Árboles

Ejercicio 10. Encuentre todos los árboles con 6 vértices, a menos de isomorfismos. ¿Cuáles de estos árboles son árboles recubridores de $K_{3,3}$?

Ejercicio 11. Sean $T_1 = (V_1, E_1)$ y $T_2 = (V_2, E_2)$ dos árboles. Determine $|V_1|, |V_2|$ y $|E_2|$ si se sabe que $|E_1| = 17$ y $|V_2| = 2|V_1|$.

Ejercicio 12. Un bosque es un grafo acìclico (equivalentemente, sus componentes conexas son árboles).

a. Sea $F_1 = (V_1, E_1)$ un bosque de siete árboles con $|E_1| = 40$. ¿Cuánto vale $|V_1|$?

b. Si $F_2 = (V_2, E_2)$ es un bosque con $|V_2| = 62$ y $|E_2| = 51$, ¿cuántos árboles determina F_2?

Ejercicio 13. ¿Cuántas hojas (vértices colgantes) tiene un árbol con cuatro vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y uno de grado 5?

Ejercicio 14. ¿Qué tipo de árboles tiene exactamente dos hojas?

Ejercicio 15. De un ejemplo de un grafo G que no sea un árbol y que tenga un vértice más que el número de aristas. Pruebe que cualquier grafo que verifique las condiciones anteriores no puede ser conexo (sug: considere un árbol recubridor).

Ejercicio 16. Demuestre que la cantidad de componentes conexas de un grafo con n vértices y m aristas es mayor o igual a $n - m$ (sug: considere un bosque recubridor). ¿Cuándo se da la igualdad?

Ejercicio 17. ¿Cuál es la máxima cantidad de vértices que puede tener un grafo conexo con 30 aristas?

Circuitos y Recorridos Eulerianos, Ciclos y Caminos Hamiltonianos

Ejercicio 18. Encuentre un recorrido euleriano para $G = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ y $E = \{ab, ac, ai, aj, bc, cd, ci, de, df, dg, dh, ef, fg, fh, gh, hi, ij\}$.

Ejercicio 19.

a. Determine los valores de n para los cuales el grafo completo K_n tendrá un circuito euleriano.

b. ¿Para cuáles n tiene K_n un recorrido euleriano?

Ejercicio 20. Encuentre la longitud máxima de un recorrido en a) K_6; b) K_8; c) K_{10}; d) K_{2n}, $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 21. Sea $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$ los conjuntos de grafos Eulerianos y Hamiltonianos respectivamente. Dé un ejemplo de un grafo en $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$, otro en $\mathcal{H} \setminus \mathcal{E}$ y otro en $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}$.

Ejercicio 22. Halle un recorrido o un circuito euleriano para cada grafo de la Figura 3 o demuestre que no existe.

Ejercicio 23. Encuentre un ciclo Hamiltoniano, si existe, para cada grafo de la Figura 4.

Árbol: grafo conexo sin ciclos.

$|V| = |E| + 1$

En gral. vale esta fórmula: $\sum_{v \in V} gr\, v = 2|E|$.

Ejercicio 11. Sean $T_1 = (V_1, E_1)$ y $T_2 = (V_2, E_2)$ dos árboles. Determine $|V_1|, |V_2|$ y $|E_2|$ si se sabe que $|E_1| = 17$ y $|V_2| = 2|V_1|$.

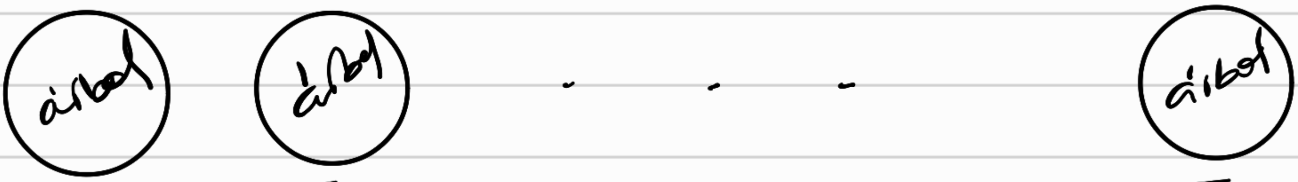
$|E_1| = 17 \Rightarrow |V_1| = 18 \Rightarrow |V_2| = 36 \Rightarrow |E_2| = 35$.

Ejercicio 12. Un bosque es un grafo acìclico (equivalentemente, sus componentes conexas son árboles).

a. Sea $F_1 = (V_1, E_1)$ un bosque de siete árboles con $|E_1| = 40$. ¿Cuánto vale $|V_1|$?

b. Si $F_2 = (V_2, E_2)$ es un bosque con $|V_2| = 62$ y $|E_2| = 51$, ¿cuántos árboles determina F_2?

(a)



$T_1 = (V_1', E_1')$ $\quad$ $T_2 = (V_2', E_2')$ $\quad$ $T_7 = (V_7', E_7')$

$|V_i'| = |E_i'| + 1$

Hay un vértice mas que aristas por componente conexas $\Rightarrow |V_1| = |E_1| + \kappa(F_1) = 40 + 7 = 47$.

$$V_1 = \sum_{n=0}^{7} |V_i'| = \sum_{n=0}^{7} (|E_i'| + 1) = \sum_{n=0}^{7} |E_i'| + 7 = 47.$$

(b)

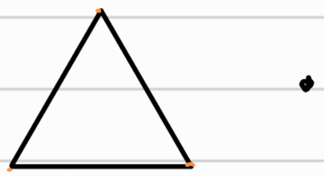
$|V_2| = |E_2| + \kappa(F_2)$

$\;\;62 \quad\;\; 51$ $\quad \rightarrow$ hay 11 árboles

$$62 = \sum_{i=0}^{n} v_i' = \sum_{i=0}^{n} 6_i' + n = 51 + n$$
$$\Rightarrow n = 11.$$

Ejercicio 15. De un ejemplo de un grafo G que no sea un árbol y que tenga un vértice más que el número de aristas. Pruebe que cualquier grafo que verifique las condiciones anteriores no puede ser conexo (sug: considere un árbol recubridor).

Ejemplo:

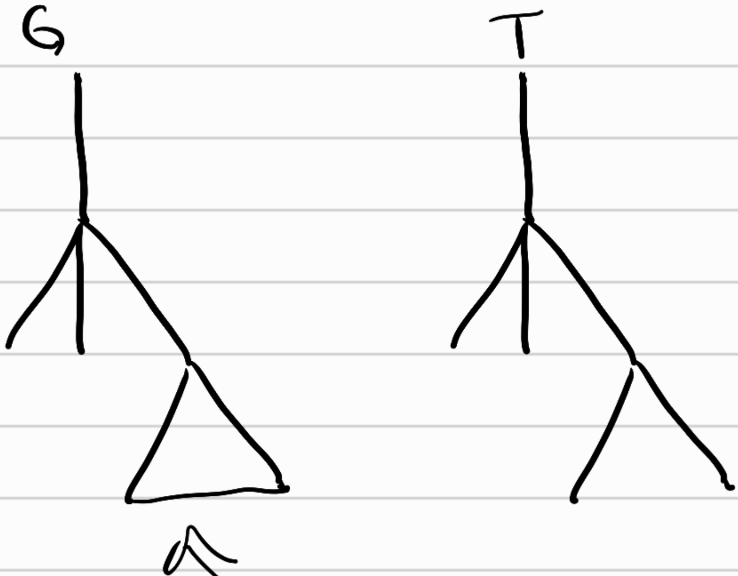


Cualquier grafo en esas condiciones no puede ser conexo:

Supongamos por absurdo que G es un grafo conexo, que no es árbol y que tiene n aristas y n+1 vértices.
Consideremos T un árbol recubridor ⇒ es un subgrafo recubridor ⇒ • tiene los n+1 vértices de G
• el cjto. de aristas de T es un subconjunto del cjto. de aristas de G
y como T es un árbol ⇒ T tiene n aristas
⇒ T = G ⇒ G es un árbol ↯.

Ejercicio 17. ¿Cuál es la máxima cantidad de vértices que puede tener un grafo conexo con 30 aristas?

Sea G un grafo conexo con 30 aristas ⇒ existe T un árbol recubridor (en part. tiene los mismos vértices que G), T tiene a lo más 30 aristas y 31 vértices ⇒ la max. cant. posible es 31 y se da cuando el grafo es un árbol.



max 30 aristas
⇒ max 31 vértices

max 31 vértices.

Ejercicio 1.

a. Determine el orden de un grafo 3–regular con 9 aristas.

b. Ídem con 10 aristas, dos vértices de grado 4 y los demás de grado 3.

c. ¿Existen tales grafos? En caso afirmativo construirlos.

(a)

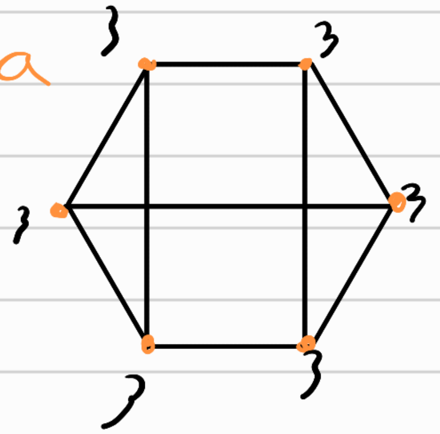
$$\sum_{v\in V} \underbrace{gr(v)}_{3} = 2\cdot 9 = 18$$

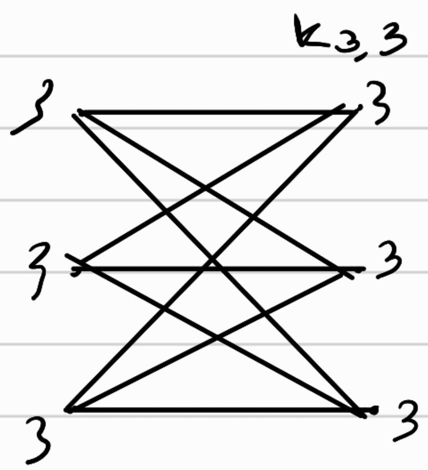
$$\Rightarrow \quad 3|V| = 18 \quad \Rightarrow |V| = 6$$

(b) $\sum_{v\in V} gr(v) = 2\cdot 10 = 20$

$$4 + 4 + (|V|-2)3 = 20$$
$$8 + 3|V| - 6 = 20$$
$$3|V| = 18$$
$$|V| = 6$$

(c) 1a





1b