Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 9

Grafos II: Grado, isomorfismo, árboles, caminos eulerianos y hamiltonianos

Definiciones y suposiciones:

- Todos los grafos de este práctico se suponen simples, es decir, sin aristas múltiples ni lazos.
- Un vértice es *aislado* si no es adyacente a ningún otro.
- El *grafo complemento* $\overline{G}$ de un grafo $G = (V, E)$ se define como $\overline{G} = (V, V^{(2)} \setminus E)$ donde $V^{(2)} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$. Un grafo G se dice *autocomplementario* si es isomorfo a $\overline{G}$.
- Si $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son dos grafos vértices disjuntos ($V_1 \cap V_2 = \varnothing$), entonces su *grafo unión* $G_1 \cup G_2$ se define como $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.
- Denotaremos $\kappa(G)$ a la cantidad de componentes conexas de G.
- Un grafo se dice *k–regular* si todos sus vértices tiene grado k. Un *vértice colgante* es un vértice de grado 1. Cuando el grafo es un árbol, también llamamos *hojas* a los vértices colgantes.

Grado

Ejercicio 1.

a. Determine el orden de un grafo 3–regular con 9 aristas.
b. Ídem con 10 aristas, dos vértices de grado 4 y los demás de grado 3.
c. ¿Existen tales grafos? En caso afirmativo construirlos.

Ejercicio 2. En una clase con 9 alumnos, cada alumno le manda 3 tarjetas de navidad a otros 3. ¿Es posible que cada alumno reciba tarjetas de los mismos 3 compañeros a los cuales él le mando una?

Ejercicio 3. Sea G un grafo con n vértices. ¿Cuántos vértices de $\overline{G}$ tienen grado par si G tiene un sólo vértice de grado par?

Ejercicio 4. ¿Cuál es el máximo orden posible para un grafo con 17 aristas si todos sus vértices tienen grado mayor o igual a 3?

¿Existe algún grafo con dicha cantidad de vértices? En caso afirmativo construirlo.

Ejercicio 5. Para todo natural par $n \geq 4$ construya un grafo conexo 3–regular con n vértices.

Ejercicio 6. (Examen diciembre 2016 Ej6)
Demuestre que todo grafo conexo con 2 o más vértices tiene dos vértices con el mismo grado.

Isomorfismo

Ejercicio 7.

a. Demuestre que dos grafos son isomorfos si y solo si sus grafos complemento lo son.

b. ¿Cuáles de los grafos de la Figura 1 son isomorfos?

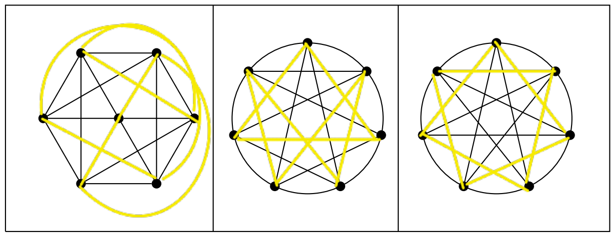


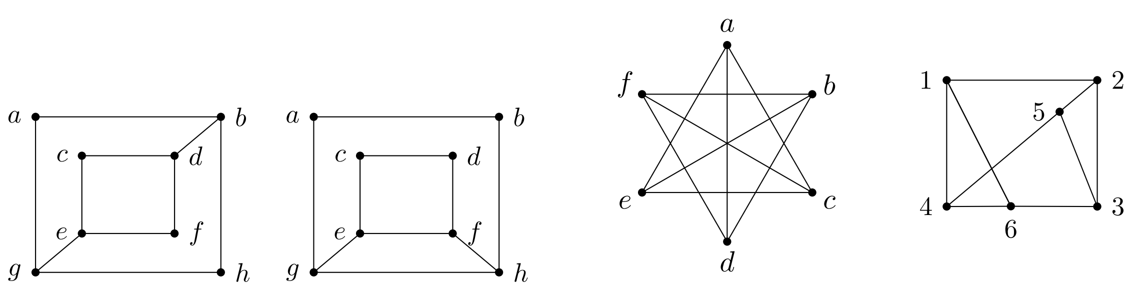
Figura 1

c. Determine el número de aristas de $\overline{G}$ en función del número de aristas de G.

d. Determine el número de aristas de un grafo autocomplementario de orden n.

e. Construya un grafo autocomplementario de orden 4 y otro de orden 5.

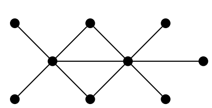
Ejercicio 8. Para cada par de grafos de la Figura 2 determine si los grafos son o no isomorfos.



(a) **(b)**

Figura 2

Ejercicio 9. (2do parcial 2001) Halle el número de subgrafos conexos recubridores del grafo de la figura, a menos de isomorfismos.



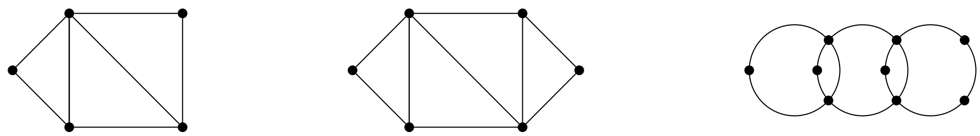


Figura 3

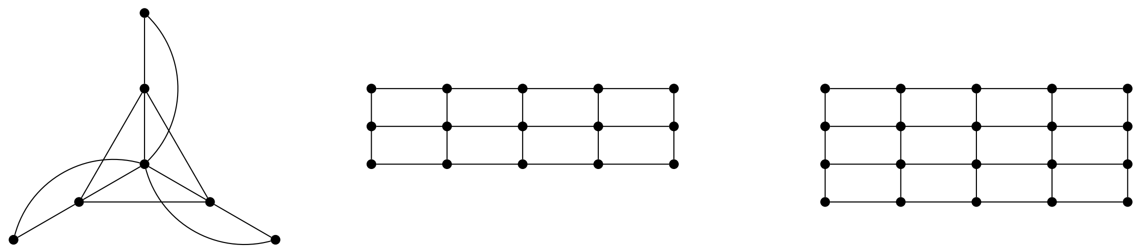


Figura 4

Ejercicios Complementarios

Ejercicio 24. (Examen febrero 2009) ¿Cuántos vértices tiene un árbol con 16 vértices de grado 1, 20 vértices de grado 2 y el resto de grado 4?

Ejercicio 25. (Examen 2003) Halle el máximo número de aristas que se le puede quitar a K_6 sin que el grafo deje de ser conexo.

Ejercicio 26. (Parcial 2001) Sea G un grafo acíclico, con n vértices y k componentes conexas. Hallar cuantas aristas tienen G.

Ejercicio 27. (Examen febrero 2010) Dados $k \geq 2$, $v \geq 3$ y un grafo G, k-regular con v vértices diga cuáles de las siguientes es condición suficiente para que G tenga un ciclo Hamiltoniano.
a) $2k \geq v$; b) $k \leq v$; c) $2k < v$; d) $2k \neq v$

Ejercicio 28. Pruebe que K_n posee tres subgrafos dos a dos isomorfos cuyos conjuntos de aristas son una partición del conjunto de aristas de K_n si y sólo si n es de la forma $3k$ o $3k + 1$.

Ejercicio 2. En una clase con 9 alumnos, cada alumno le manda 3 tarjetas de navidad a otros 3. ¿Es posible que cada alumno reciba tarjetas de los mismos 3 compañeros a los cuales él le mando una?

Sea G el grafo cuyos vértices son los 9 alumnos y v_1 es adyacente a v_2 si intercambian tarjetas.
Queremos responder si es posible que este grafo sea 3-regular.

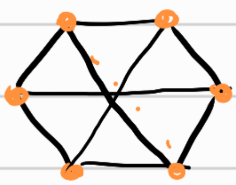
$$\sum_{v \in V} \underbrace{gr(v)}_{3} = 2|E|$$

$$\underset{\text{impar}}{27} = 3 \cdot 9 = \underset{\text{par}}{2|E|}$$

No existe tal grafo.

Ejercicio 5. Para todo natural par $n \geq 4$ construya un grafo conexo 3–regular con n vértices.

Hacemos un n-ciclo



· Agregamos una arista uniendo cada par de vértices opuestos.

Ejercicio 6. (Examen diciembre 2016 Ej6)

Demuestre que todo grafo conexo con 2 o más vértices tiene dos vértices con el mismo grado.

Sea G conexo con n vértices $\Rightarrow$ un vértice puede tener grado $1, 2, \dots, n-1$ (no puede tener grado 0 porque el grafo es conexo)

$\Rightarrow$ Hay n vértices y $n-1$ posibles grados $\Rightarrow$ por Palomar hay dos vértices con el mismo grado.

¿Qué pasa si G no fuera necesariamente conexo? Cada vértice puede tener grado $0, 1, 2, \dots, n-1$.

$\Rightarrow$ si no repitiera tendría un vértice de cada grado $\Rightarrow$ tendría uno de grado 0 y uno de grado $n-1$, pero esto no es posible.

Ejercicio 8. Para cada par de grafos de la Figura 2 determine si los grafos son o no isomorfos.

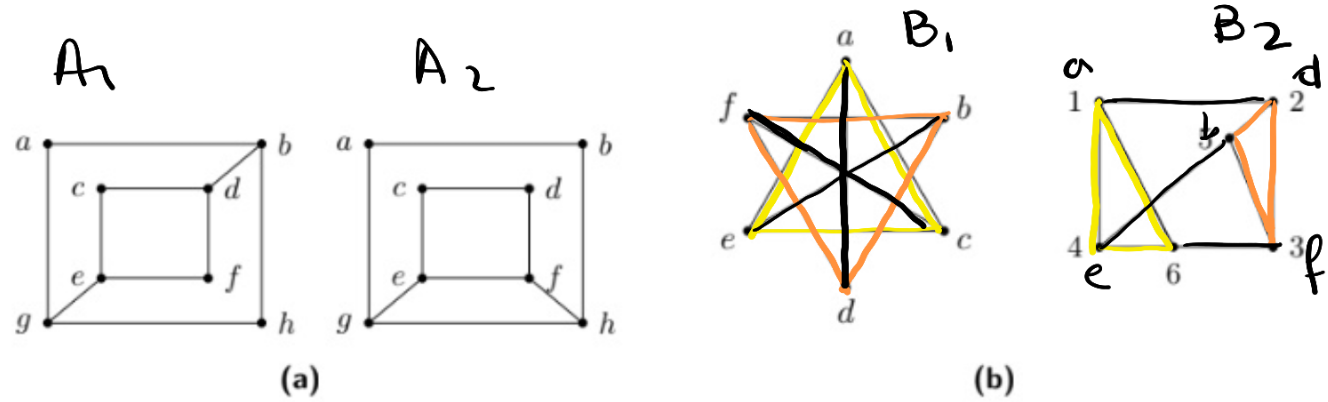


Figura 2

Dos grafos $G=(V,E)$ y $G'=(V',E')$ son isomorfos si existe $\phi: V \to V'$ biyectiva tal que $\{v,w\}\in E$ si y sólo si $\{\phi(v),\phi(w)\}\in E'$.

A_1 y A_2 no son isomorfos.

* En A_2 hay vértices de grado 3 conectados a dos de grado 3 y en A_1 no.

* En A_1 hay más 6-ciclos que en A_2

* En A_2 tenemos un 8-ciclo y en A_1 no

B_1 y B_2 sí son isomorfos, por ejemplo $\phi: V \to V'$ dado por

$a \overset{\phi}{\mapsto} 1$ $\quad d \overset{\phi}{\mapsto} 2$

$b \overset{\phi}{\mapsto} 5$ $\quad e \overset{\phi}{\mapsto} 4$

$c \overset{\phi}{\mapsto} 6$ $\quad f \overset{\phi}{\mapsto} 3$

es un isomorfismo.

- El *grafo complemento* $\overline{G}$ de un grafo $G = (V, E)$ se define como $\overline{G} = (V, V^{(2)} \setminus E)$ donde $V^{(2)} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$. Un grafo G se dice *autocomplementario* si es isomorfo a $\overline{G}$.

G y G' son isomorfos si y sólo si sus grafos complementarios lo son:

Si $\phi : V \to V'$ es una biyección / $\{v,w\} \in E$ sii $\{\phi(v), \phi(w)\} \in E'$ $\Rightarrow$ la misma biyección ϕ muestra que $\overline{G}$ y $\overline{G'}$ son isomorfos:

Sea $\{v,w\}$ una arista de $\overline{G}$ $\Rightarrow$ $\{v,w\} \notin E$ $\Rightarrow$ $\{\phi(v), \phi(w)\} \notin E'$ $\Rightarrow$ $\{\phi(v), \phi(w)\}$ es una arista de $\overline{G'}$. ∎