Universidad de la República — **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística — **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 10

Grafos III: Planitud y Coloración

ALGUNAS DEFINICIONES Y RESULTADOS ÚTILES:

- Inmersión plana: representación del grafo en el plano de forma de que dos aristas distintas no se cortan (salvo en los vértices en el caso de ser adyacentes).
- Grafo plano: grafo que admite una inmersión plana.
- En toda inmersión plana de un grafo plano la suma de los grados de las regiones es el doble de la cantidad de aristas (incluyendo la región infinita).
- Región infinita: es la región no acotada determinada por una inmersión plana de un grafo.
- Fórmula de Euler para grafos planos: $v - e + r = 1 + \kappa$, donde v, e, r y κ son la cantidad de vértices, la cantidad de aristas, la cantidad de regiones y la cantidad de componentes conexas del grafo.
- Sea G un grafo sin vértices de grado 2, decimos que G' es homeomorfo a G si este puede obtenerse a partir de G via subdivisiones elementales (informalmente, agregando vértices en medio de las aristas).
- Teorema de Kuratowski: un grafo es no plano sii tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$ y K_5.

Ejercicio 1. Encuentre una inmersión plana para cada uno de los siguientes grafos planos $G = (V, E)$:

(a) $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq 4\}$;

(b) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq 5, i - j \text{ impar}\}$;

(c) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 1\}, \{1, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}\}$.

(d) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 1\}, \{1, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{1, 7\}\}$.

Ejercicio 2. Para cada una de las inmersiones planas de los grafos del ejercicio anterior determine el grado de cada una de las regiones y compruebe que su suma es $2|E|$.

Ejercicio 3. Sea $G = (V, E)$ un grafo plano con 8 vértices, que admite una inmersión plana que determina 4 regiones con grados $3, 3, 4$ y 8, respectivamente (la región de grado 8 corresponde a la región infinita).

(a) Determine e, la cantidad de aristas del grafo.

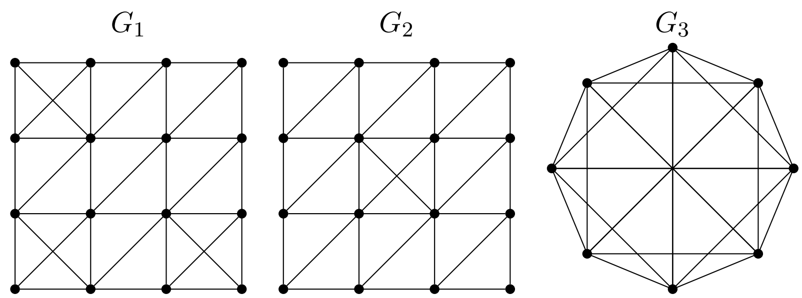
(b) Determine κ, la cantidad de componentes conexas del grafo.

(c) Encuentre un grafo que cumpla todas las condiciones de la letra.

Ejercicio 4. Sin usar Kuratowski pruebe que $K_{3,3}$ y K_5 no son grafos planos[1].
Sugerencia: Por absurdo, suponga que haya una inmersión plana y acote inferiormente los grados de las supuestas regiones, luego utilice la fórmula de Euler para llegar a una contradicción.

Ejercicio 5. Determine cuáles de los grafos de la Figura 1 son planos. Si un grafo es plano, vuelva a dibujarlo sin aristas solapadas. Si no es plano, encuentre un subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.

Ejercicio 6. Demostrar que en todo grafo plano $e \leq 3v - 6$, donde e y v denotan la cantidad de aristas y de vértices, respectivamente. Concluya que todo grafo plano tiene algún vértice de grado 5 o menor.

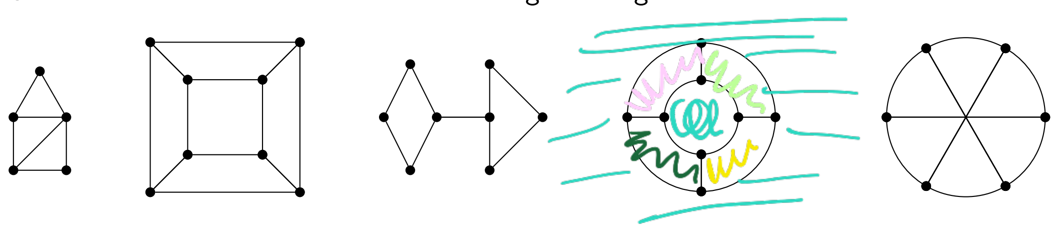


(parcial 2001) (parcial 2001) (parcial 2000)

Figura 1

Ejercicio 7. Demostrar que todo grafo plano se puede colorear con seis colores.

Ejercicio 8. Encotrar el número cromático de los siguientes grafos.



Ejercicio 9. Hallar el polinomio cromático de C_n, K_n, P_n, $K_{2,n}$ y K_5 menos una arista. Deducir el número cromático de cada grafo y la cantidad de coloraciones usando 5 colores o menos.

Ejercicio 10. Sea G un árbol con $n \geq 2$ vértices. Hallar el polinomio y número cromático de G.

Ejercicio 11. Demostrar que $\chi(G) \leq 2$ si y sólo si G no tiene ciclos impares.

Ejercicio 12. Sea $G = (V, E)$ un grafo y $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} gr(v)$.

(a) Demostrar que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

(b) Dar un ejemplo de grafo que cumpla la igualdad.

[1] Si ya fue vista en Teórico, puede revisar la demostración pero se recomienda entenderla y no simplemente copiarla.

Planitud

Definición (grafo plano): un grafo es plano si existe una representación gráfica en la que las aristas sólo se intersectan en los vértices.

Teorema: sea G un grafo plano conexo y R las regiones que quedan definidas por la inmersión plana $\Rightarrow$ $\boxed{|V| - |E| + |R| = 2.}$

(en particular $|R|$ no varía con la representación del grafo)

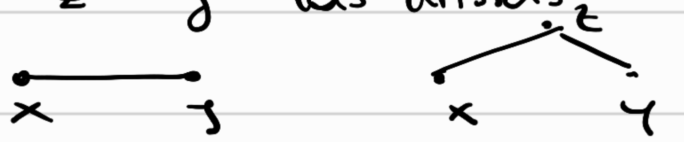
Corolario: Idem pero G con k componentes conexas $\Rightarrow$ $|V| - |E| + |R| = 1 + k$.

Proposición: Si G es plano:

$$3|R| \leq 2|E| \quad \text{y} \quad |E| \leq 3|V| - 6$$

Obs: K_5 no es plano: no cumple $|E| \leq 3|V| - 6$.

Subdivisión elemental: grafo que se obtiene al remover una arista $\{x,y\}$, agregar un vértice z y las aristas $\{x,z\}$ y $\{z,y\}$.



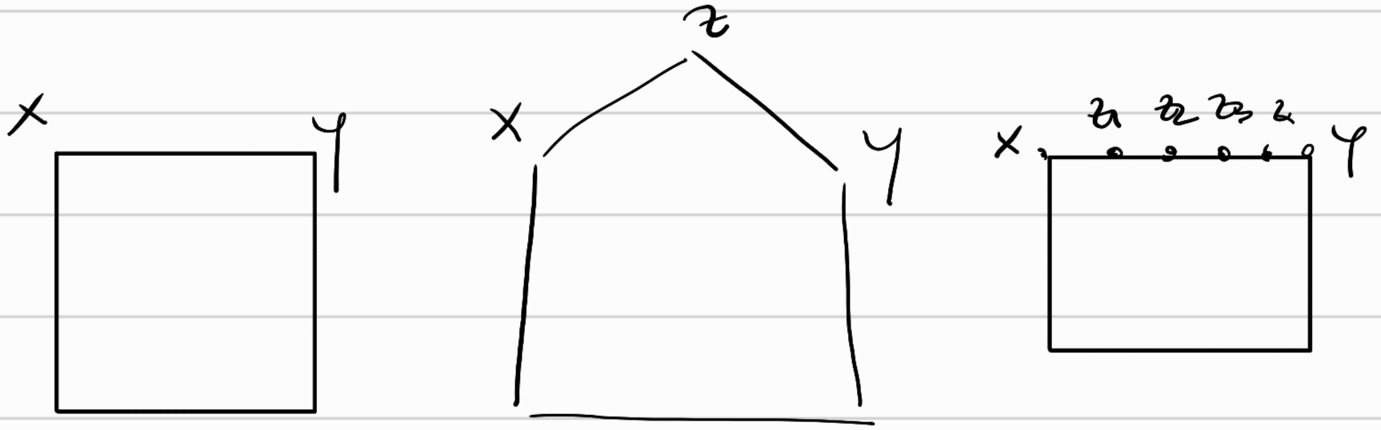
Grafos homeomorfos:
- isomorfos

o

- subdivisiones elem. de grafos isomorfos.

G_1 y G_2 homeomorfos $\Rightarrow$ G_1 es plano sii G_2 lo es.

> **Teorema (Kuratowski):** G plano sii no posee subgrafos homeomorfos a K_5 o $K_{3,3}$.



3 grafos home.
no iso.

Ejercicio 1. Encuentre una inmersión plana para cada uno de los siguientes grafos planos $G = (V, E)$:

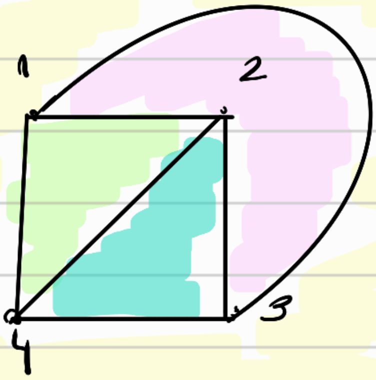
(a) $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq 4\}$;

(b) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq 5, i - j \text{ impar}\}$;

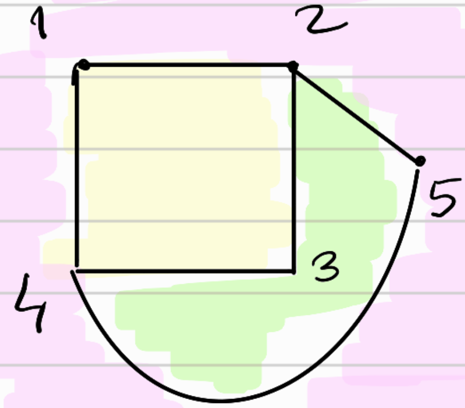
(c) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 1\}, \{1, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}\}$.

(d) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 1\}, \{1, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{1, 7\}\}$.

(a)



(b)



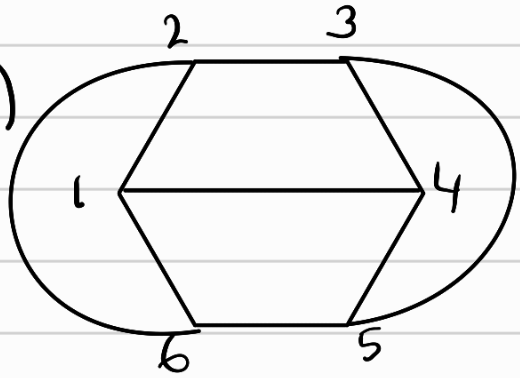
gr = 3 gr = 3 gr = 3

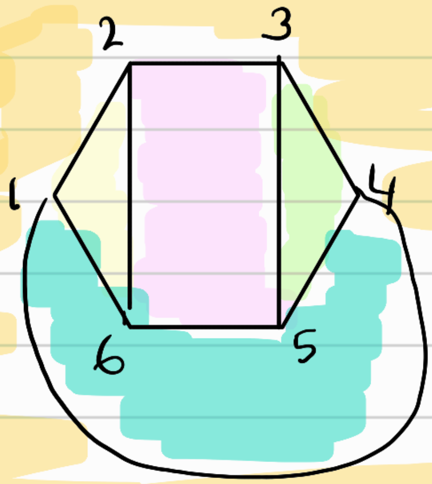
gr = 3

=> suma grados = 12

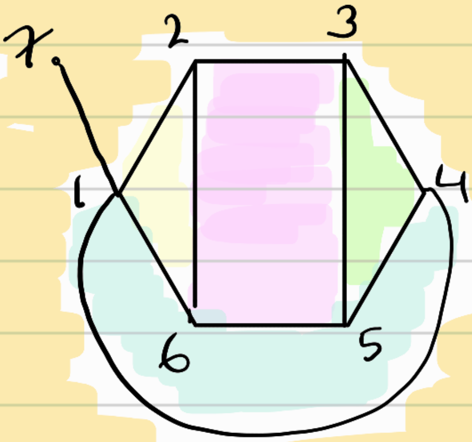
2|E| = 12

(c)





(d)



gr = 4

gr = 3

gr = 3

gr = 4

gr = 6

suma gr = 20

2|E| = 10

Ejercicio 3. Sea $G = (V, E)$ un grafo plano con 8 vértices, que admite una inmersión plana que determina 4 regiones con grados $3, 3, 4$ y 8, respectivamente (la región de grado 8 corresponde a la región infinita).

(a) Determine e, la cantidad de aristas del grafo. → Fórmula suma grados regiones

(b) Determine κ, la cantidad de componentes conexas del grafo. → Fórmula de Euler.

(c) Encuentre un grafo que cumpla todas las condiciones de la letra.

(a) Sabemos que $2e$ = suma de los grados

$$\Rightarrow e = \frac{3+3+4+8}{2} = 9.$$

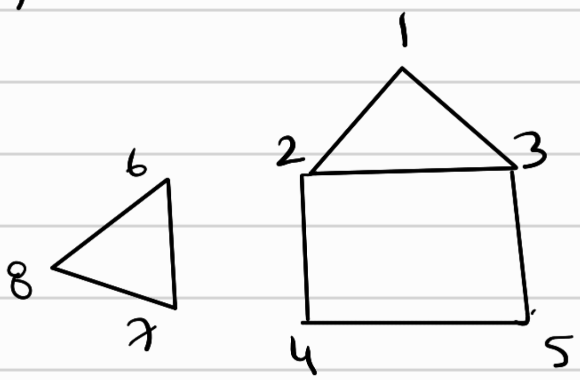
(b) La fórmula de Euler nos dice que

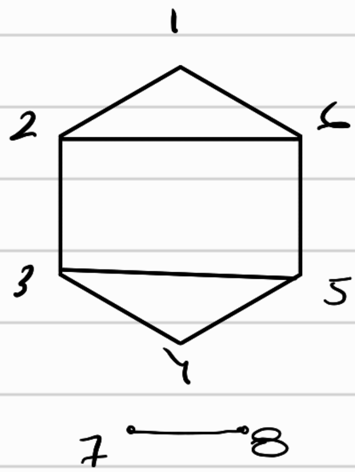
$$v - e + r = 1 + \kappa$$

$$\Rightarrow 8 - 9 + 4 - 1 = \kappa$$

$$\boxed{\kappa = 2}$$

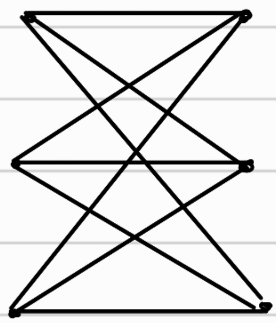
(c)



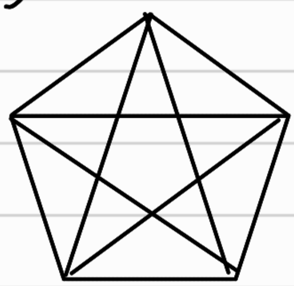


Ejercicio 4. Sin usar Kuratowski pruebe que $K_{3,3}$ y K_5 no son grafos planos[1].
Sugerencia: Por absurdo, suponga que haya una inmersión plana y acote inferiormente los grados de las supuestas regiones, luego utilice la fórmula de Euler para llegar a una contradicción.

$K_{3,3}$



K_5



$K_{3,3}$, supongamos por absurdo que hay una inmersión plana $\Rightarrow$ todas las regiones tienen grado al menos 4 (no pueden tener grado 3 porque no hay 3-ciclos)

Además, se debe cumplir la Fórmula de Euler

$$v - e + r = 2$$

$$\Rightarrow r = 2 - 6 + 9 = 5$$

$\Rightarrow$ Tenemos cinco regiones, cada una de grado ≥ 4

$$2e = \sum gr(\text{regiones}) \geq 5 \cdot 4$$

$$\underline{\underline{e \geq 10}}$$

Pero $e = 9$ ↯.

K_5: Mismo argumento: tendríamos por Euler

$$5 - 10 + r = 2$$

$$r = 7$$

Cada una de grado al menos 3

Pero $7 \cdot 3$ es impar $\Rightarrow$ hay una de grado al menos 4 $\Rightarrow 2e \geq 6 \cdot 3 + 4 = 22$

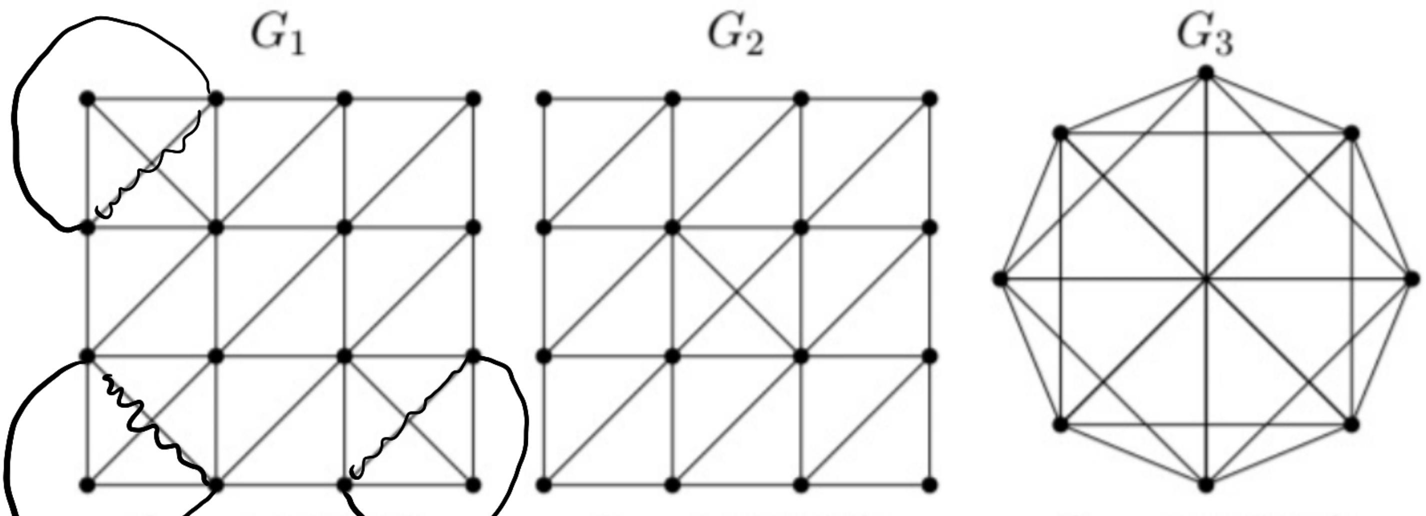
$e \geq 11$ pero e 10 ↯

Obs: Por el ejercicio 6 si G es plano

$\Rightarrow$ $e \leq 3v - 6$

- si K_5 no cumple $e \leq 3v - 6$ no es plano
  $e = 10$ $v = 5$ $10 \nleq 15 - 6 = 9$.
- si $K_{3,3}$ no cumple $e \leq 3v - 6$ no es plano
  $e = 9$ $v = 6$ $9 \leq 3 \cdot 6 - 6 = 12$
  $\Rightarrow$ podria ser plano o no.

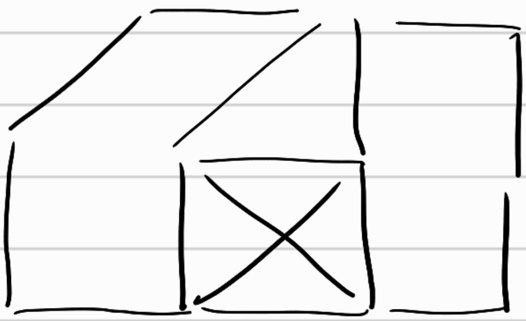
Ejercicio 5. Determine cuáles de los grafos de la Figura 1 son planos. Si un grafo es plano, vuelva a dibujarlo sin aristas solapadas. Si no es plano, encuentre un subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.



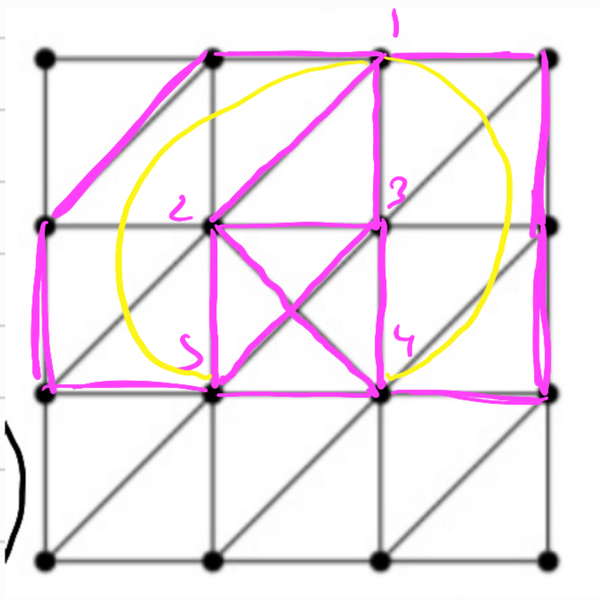
(parcial 2001) (parcial 2001) (parcial 2000)

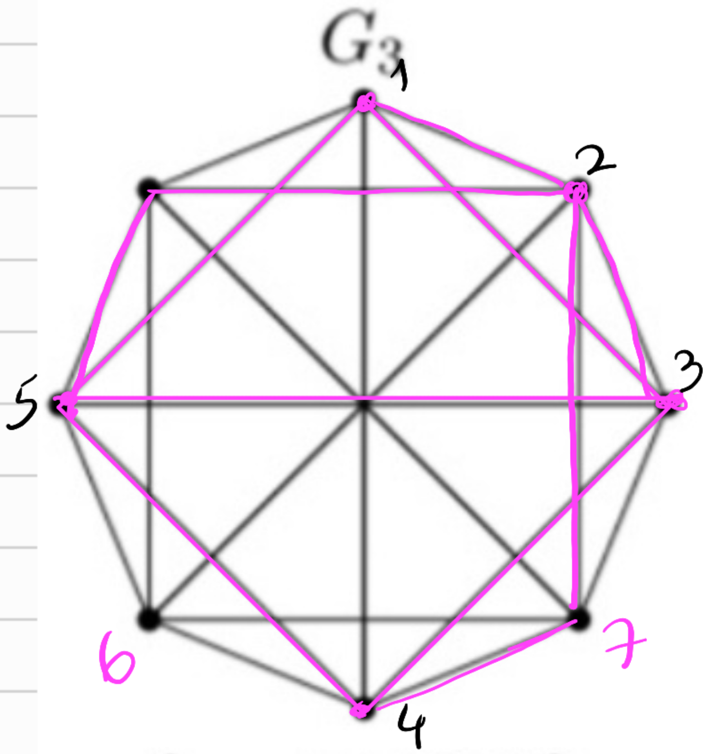
plano ✓

Figura 1



↳ homeomorfo a K_5

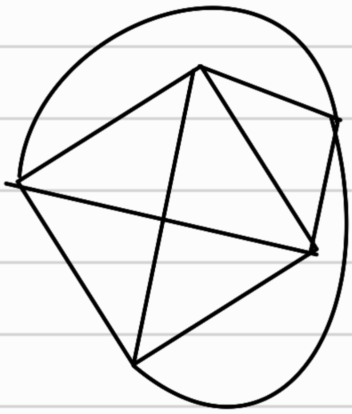




(parcial 2000)

Es homeomorfo a K_5

↓ homeomorfo a



$= K_5$