Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 9

Grafos II: Grado, isomorfismo, árboles, caminos eulerianos y hamiltonianos

Definiciones y suposiciones:

- Todos los grafos de este práctico se suponen simples, es decir, sin aristas múltiples ni lazos.
- Un vértice es *aislado* si no es adyacente a ningún otro.
- El *grafo complemento* $\overline{G}$ de un grafo $G = (V, E)$ se define como $\overline{G} = (V, V^{(2)} \setminus E)$ donde $V^{(2)} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$. Un grafo G se dice *autocomplementario* si es isomorfo a $\overline{G}$.
- Si $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son dos grafos vértices disjuntos ($V_1 \cap V_2 = \varnothing$), entonces su *grafo unión* $G_1 \cup G_2$ se define como $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.
- Denotaremos $\kappa(G)$ a la cantidad de componentes conexas de G.
- Un grafo se dice k*–regular* si todos sus vértices tiene grado k. Un *vértice colgante* es un vértice de grado 1. Cuando el grafo es un árbol, también llamamos *hojas* a los vértices colgantes.

Grado

Ejercicio 1.

a. Determine el orden de un grafo 3–regular con 9 aristas.
b. Ídem con 10 aristas, dos vértices de grado 4 y los demás de grado 3.
c. ¿Existen tales grafos? En caso afirmativo construirlos.

Ejercicio 2. En una clase con 9 alumnos, cada alumno le manda 3 tarjetas de navidad a otros 3. ¿Es posible que cada alumno reciba tarjetas de los mismos 3 compañeros a los cuales él le mando una?

Ejercicio 3. Sea G un grafo con n vértices. ¿Cuántos vértices de $\overline{G}$ tienen grado par si G tiene un sólo vértice de grado par?

Ejercicio 4. ¿Cuál es el máximo orden posible para un grafo con 17 aristas si todos sus vértices tienen grado mayor o igual a 3?

¿Existe algún grafo con dicha cantidad de vértices? En caso afirmativo construirlo.

Ejercicio 5. Para todo natural par $n \geq 4$ construya un grafo conexo 3–regular con n vértices.

Ejercicio 6. (Examen diciembre 2016 Ej6)
Demuestre que todo grafo conexo con 2 o más vértices tiene dos vértices con el mismo grado.

Isomorfismo

Ejercicio 7.

a. Demuestre que dos grafos son isomorfos si y solo si sus grafos complemento lo son.

b. ¿Cuáles de los grafos de la Figura 1 son isomorfos?

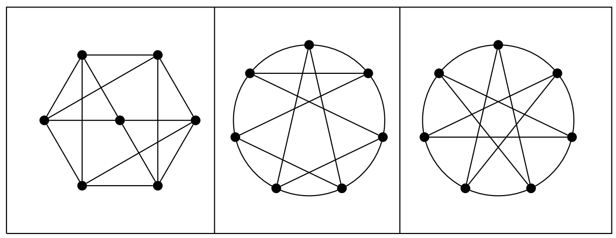


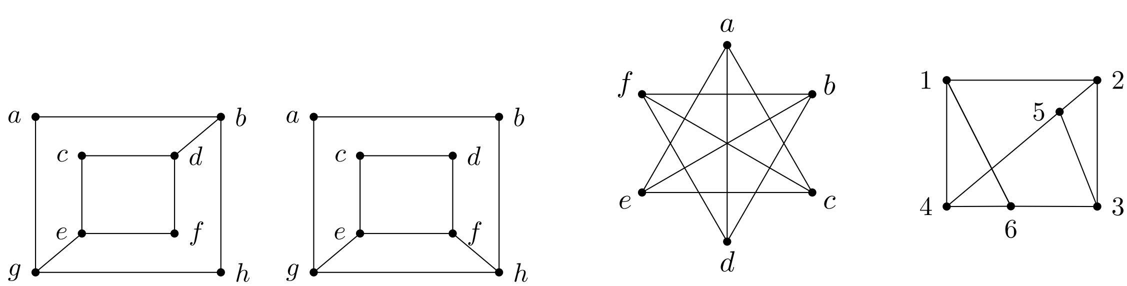
Figura 1

c. Determine el número de aristas de $\overline{G}$ en función del número de aristas de G.

d. Determine el número de aristas de un grafo autocomplementario de orden n.

e. Construya un grafo autocomplementario de orden 4 y otro de orden 5.

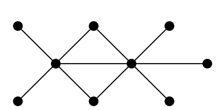
Ejercicio 8. Para cada par de grafos de la Figura 2 determine si los grafos son o no isomorfos.



(a) **(b)**

Figura 2

Ejercicio 9. (2do parcial 2001) Halle el número de subgrafos conexos recubridores del grafo de la figura, a menos de isomorfismos.



Árboles

Ejercicio 10. Encuentre todos los árboles con 6 vértices, a menos de isomorfismos. ¿Cuáles de estos árboles son árboles recubridores de $K_{3,3}$?

Ejercicio 11. Sean $T_1 = (V_1, E_1)$ y $T_2 = (V_2, E_2)$ dos árboles. Determine $|V_1|, |V_2|$ y $|E_2|$ si se sabe que $|E_1| = 17$ y $|V_2| = 2|V_1|$.

Ejercicio 12. Un bosque es un grafo acìclico (equivalentemente, sus componentes conexas son árboles).

a. Sea $F_1 = (V_1, E_1)$ un bosque de siete árboles con $|E_1| = 40$. ¿Cuánto vale $|V_1|$?

b. Si $F_2 = (V_2, E_2)$ es un bosque con $|V_2| = 62$ y $|E_2| = 51$, ¿cuántos árboles determina F_2?

Ejercicio 13. ¿Cuántas hojas (vértices colgantes) tiene un árbol con cuatro vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y uno de grado 5?

Ejercicio 14. ¿Qué tipo de árboles tiene exactamente dos hojas?

Ejercicio 15. De un ejemplo de un grafo G que no sea un árbol y que tenga un vértice más que el número de aristas. Pruebe que cualquier grafo que verifique las condiciones anteriores no puede ser conexo (sug: considere un árbol recubridor).

Ejercicio 16. Demuestre que la cantidad de componentes conexas de un grafo con n vértices y m aristas es mayor o igual a $n - m$ (sug: considere un bosque recubridor). ¿Cuándo se da la igualdad?

Ejercicio 17. ¿Cuál es la máxima cantidad de vértices que puede tener un grafo conexo con 30 aristas?

Circuitos y Recorridos Eulerianos, Ciclos y Caminos Hamiltonianos

Ejercicio 18. Encuentre un recorrido euleriano para $G = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ y $E = \{ab, ac, ai, aj, bc, cd, ci, de, df, dg, dh, ef, fg, fh, gh, hi, ij\}$.

Ejercicio 19.

a. Determine los valores de n para los cuales el grafo completo K_n tendrá un circuito euleriano.

b. ¿Para cuáles n tiene K_n un recorrido euleriano?

Ejercicio 20. Encuentre la longitud máxima de un recorrido en a) K_6; b) K_8; c) K_{10}; d) K_{2n}, $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 21. Sea $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$ los conjuntos de grafos Eulerianos y Hamiltonianos respectivamente. Dé un ejemplo de un grafo en $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$, otro en $\mathcal{H} \setminus \mathcal{E}$ y otro en $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}$.

Ejercicio 22. Halle un recorrido o un circuito euleriano para cada grafo de la Figura 3 o demuestre que no existe.

Ejercicio 23. Encuentre un ciclo Hamiltoniano, si existe, para cada grafo de la Figura 4.

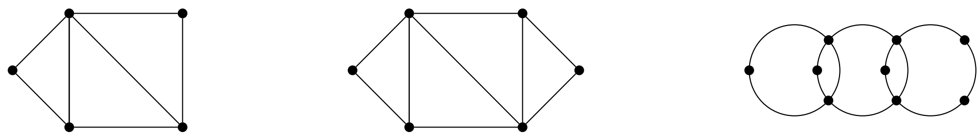


Figura 3

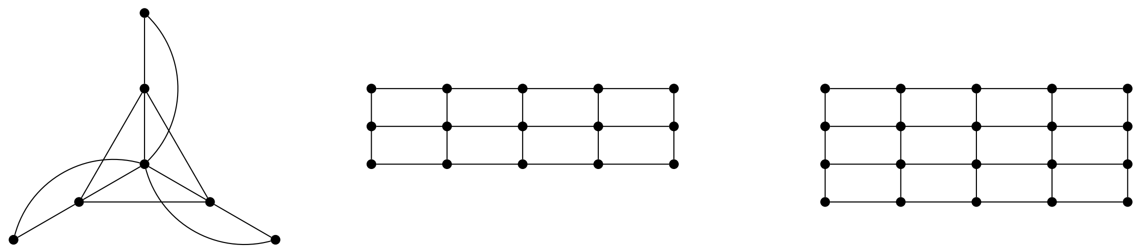


Figura 4

Ejercicios Complementarios

Ejercicio 24. (Examen febrero 2009) ¿Cuántos vértices tiene un árbol con 16 vértices de grado 1, 20 vértices de grado 2 y el resto de grado 4?

Ejercicio 25. (Examen 2003) Halle el máximo número de aristas que se le puede quitar a K_6 sin que el grafo deje de ser conexo.

Ejercicio 26. (Parcial 2001) Sea G un grafo acíclico, con n vértices y k componentes conexas. Hallar cuantas aristas tienen G.

Ejercicio 27. (Examen febrero 2010) Dados $k \geq 2$, $v \geq 3$ y un grafo G, k-regular con v vértices diga cuáles de las siguientes es condición suficiente para que G tenga un ciclo Hamiltoniano.
a) $2k \geq v$; b) $k \leq v$; c) $2k < v$; d) $2k \neq v$

Ejercicio 28. Pruebe que K_n posee tres subgrafos dos a dos isomorfos cuyos conjuntos de aristas son una partición del conjunto de aristas de K_n si y sólo si n es de la forma $3k$ o $3k + 1$.

Ejercicio 1.

a. Determine el orden de un grafo 3–regular con 9 aristas.

b. Ídem con 10 aristas, dos vértices de grado 4 y los demás de grado 3.

c. ¿Existen tales grafos? En caso afirmativo construirlos.

(a) $\sum_{v \in V} \underbrace{gr(v)}_{3} = 2|E| = 18$

$|V| = \frac{18}{3} = 6$

(b) $2 \cdot 4 + (|V| - 2)3 = 2 \cdot 10 = 20$

$8 + 3|V| - 6 = 20$

$3|V| = 18$

$|V| = 6$

v_1, v_2 de grado 4

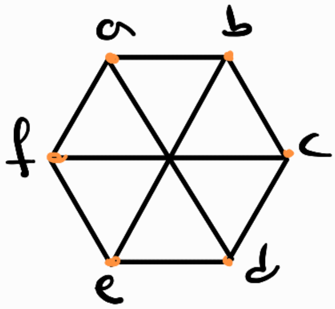
El resto de grado 3

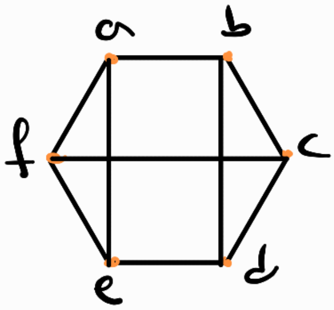
$$\sum_{v \in V} gr(v) = gr(v_1) + gr(v_2) + \sum_{\substack{v \in V \\ v \neq v_1 \\ v \neq v_2}} gr(v)$$

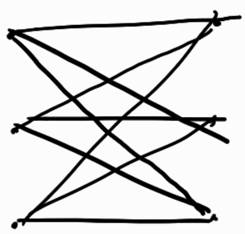
$$= 2 \cdot 4 + 3 \cdot \sum_{\substack{v \in V \\ v \neq v_1 \\ v \neq v_2}} 1$$

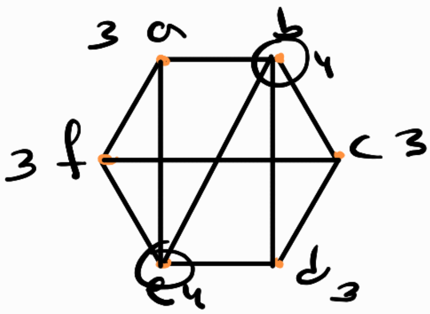
$$= 2 \cdot 4 + (|V| - 2)3 .$$

(c)









Ejercicio 2. En una clase con 9 alumnos, cada alumno le manda 3 tarjetas de navidad a otros 3. ¿Es posible que cada alumno reciba tarjetas de los mismos 3 compañeros a los cuales él le mando una?

Sea G el grafo donde $V = \{alumnos\}$ y agregamos la arista (u,v) si u y v intercambian tarjetas.

Queremos ver si es posible que G sea 3-regular.

$$\sum_{v \in V} \overset{\to 3}{gr(v)} = 2|E|$$

$$\Rightarrow \underbrace{3 \cdot 9}_{impar} = \underbrace{2|E|}_{par} \quad \times$$

No es posible.

Ejercicio 6. (Examen diciembre 2016 Ej6)
Demuestre que todo grafo conexo con 2 o más vértices tiene dos vértices con el mismo grado.

Si G es un grafo con n vértices.
Un vértice fijo puede tener grado: $0, 1, \ldots, n-1$
Entonces hay n posibles grados $\neq$.
Si todos tienen grado $\neq$ hay uno de grado 0 y uno de grado $n-1$, esto es absurdo.
(el de grado $n-1$ es adyacente a todos
el de grado 0 es un vértice aislado)

No usamos la hipótesis G conexo.
En G conexo no podríamos tener un vértice de grado 0.

Ejercicio 4. ¿Cuál es el máximo orden posible para un grafo con 17 aristas si todos sus vértices tienen grado mayor o igual a 3? 11

¿Existe algún grafo con dicha cantidad de vértices? En caso afirmativo construirlo. Si.

$$\sum_{v \in V} gr(v) = 2 \cdot 17 = 34$$

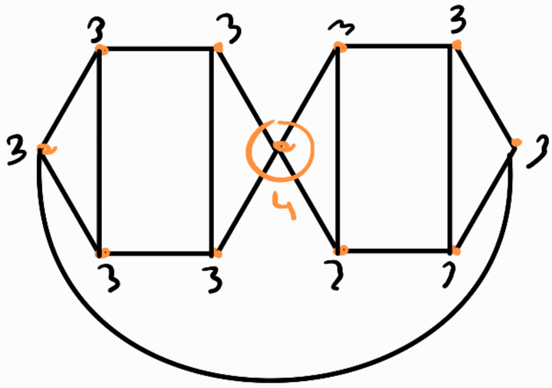
y a su vez

$$\sum_{v \in V} \overset{\geq 3}{gr(v)} \geq 3|V|$$

$\Rightarrow$ El nº maximo de vértices posible es

$$\left\lfloor \frac{34}{3} \right\rfloor = 11$$

y en ese caso hay 10 vértices de grado 3 y uno de grado 4.

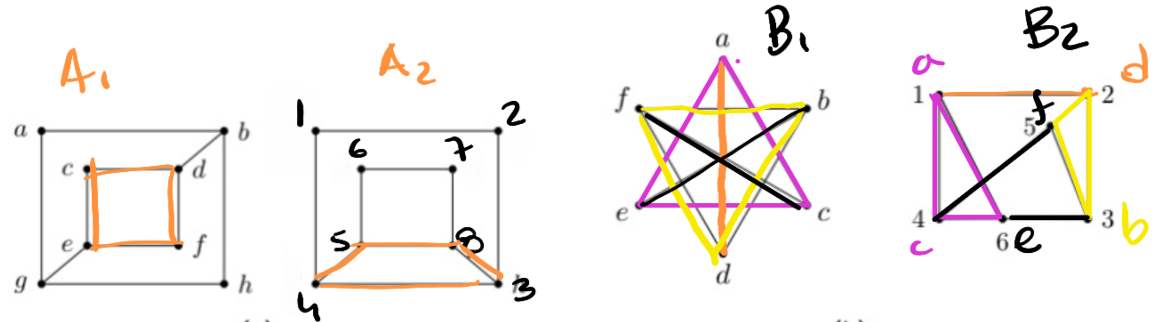


$G = (V, E)$

$G' = (V', E')$

G y G' son isomorfos si existe $\phi: V \to V'$ biyectiva / $\{v,w\} \in E \iff \{\phi(v), \phi(w)\} \in E'$.

Ejercicio 8. Para cada par de grafos de la Figura 2 determine si los grafos son o no isomorfos.



(a) (b)

A_1 y A_2 no son isomorfos

* En A_2 hay un 8-ciclo y en A_1 no

* En A_2 hay más 4-ciclos que en A_1.

* En A_2 hay un vértice adya dos de grado 3 y en A_1 no.

A_i y B_j no son iso, no tienen mismo nº de vértices.