Universidad de la República | **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística | **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 9

Grafos II: Grado, isomorfismo, árboles, caminos eulerianos y hamiltonianos

Definiciones y suposiciones:

- Todos los grafos de este práctico se suponen simples, es decir, sin aristas múltiples ni lazos.
- Un vértice es *aislado* si no es adyacente a ningún otro.
- El *grafo complemento* $\overline{G}$ de un grafo $G = (V, E)$ se define como $\overline{G} = (V, V^{(2)} \setminus E)$ donde $V^{(2)} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$. Un grafo G se dice *autocomplementario* si es isomorfo a $\overline{G}$.
- Si $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son dos grafos vértices disjuntos ($V_1 \cap V_2 = \varnothing$), entonces su *grafo unión* $G_1 \cup G_2$ se define como $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.
- Denotaremos $\kappa(G)$ a la cantidad de componentes conexas de G.
- Un grafo se dice k*–regular* si todos sus vértices tiene grado k. Un *vértice colgante* es un vértice de grado 1. Cuando el grafo es un árbol, también llamamos *hojas* a los vértices colgantes.

Grado

Ejercicio 1.

a. Determine el orden de un grafo 3–regular con 9 aristas.
b. Ídem con 10 aristas, dos vértices de grado 4 y los demás de grado 3.
c. ¿Existen tales grafos? En caso afirmativo construirlos.

Ejercicio 2. En una clase con 9 alumnos, cada alumno le manda 3 tarjetas de navidad a otros 3. ¿Es posible que cada alumno reciba tarjetas de los mismos 3 compañeros a los cuales él le mando una?

Ejercicio 3. Sea G un grafo con n vértices. ¿Cuántos vértices de $\overline{G}$ tienen grado par si G tiene un sólo vértice de grado par?

Ejercicio 4. ¿Cuál es el máximo orden posible para un grafo con 17 aristas si todos sus vértices tienen grado mayor o igual a 3?

¿Existe algún grafo con dicha cantidad de vértices? En caso afirmativo construirlo.

Ejercicio 5. Para todo natural par $n \geq 4$ construya un grafo conexo 3–regular con n vértices.

Ejercicio 6. (Examen diciembre 2016 Ej6)
Demuestre que todo grafo conexo con 2 o más vértices tiene dos vértices con el mismo grado.

Isomorfismo

Ejercicio 7.

a. Demuestre que dos grafos son isomorfos si y solo si sus grafos complemento lo son.

b. ¿Cuáles de los grafos de la Figura 1 son isomorfos?

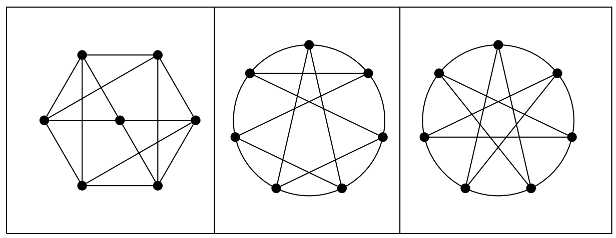


Figura 1

c. Determine el número de aristas de $\overline{G}$ en función del número de aristas de G.

d. Determine el número de aristas de un grafo autocomplementario de orden n.

e. Construya un grafo autocomplementario de orden 4 y otro de orden 5.

Ejercicio 8. Para cada par de grafos de la Figura 2 determine si los grafos son o no isomorfos.

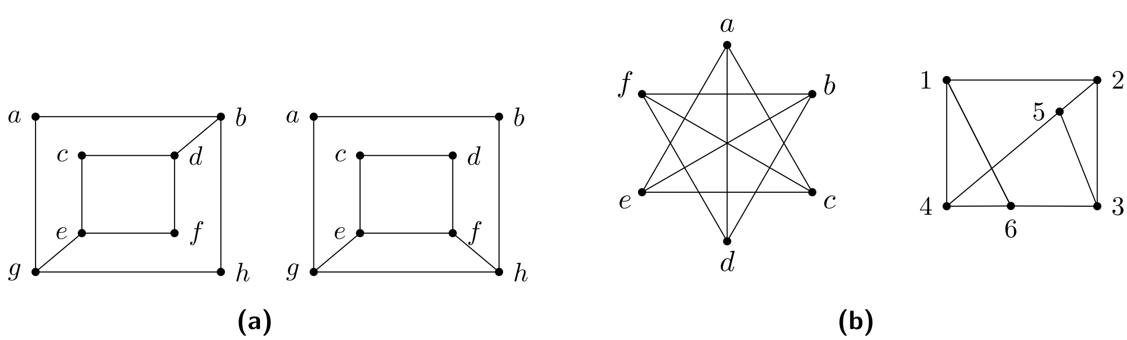
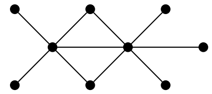


Figura 2

Ejercicio 9. (2^{do} parcial 2001) Halle el número de subgrafos conexos recubridores del grafo de la figura, a menos de isomorfismos.



Árboles

Ejercicio 10. Encuentre todos los árboles con 6 vértices, a menos de isomorfismos. ¿Cuáles de estos árboles son árboles recubridores de $K_{3,3}$?

Ejercicio 11. Sean $T_1 = (V_1, E_1)$ y $T_2 = (V_2, E_2)$ dos árboles. Determine $|V_1|, |V_2|$ y $|E_2|$ si se sabe que $|E_1| = 17$ y $|V_2| = 2|V_1|$.

Ejercicio 12. Un bosque es un grafo acìclico (equivalentemente, sus componentes conexas son árboles).

a. Sea $F_1 = (V_1, E_1)$ un bosque de siete árboles con $|E_1| = 40$. ¿Cuánto vale $|V_1|$?

b. Si $F_2 = (V_2, E_2)$ es un bosque con $|V_2| = 62$ y $|E_2| = 51$, ¿cuántos árboles determina F_2?

Ejercicio 13. ¿Cuántas hojas (vértices colgantes) tiene un árbol con cuatro vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y uno de grado 5?

Ejercicio 14. ¿Qué tipo de árboles tiene exactamente dos hojas?

Ejercicio 15. De un ejemplo de un grafo G que no sea un árbol y que tenga un vértice más que el número de aristas. Pruebe que cualquier grafo que verifique las condiciones anteriores no puede ser conexo (sug: considere un árbol recubridor).

Ejercicio 16. Demuestre que la cantidad de componentes conexas de un grafo con n vértices y m aristas es mayor o igual a $n - m$ (sug: considere un bosque recubridor). ¿Cuándo se da la igualdad?

Ejercicio 17. ¿Cuál es la máxima cantidad de vértices que puede tener un grafo conexo con 30 aristas?

Circuitos y Recorridos Eulerianos, Ciclos y Caminos Hamiltonianos

Ejercicio 18. Encuentre un recorrido euleriano para $G = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ y $E = \{ab, ac, ai, aj, bc, cd, ci, de, df, dg, dh, ef, fg, fh, gh, hi, ij\}$.

Ejercicio 19.

a. Determine los valores de n para los cuales el grafo completo K_n tendrá un circuito euleriano.

b. ¿Para cuáles n tiene K_n un recorrido euleriano?

Ejercicio 20. Encuentre la longitud máxima de un recorrido en a) K_6; b) K_8; c) K_{10}; d) K_{2n}, $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 21. Sea $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$ los conjuntos de grafos Eulerianos y Hamiltonianos respectivamente. Dé un ejemplo de un grafo en $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$, otro en $\mathcal{H} \setminus \mathcal{E}$ y otro en $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}$.

Ejercicio 22. Halle un recorrido o un circuito euleriano para cada grafo de la Figura 3 o demuestre que no existe.

Ejercicio 23. Encuentre un ciclo Hamiltoniano, si existe, para cada grafo de la Figura 4.

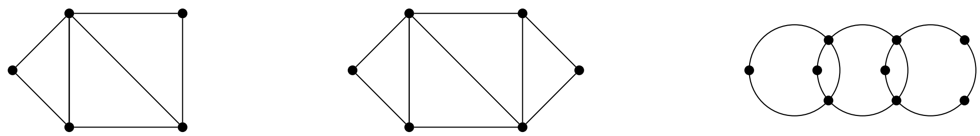


Figura 3

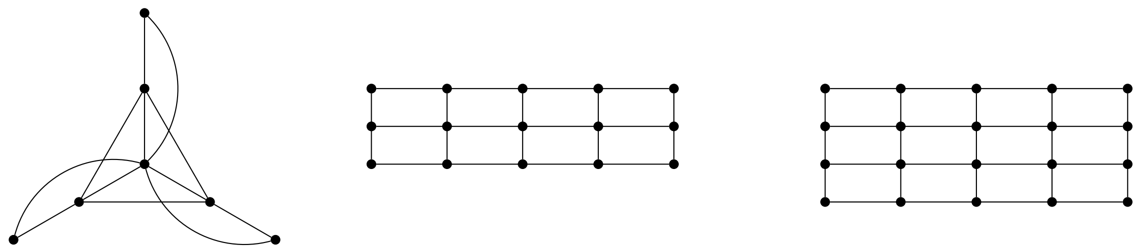


Figura 4

Ejercicios Complementarios

Ejercicio 24. (Examen febrero 2009) ¿Cuántos vértices tiene un árbol con 16 vértices de grado 1, 20 vértices de grado 2 y el resto de grado 4?

Ejercicio 25. (Examen 2003) Halle el máximo número de aristas que se le puede quitar a K_6 sin que el grafo deje de ser conexo.

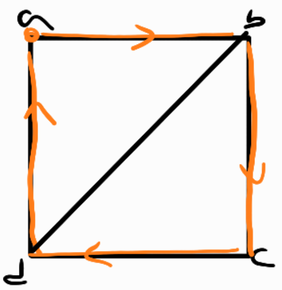
Ejercicio 26. (Parcial 2001) Sea G un grafo acíclico, con n vértices y k componentes conexas. Hallar cuantas aristas tienen G.

Ejercicio 27. (Examen febrero 2010) Dados $k \geq 2$, $v \geq 3$ y un grafo G, k-regular con v vértices diga cuáles de las siguientes es condición suficiente para que G tenga un ciclo Hamiltoniano.
a) $2k \geq v$; b) $k \leq v$; c) $2k < v$; d) $2k \neq v$

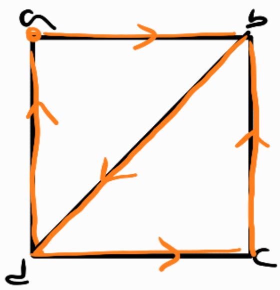
Ejercicio 28. Pruebe que K_n posee tres subgrafos dos a dos isomorfos cuyos conjuntos de aristas son una partición del conjunto de aristas de K_n si y sólo si n es de la forma $3k$ o $3k+1$.

Circuito / Recorrido euleriano:
Circuito / recorrido que pasa exactamente una vez por cada arista.

Ciclo / cno. Hamiltoniano
Ciclo / cno que pasa exactamente una vez por cada vértice.



Ciclo Hamiltoniano no Euleriano.



Recorrido Euleriano no Hamiltoniano.

Teorema: • Existe un recorrido euleriano si y sólo si hay dos vértices de grado impar y el resto son de grado par.
• Existe un circuito euleriano si y sólo si todos los vértices tienen grado par.

Ejercicio 22. Halle un recorrido o un circuito euleriano para cada grafo de la Figura 3 o demuestre que no existe.

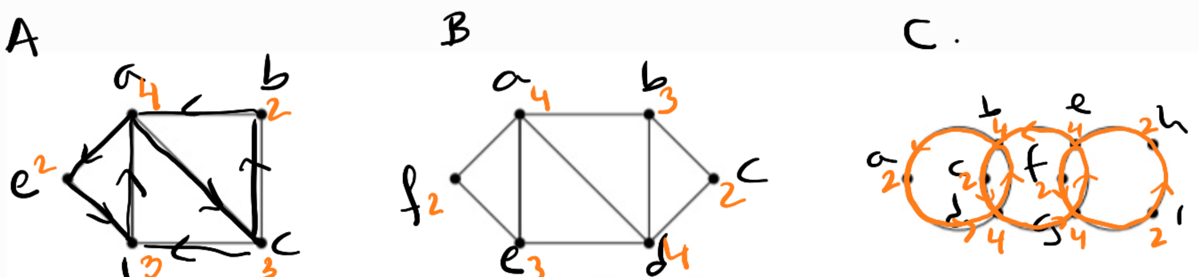


Figura 3

(A)
Recorrido: (c, b, a, e, d, a, c, d)
No circuito

(B) Recorrido: (e, f, a, e, d, c, b, a, d, b)
no circuito

(c) No recorrido

circuito. (b, a, d, c, b, e, f, g, i, h, e, g, d, b)

Ejercicio 23. Encuentre un ciclo Hamiltoniano, si existe, para cada grafo de la Figura 4.

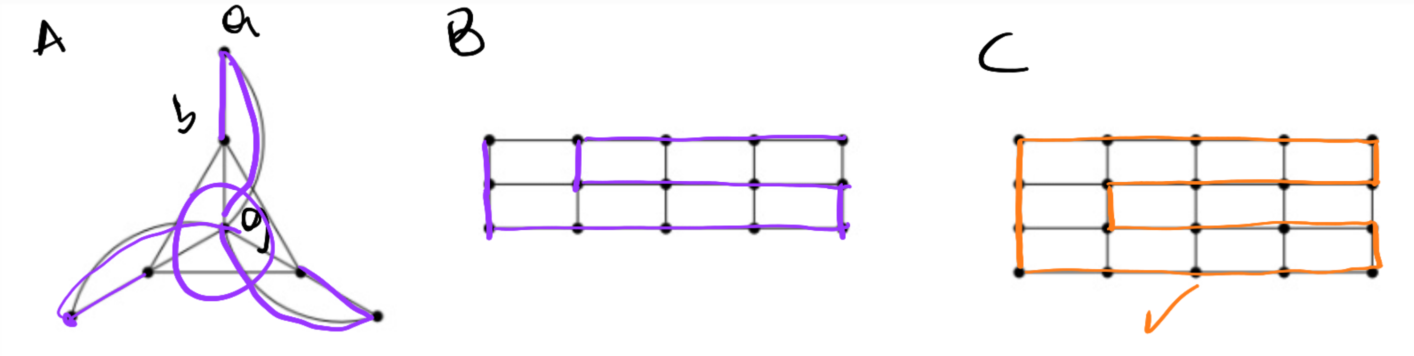


Figura 4

A. Si tenemos un ciclo hamiltoniano, en particular tenemos un ciclo comenzando en a que estar las aristas da y ag.
Lo mismo comenzando desde b ⇒ deben estar cb y bg; también deben estar fc y cg.

⇒ tendríamos 3 aristas pasando por g
⇒ repetimos vértice ⇒ no es ciclo ↯.

A no tiene ciclo Hamiltoniano.

B o tiene ciclo Hamiltoniano.
(si un camino).

C tiene ciclo Hamiltoniamo

Ejercicio 19.

a. Determine los valores de n para los cuales el grafo completo K_n tendrá un circuito euleriano.

b. ¿Para cuáles n tiene K_n un recorrido euleriano? $n=2$

(a) K_n tiene circuito euleriano sii $gr(v)$ es par $\forall v$

$\iff n-1$ es par

$\iff n$ impar.

(b) $gr(v)=n-1$ $\forall v$ y existe un recorrido euleriano sii $\exists$ 2 vértices de grado impar y el resto tienen grado par.

En particular, si $n>2$ tendríamos vértices de grado distinto $\Rightarrow$ existe sólo para $n\leq 2$.

Ejercicio 20. Encuentre la longitud máxima de un recorrido en a) K_6; b) K_8; c) K_{10}; d) K_{2n}, $n \in \mathbb{N}$.

Sabemos que no existe un recorrido euleriano en ninguno de ellos, de hecho, un recorrido de longitud maxima seria un recorrido euleriano en el subgrafo que obtengo quitando las aristas que no uso $\Rightarrow$ necesitamos un subgrafo con todos los grados pares excepto 2 $\Rightarrow$ hay que quitar al menos $\frac{2n-2}{2}=n-1$ aristas

Vamos a ver como tener un recorrido con todas las aristas −

a) Si sacamos 2 aristas no adyacentes nos quedan todos los grados pares menos 2 tenemos un recorrido de long. $|E|-2=\frac{6\cdot5}{2}-2=13$

b) si sacamos 3 aristas, con extremos en 4 vértices $\neq$ $\Rightarrow$ tenemos un recorrido

c) ... de longitud $|E|-4=\frac{8\cdot7}{2}-3=25$

d) En grl, sacamos $n-2$ y tenemos un recorrido de longitud

$$|E|-(n-1)=\frac{2n(2n-1)}{2}-n-1=2n^2-2n+1.$$