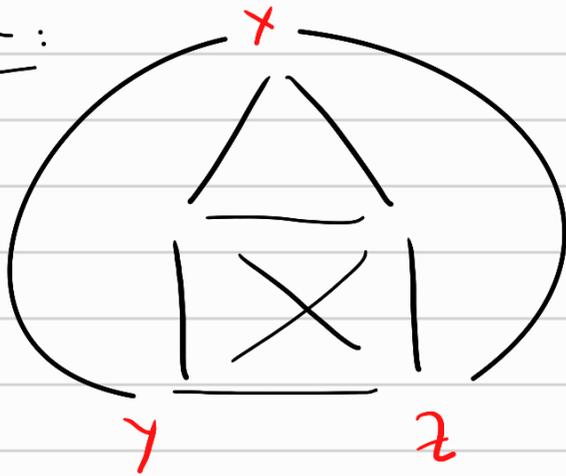


→ es homeomorfo a K_5

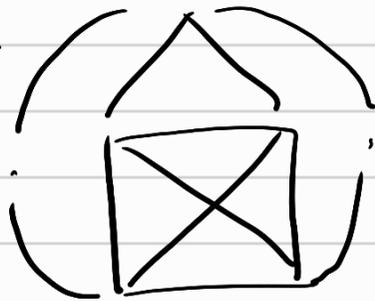


G_3 se obtiene como subdivisiones elem. de K_5 .

K_5 :



G_3 :



Ejercicio 6. Demostrar que en todo grafo plano $e \leq 3v - 6$, donde e y v denotan la cantidad de aristas y de vértices, respectivamente. Concluya que todo grafo plano tiene algún vértice de grado 5 o menor.

$$\frac{\sum \text{grados regiones}}{2} = e$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{El n}^\circ \text{ de regiones } r / v - e + r &= 1 + k \\ \Rightarrow r &= 1 + k - v + e \\ &\geq 2 - v + e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{Cada región tiene grado } \geq 3. \\ \rightarrow \sum \text{grados regiones} &\geq (2 - v + e) \cdot 3 = 6 - 3v + 3e \end{aligned}$$

$$\rightarrow 2e = \sum \dots \geq 6 - 3v + 3e$$

$$\boxed{3v - 6 \geq e}$$

K_5 :  $v = 5$ $e = 10$

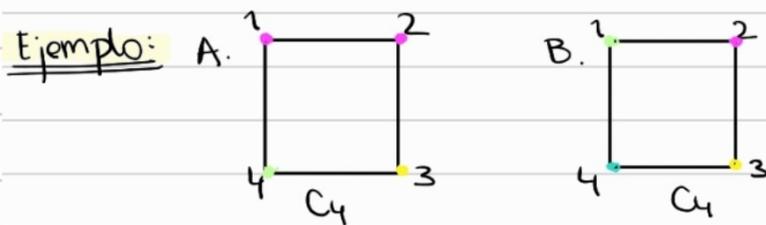
Si K_5 fuera plano $e \leq 3v - 6$
 $10 \leq 9$ X

Obs:

$K_{3,3}$ cumple $e \leq 3v - 6$ pero no es plano.

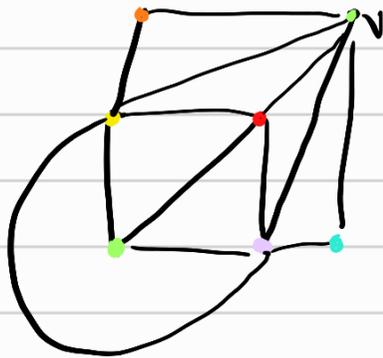
Ejercicio 7. Demostrar que todo grafo plano se puede colorear con seis colores.

Def (coloración propia): es una función $c: V \rightarrow C$
(C c.jto. finito de "colores") que verifica: $\forall v, w \in E \Rightarrow c(v) \neq c(w)$



La función que manda cada vértice a su color es una coloración en el ejemplo B pero no en A.

Por inducción en v : si $v=1$ ✓ P.B.



H.I.: si $v=n \Rightarrow$ un grafo plano se colorea con 6 colores.

T.I.: si $v=n+1 \Rightarrow$ puedo colorear con 6 colores

H.I. \Rightarrow T.I: Sea v de grado ≤ 5 (existe

por el ej. 6) \Rightarrow $G-v$ es plano con n vértices \Rightarrow lo puedo colorear con 6 colores.

luego, hay al menos un color distinto a los vértices ady a v , colorea a v con uno de esos colores.