Ejercicio 7.

a. Demuestre que dos grafos son isomorfos si y solo si sus grafos complemento lo son.

b. ¿Cuáles de los grafos de la Figura 1 son isomorfos?

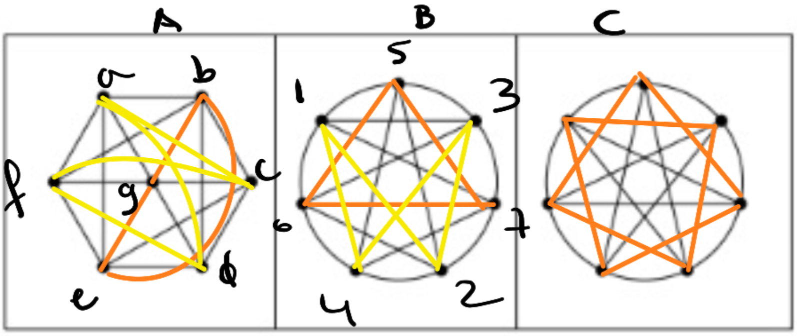


Figura 1

c. Determine el número de aristas de $\overline{G}$ en función del número de aristas de G.

Si G tiene n vertices y m aristas

$$\# \text{Aristas de } \overline{G} = \# \text{Aristas } K_n - \# \text{Aristas } G$$
$$= \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}}_{C^n} - m$$

(a) Sean $G=(V,E)$ y $G'=(V',E')$ dos grafos.

Si G y G' son isomorfos $\Rightarrow \exists\, \varphi: V \to V'$ biyectiva / $\{v,w\} \in E \Leftrightarrow \{\varphi(v), \varphi(w)\} \in E'$. Luego $\{v,w\} \in \overline{E} \Leftrightarrow \{\varphi(v), \varphi(w)\} \in \overline{E'} \Rightarrow$ la misma φ es una biyección $\varphi: V \to V'$ que preserva aristas de $\overline{G'}$.

(b) $\kappa(\overline{A}) = 2$ $\qquad \kappa(\overline{B}) = 2$ $\qquad \kappa(\overline{C}) = 1$

$\Rightarrow$ C no es isomorfo a A ni B.

A y B si son isomorfos: sus complementos lo son. Un isomorfismo es

$\varphi(a) = 1$ $\qquad \varphi(b) = 5$

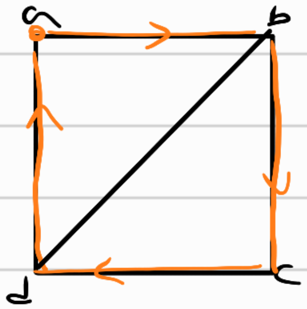
$\varphi(c) = 2$ $\qquad \varphi(e) = 6$

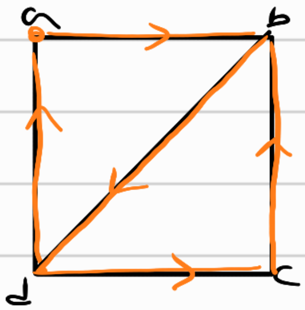
$\varphi(f) = 3$ $\qquad \varphi(g) = 7$

$\varphi(d) = 4$

Circuito / Recorrido euleriano:
Circuito / recorrido que pasa exactamente una vez por cada arista.

Ciclo / cno. Hamiltoniano
Ciclo / cno que pasa exactamente una vez por cada vértice.





- Ciclo Hamiltoniano no Euleriano.
- Recorrido Euleriano no Hamiltoniano.

Teorema:
- Existe un recorrido euleriano si y sólo si hay dos vértices de grado impar y el resto son de grado par.
- Existe un circuito euleriano si y sólo si todos los vértices tienen grado par.

Ejercicio 19.

a. Determine los valores de n para los cuales el grafo completo K_n tendrá un circuito euleriano.

b. ¿Para cuáles n tiene K_n un recorrido euleriano?

(a) Existe circuito euleriano $\Leftrightarrow$ todos los vértices tienen grado par. Como en K_n $gr(v) = n-1$ $\forall v$ esto ocurre si y sólo si n es impar.

(b) En K_n todos los grados son $=$ $\Rightarrow$ no podemos tener recorrido euleriano si $n \neq 2$. $n=2$:  ✓

Ejercicio 22. Halle un recorrido o un circuito euleriano para cada grafo de la Figura 3 o demuestre que no existe.

• grados

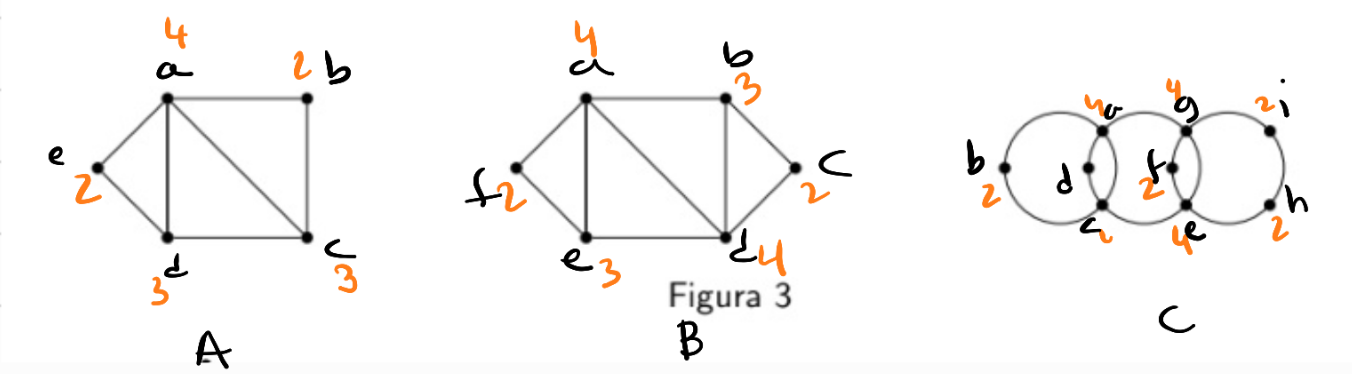


Figura 3

En A: no hay circuito, hay recorrido.
(d, a, b, c, d, e, a, c)
grado impar   grado impar

En B: no hay circuito, hay recorrido.
(e, a, f, e, d, c, b, a, d, b)

En C: no hay recorrido, hay circuito.
(a, b, c, d, a, c, e, f, g, e, h, i, g, a)

Ejercicio 23. Encuentre un ciclo Hamiltoniano, si existe, para cada grafo de la Figura 4.

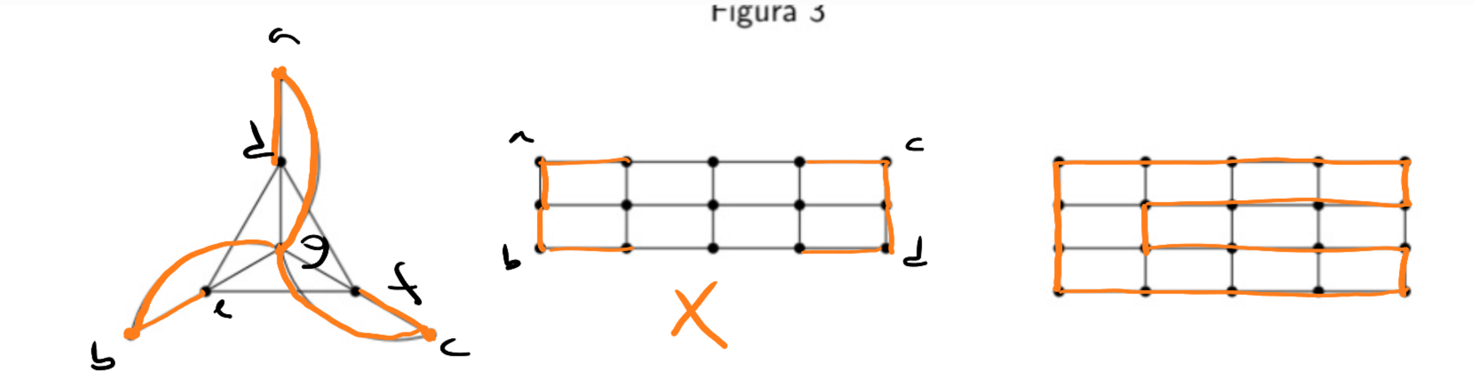


Figura 4

A. Si tenemos un ciclo hamiltoniano ⇒ en particular tenemos un ciclo comenzando desde a ⇒ tienen que estar las aristas da y ag.
Lo mismo comenzando desde b ⇒ deben estar cb y bg; también deben estar fc y cg.

⇒ tendríamos 3 aristas pasando por g
⇒ repetimos vértice ⇒ no es ciclo ↯.

A no tiene ciclo Hamiltoniano.

B no tiene ciclo Hamiltoniano.

C tiene ciclo Hamiltoniano.

Ejercicio 5. Para cada natural $n \geq 3$ se define el grafo *rueda de n rayos* como el grafo W_n con $n+1$ vértices $v_0, v_1, \ldots, v_n$, tal que v_0 es adyacente a todos los demás vértices y $v_1, \ldots, v_n, v_1$ es un ciclo. En la Figura 2 se muestra W_3, W_4 y W_5.

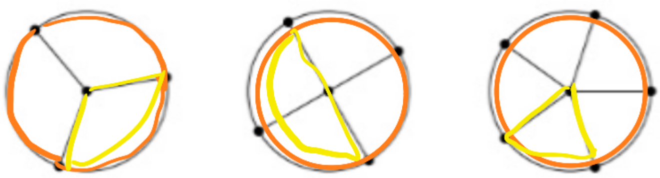


Figure 2:

a. ¿Cuántas aristas tiene W_n?
b. ¿Cuántos 3-ciclos tiene W_3? ¿y W_4?
c. ¿Cuántos 4-ciclos tienen W_3, W_4 y W_5?
d. Ídem para 5-ciclos.
e. Ídem para 6-ciclos.
f. Determine cuántos k-ciclos tiene W_n.

(a) $\underbrace{\text{Rayos}}_{n} + \underbrace{\text{Ciclo}}_{n}$ ⇒ hay $2n$ aristas.

(b) Contemos sin distinguir sentido ni vértice de inicio (luego hay que multiplicar $\cdot \underbrace{2}_{\text{horario antihorario}} \cdot \underbrace{\text{largo ciclo}}_{\text{vértice de inicio}}$)

3 - ciclos en W_3: 4

3 - ciclos en W_4: 3 (los Δ)

(c) 4 - ciclos en W_3: 4 

4 - ciclos en W_4: 5  

4 - ciclos en W_5: 5 

(f)

En general W_n tiene:

- Un ciclo de largo n (el círculo) y además
- n ciclos de largo k si $3 \leq k \leq n+1$

En conclusión
si $k < 3$ no hay ciclos *
si $k = n$ hay $n+1$ ciclos *
en el resto de casos hay n ciclos *

* a menos de poner vértice de inicio y orientación.