Ejercicio 10. Sea G el grafo de la Figura 3 (a).

a. ¿Cuántos subgrafos conexos de G tienen 4 vértices e incluyen un ciclo?

b. Describa los subgrafos G_1 y G_2 de G (Figura 3 (b) y (c)) como subgrafos inducidos y en términos de la eliminación de vértices de G.

c. Trace el subgrafo de G inducido por el conjunto de vértices $U = \{b, c, d, f, i, j\}$.

d. Considere las aristas $e_1 = \{a, c\}$ y $e_2 = \{a, d\}$ del grafo G y trace el subgrafo $G - \{e_1, e_2\}$.

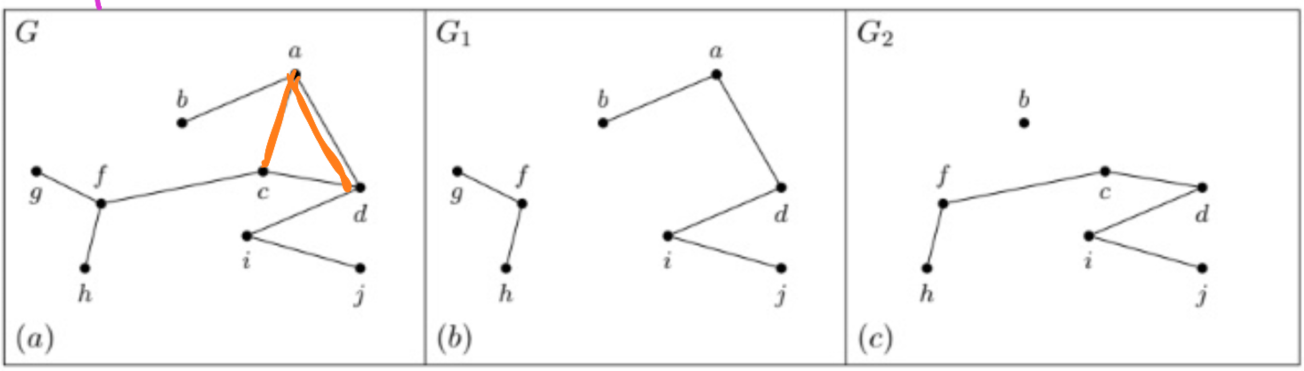
e. Encuentre un subgrafo de G que no sea inducido.

f. ¿Cuántos subgrafos recubridores tiene G?

g. ¿Cuántos de los subgrafos anteriores son conexos?

h. ¿Cuántos subgrafos de la parte **g.** tienen el vértice a como vértice aislado?

nos faltaban estas partes.



a) Como tiene que contener el ciclo $(a, c, d, a) \Rightarrow$ tienen que estar los vértices a, c, d.

El cuarto vértice puede ser b, f, i

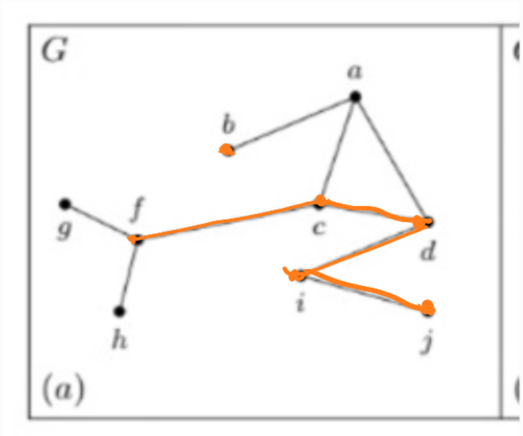
Opciones:
- $V = \{a, b, c, d\}$ — 1 grafo conexo
- $V = \{f, b, c, d\}$ — 1 grafo con.
- $V = \{i, b, c, d\}$ — 1 grafo con

3 grafos.

b) G_1 es el subgrafo inducido por $U = \{a, b, d, f, g, h, i, j\}$ $= G - c$

G_2 es el inducido por $\{b, c, d, f, h, i, j\}$

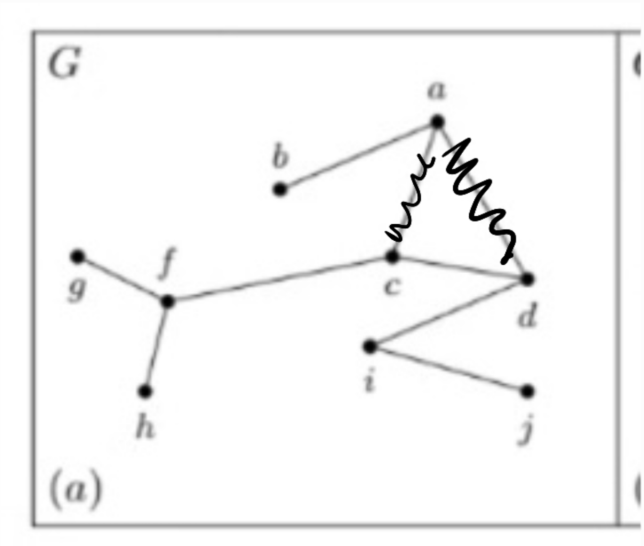
c)



G': Subgrafo inducido por U, U cjto. de vertices:

- Vértices de G' = U
- Aristas de G': todas las que tienen ambos extremos en U.

d)



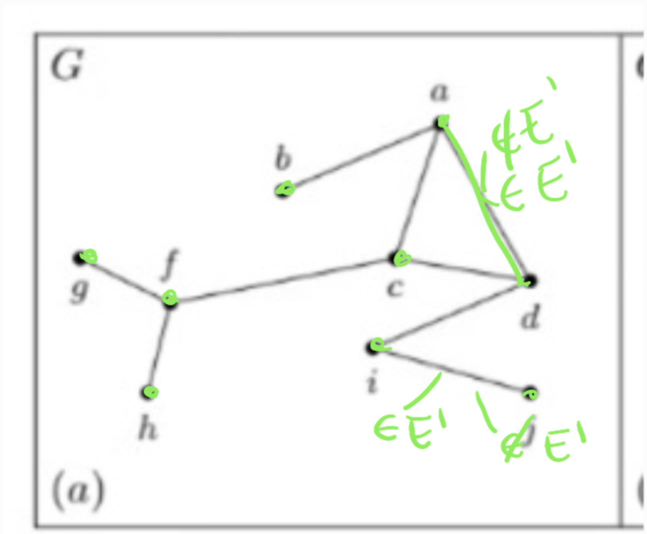
e) El subgrafo de la parte d) nos sirve porque tiene todos los vértices y no es G (el inducido por el cjto. de todos los vértices es el grafo original)

Otro ejemplo:

$V' = \{g, f, h\}$

$E' = \{\{gf\}\}$

f)



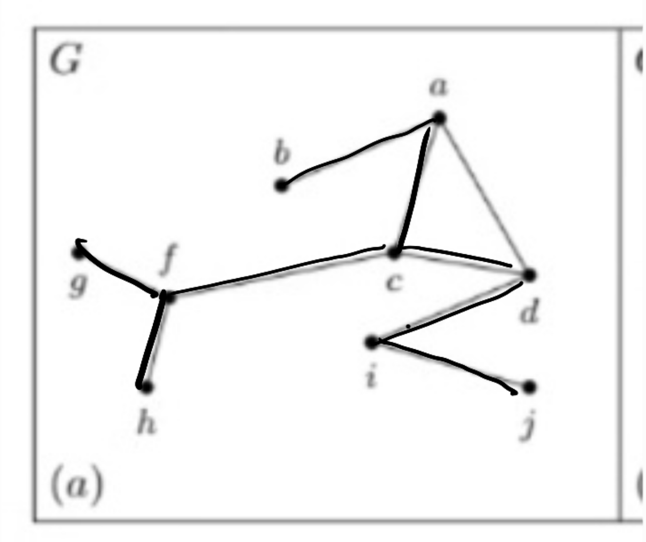
Obs:
Estamos abusando de notación y escribiendo $G=(V,E)$ sin la función ext porque seguimos con grafos simples.

$G' = (V', E')$ es recubridor si: $V' = V$

$E' \subseteq E$ cualquiera.

$\Rightarrow$ Es lo mismo contar subgrafos recubridores que #subcjtos de aristas: $2^{|E|} = 2^9$

g)



Para que el grafo sea conexo a lo sumo puede faltar una arista entre {a,c} {a,d}, {c,d}.

=> Tenemos 4 subgrafos recubridores conexos.

h) 0, si a es aislado en G => G no es conexo.

Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 9

Grafos II: Grado, isomorfismo, árboles, caminos eulerianos y hamiltonianos

Definiciones y suposiciones:

- Todos los grafos de este práctico se suponen simples, es decir, sin aristas múltiples ni lazos.
- Un vértice es *aislado* si no es adyacente a ningún otro.
- El *grafo complemento* $\overline{G}$ de un grafo $G = (V, E)$ se define como $\overline{G} = (V, V^{(2)} \setminus E)$ donde $V^{(2)} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$. Un grafo G se dice *autocomplementario* si es isomorfo a $\overline{G}$.
- Si $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son dos grafos vértices disjuntos ($V_1 \cap V_2 = \varnothing$), entonces su *grafo unión* $G_1 \cup G_2$ se define como $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.
- Denotaremos $\kappa(G)$ a la cantidad de componentes conexas de G.
- Un grafo se dice k*–regular* si todos sus vértices tiene grado k. Un *vértice colgante* es un vértice de grado 1. Cuando el grafo es un árbol, también llamamos *hojas* a los vértices colgantes.

Grado

Ejercicio 1.

a. Determine el orden de un grafo 3–regular con 9 aristas.
b. Ídem con 10 aristas, dos vértices de grado 4 y los demás de grado 3.
c. ¿Existen tales grafos? En caso afirmativo construirlos.

Ejercicio 2. En una clase con 9 alumnos, cada alumno le manda 3 tarjetas de navidad a otros 3. ¿Es posible que cada alumno reciba tarjetas de los mismos 3 compañeros a los cuales él le mando una?

Ejercicio 3. Sea G un grafo con n vértices. ¿Cuántos vértices de $\overline{G}$ tienen grado par si G tiene un sólo vértice de grado par?

Ejercicio 4. ¿Cuál es el máximo orden posible para un grafo con 17 aristas si todos sus vértices tienen grado mayor o igual a 3?

¿Existe algún grafo con dicha cantidad de vértices? En caso afirmativo construirlo.

Ejercicio 5. Para todo natural par $n \geq 4$ construya un grafo conexo 3–regular con n vértices.

Ejercicio 6. (Examen diciembre 2016 Ej6)
Demuestre que todo grafo conexo con 2 o más vértices tiene dos vértices con el mismo grado.

Árboles

Ejercicio 10. Encuentre todos los árboles con 6 vértices, a menos de isomorfismos. ¿Cuáles de estos árboles son árboles recubridores de $K_{3,3}$?

Ejercicio 11. Sean $T_1 = (V_1, E_1)$ y $T_2 = (V_2, E_2)$ dos árboles. Determine $|V_1|, |V_2|$ y $|E_2|$ si se sabe que $|E_1| = 17$ y $|V_2| = 2|V_1|$.

Ejercicio 12. Un bosque es un grafo acìclico (equivalentemente, sus componentes conexas son árboles).

a. Sea $F_1 = (V_1, E_1)$ un bosque de siete árboles con $|E_1| = 40$. ¿Cuánto vale $|V_1|$?

b. Si $F_2 = (V_2, E_2)$ es un bosque con $|V_2| = 62$ y $|E_2| = 51$, ¿cuántos árboles determina F_2?

Ejercicio 13. ¿Cuántas hojas (vértices colgantes) tiene un árbol con cuatro vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y uno de grado 5?

Ejercicio 14. ¿Qué tipo de árboles tiene exactamente dos hojas?

Ejercicio 15. De un ejemplo de un grafo G que no sea un árbol y que tenga un vértice más que el número de aristas. Pruebe que cualquier grafo que verifique las condiciones anteriores no puede ser conexo (sug: considere un árbol recubridor).

Ejercicio 16. Demuestre que la cantidad de componentes conexas de un grafo con n vértices y m aristas es mayor o igual a $n - m$ (sug: considere un bosque recubridor). ¿Cuándo se da la igualdad?

Ejercicio 17. ¿Cuál es la máxima cantidad de vértices que puede tener un grafo conexo con 30 aristas?

Circuitos y Recorridos Eulerianos, Ciclos y Caminos Hamiltonianos

Ejercicio 18. Encuentre un recorrido euleriano para $G = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ y $E = \{ab, ac, ai, aj, bc, cd, ci, de, df, dg, dh, ef, fg, fh, gh, hi, ij\}$.

Ejercicio 19.

a. Determine los valores de n para los cuales el grafo completo K_n tendrá un circuito euleriano.

b. ¿Para cuáles n tiene K_n un recorrido euleriano?

Ejercicio 20. Encuentre la longitud máxima de un recorrido en a) K_6; b) K_8; c) K_{10}; d) K_{2n}, $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 21. Sea $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$ los conjuntos de grafos Eulerianos y Hamiltonianos respectivamente. Dé un ejemplo de un grafo en $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$, otro en $\mathcal{H} \setminus \mathcal{E}$ y otro en $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}$.

Ejercicio 22. Halle un recorrido o un circuito euleriano para cada grafo de la Figura 3 o demuestre que no existe.

Ejercicio 23. Encuentre un ciclo Hamiltoniano, si existe, para cada grafo de la Figura 4.

Árbol: grafo conexo sin ciclos.

$G=(V,E)$ un árbol $\Rightarrow$ $|V|=|E|+1$

En un grafo cualquiera: 

$\sum_{v\in V} gr(v) = 2|E|$.

Ejercicio 11. Sean $T_1=(V_1,E_1)$ y $T_2=(V_2,E_2)$ dos árboles. Determine $|V_1|,|V_2|$ y $|E_2|$ si se sabe que $|E_1|=17$ y $|V_2|=2|V_1|$.

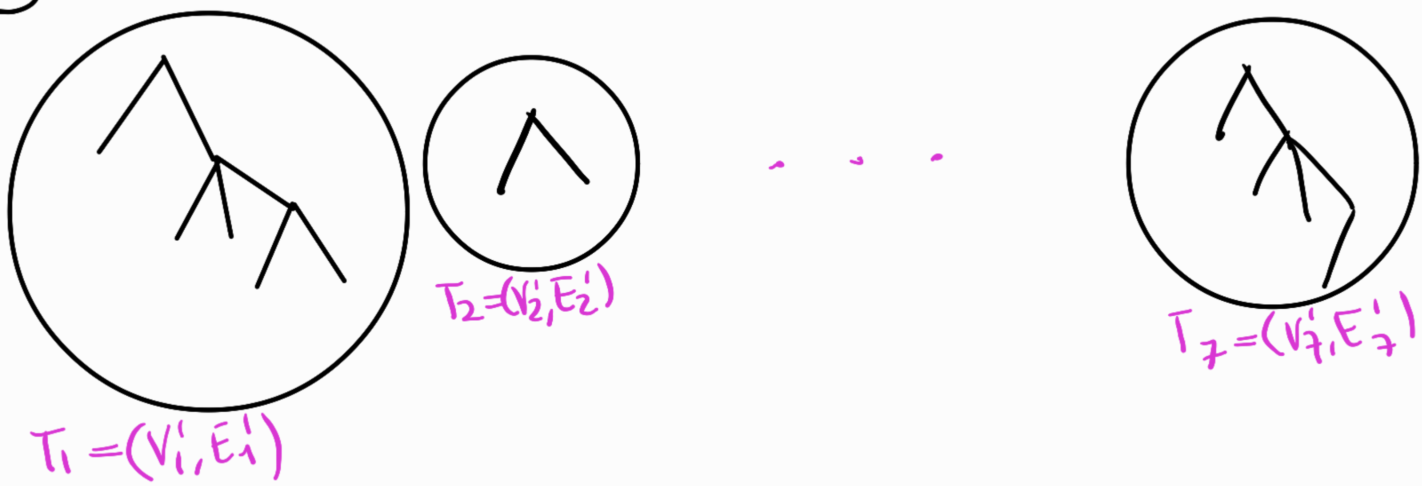
$|E_1|=17 \Rightarrow |V_1|=18 \Rightarrow |V_2|=36 \Rightarrow |E_2|=35$.

Ejercicio 12. Un bosque es un grafo acìclico (equivalentemente, sus componentes conexas son árboles).

a. Sea $F_1=(V_1,E_1)$ un bosque de siete árboles con $|E_1|=40$. ¿Cuánto vale $|V_1|$?

b. Si $F_2=(V_2,E_2)$ es un bosque con $|V_2|=62$ y $|E_2|=51$, ¿cuántos árboles determina F_2?

(a)



$$\Rightarrow |V| = \sum_{i=1}^{7} |V_i'| = \sum_{i=1}^{7} (|E_i'|+1) = \sum_{i=1}^{7} |E_i'| + 7 = 47.$$

(b)

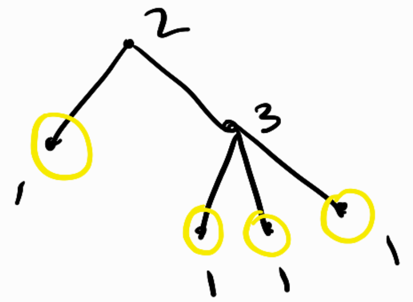
1 . . . $n = ¿?$

$$\Rightarrow |V_2| = \sum_{i=1}^{n} |V_i'| = \sum_{i=1} (|E_i'|+1) = n + |E_2|$$

$n = 11 \Rightarrow$ es un bosque de 11 árboles.

Ejercicio 14. ¿Qué tipo de árboles tiene exactamente dos hojas?

vértices con grado 1



¿Cuál es el grado de los otros vértices? $|V| = n$

$|V| = |E| + 1$ porque es un árbol.

$$\cancel{2}|E| = \sum_{v \in V} gr(v)$$

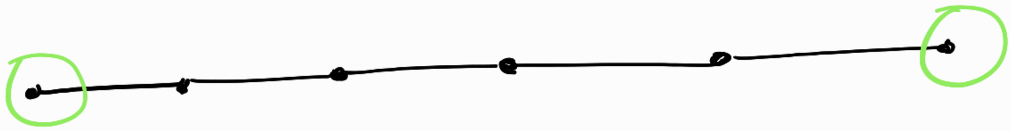
$$= \underbrace{\sum_{\substack{v \in V \\ gr(v)=1}} gr(v)}_{\text{hojas}} + \underbrace{\sum_{\substack{v \in V \\ gr(v)>1}} gr(v)}_{\text{no hojas}}$$

$$\geq 2 + \sum_{\substack{v \in V \\ gr(v)>1}} 2$$

$$\geq 2(1 + n - 2) = \cancel{2}(n-1)$$

$|E| = n-1 \Leftrightarrow$ los vértices que no son hojas tienen grado 2.

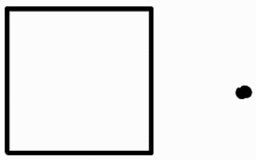
P_n: el grafo consiste de un cno. abierto de largo n.



Ejercicio 15. De un ejemplo de un grafo G que no sea un árbol y que tenga un vértice más que el número de aristas. Pruebe que cualquier grafo que verifique las condiciones anteriores no puede ser conexo (sug: considere un árbol recubridor).

↳ $G=(V,E)$ conexo $\Rightarrow$ $|V| = |E|+1 \iff$ es árbol.

<u>Ejemplo:</u>



Por absurdo: supongamos que tenemos un grafo conexo que no es un árbol y que tiene n aristas y n+1 vertices.

Sea T un árbol recubridor

$\Rightarrow$ tiene los n+1 vértices y es un árbol

$\Rightarrow$ tiene n aristas

$\Rightarrow$ T es el grafo original

$\Rightarrow$ era un árbol $\not\exists$.