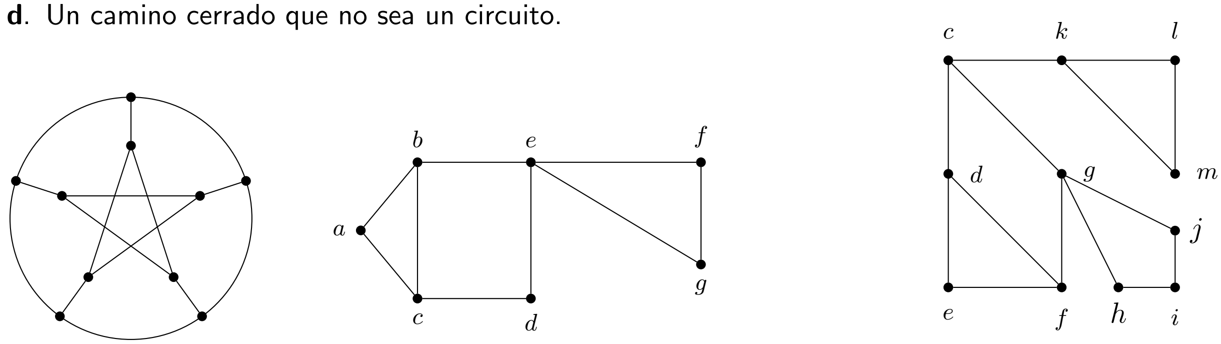
Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 8

Grafos I: Caminos, conexidad, subgrafos

Ejercicio 1. Para el grafo de la Figura 1 (ii), determine:

- **a**. Un camino abierto que no sea un recorrido.
- **b**. Un recorrido que no sea camino simple.
- **c**. Un camino simple de b a d de longitud 3.
- **d**. Un camino cerrado que no sea un circuito.
- **e**. Un circuito que no sea un ciclo.
- **f**. Todos los ciclos que pasan por b.
- **g**. Todos los caminos simples de b a f.



(i) Grafo de Petersen (ii) (iii)

Figure 1:

Ejercicio 2.

- **a**. ¿Cuál es la distancia entre el vértice d y los demás vértices del grafo de la Figura 1 (iii)?
- **b**. Halle el diámetro de K_n, $K_{n,m}$, P_n, C_n y del grafo de Petersen (Figura 1(i)).
- **c**. ¿Cuántos caminos simples tienen P_n y $K_{1,n}$?

Ejercicio 3. (1er parcial 2017) Sean x e y dos vértices adyacentes de C_{20}.
¿Cuántos caminos de largo 11 empiezan en x y terminan en y?

Ejercicio 4. ¿Cuántos caminos de largo n hay entre dos vértices opuestos de C_4?

Ejercicio 5. Para cada natural $n \geq 3$ se define el grafo *rueda de* n *rayos* como el grafo W_n con $n+1$ vértices v_0, v_1, ..., v_n, tal que v_0 es adyacente a todos los demás vértices y $v_1, \ldots, v_n, v_1$ es un ciclo. En la Figura 2 se muestra W_3, W_4 y W_5.

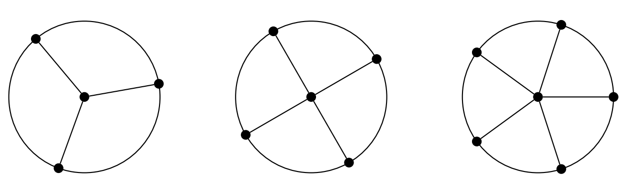


Figure 2:

a. ¿Cuántas aristas tiene W_n?
b. ¿Cuántos 3-ciclos tiene W_3? ¿y W_4?
c. ¿Cuántos 4-ciclos tienen W_3, W_4 y W_5?
d. Ídem para 5-ciclos.
e. Ídem para 6-ciclos.
f. Determine cuántos k-ciclos tiene W_n.

Ejercicio 6. Pruebe que dos caminos simples de la mayor longitud posible, en un grafo conexo, poseen un vértice en común.

Ejercicio 7. Sea G el grafo con conjunto de vértices $\{1, 2, \ldots, 15\}$ donde el vértice i es adyacente al j si y solo si su máximo común divisor es mayor que 1. ¿Cuántas componentes conexas tiene G?

Ejercicio 8. Encuentre un grafo G que tenga tres vértices u, v y w tales que

$$\kappa(G-u) = \kappa(G), \qquad \kappa(G-v) > \kappa(G), \qquad \kappa(G-w) < \kappa(G).$$

Ejercicio 9. Un hombre debe cruzar un perro, una oveja y una bolsa de repollos, a la otra margen del río, por medio de una canoa. El tamaño de la canoa no permite llevar más de un objeto a la vez. Además, no se puede dejar al perro sólo con la oveja ni a la oveja sola con la bolsa de repollos. Una secuencia de viajes se dice admisible si no se repite la misma configuración luego de uno o de dos viajes de ida y vuelta.

a. Indique una secuencia de viajes admisibles que cumpla el objetivo.
b. Encuentre una secuencia de viajes admisibles que cumpla el objetivo usando exactamente 9 viajes de ida y vuelta y un viaje solo de ida para terminar. ¿Y si cambiamos 9 viajes de ida y vuelta por 10 viajes de ida y vuelta es posible lograr el objetivo?

Sugerencia: asociar a cada configuración factible un vértice y unir dos vértices si se puede pasar de dicha disposición a la otra en un viaje de ida y vuelta, o un viaje solo de ida en el último paso.

Ejercicio 10. Sea G el grafo de la Figura 3 (a).

a. ¿Cuántos subgrafos conexos de G tienen 4 vértices e incluyen un ciclo?
b. Describa los subgrafos G_1 y G_2 de G (Figura 3 (b) y (c)) como subgrafos inducidos y en términos de la eliminación de vértices de G.
c. Trace el subgrafo de G inducido por el conjunto de vértices $U = \{b, c, d, f, i, j\}$.
d. Considere las aristas $e_1 = \{a, c\}$ y $e_2 = \{a, d\}$ del grafo G y trace el subgrafo $G - \{e_1, e_2\}$.
e. Encuentre un subgrafo de G que no sea inducido.
f. ¿Cuántos subgrafos recubridores tiene G?
g. ¿Cuántos de los subgrafos anteriores son conexos?
h. ¿Cuántos subgrafos de la parte **g.** tienen el vértice a como vértice aislado?

Ejercicio 11. (Examen marzo 2001)
El hipercubo H_n de dimensión n, es el grafo cuyos vértices son las n-uplas de ceros y unos, tales que dos n-uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas, por ejemplo $(0, 0, \ldots, 0)$ es adyacente a $(1, 0, \ldots, 0)$ pero no a $(1, 0, \ldots, 0, 1)$.

a. Halle los conjuntos de vértices de H_1, H_2, H_3 y dibuje dichos grafos.
b. ¿Cuántos vértices y aristas tiene H_n?
c. Halle 2 caminos simples en H_5 de $(0, 0, 1, 1, 0)$ a $(0, 0, 0, 1, 0)$.
d. Demuestre que H_n no tiene 3–ciclos.
e. ¿Cuántos 4–ciclos tiene H_n? (*Sugerencia*: cuente cuántos 4–ciclos pasan por un vértice fijo.)

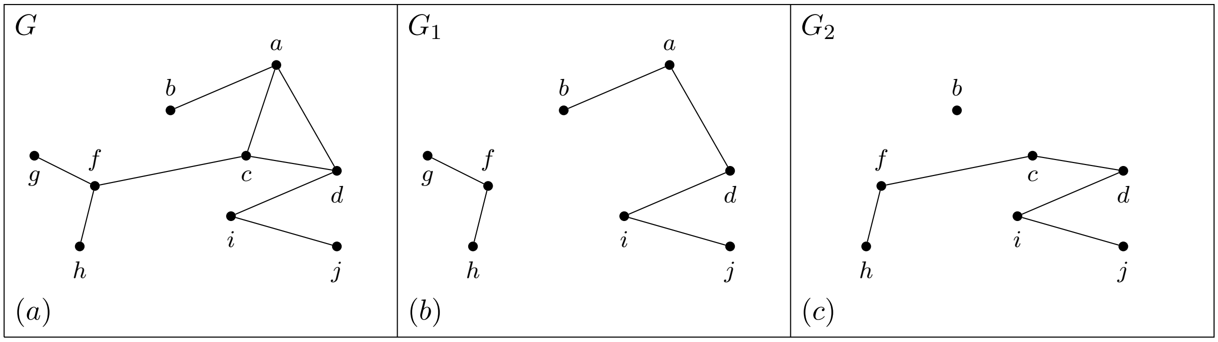


Figure 3:

Ejercicio 12. Sea G_n el grafo con vértices las n-uplas de 0s y 1s:

$$V(G_n) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \{0, 1\}\}$$

Dos n-uplas serán adyacentes si difieren en los valores de exactamente dos de sus posiciones, coincidiendo en el resto. Por ejemplo, en G_n, $(0,0,1)$ es adyacente a $(1,1,1)$ y a $(1,0,0)$, pero no a $(1,1,0)$.

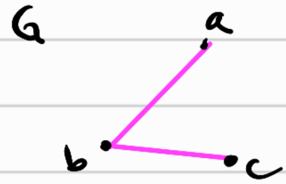
- **a**. Dibuje G_2, G_3 y G_1.
- **b**. ¿Para qué valores de n es G_n conexo?
- **c**. ¿Cuántas componentes conexas tiene G_n?

Sugerencia: sume los 1s de cada vértice.

Sean v, v' dos vértices de un grafo $G \rightarrow$

$$d(v,v') = \min\{\text{long } \alpha : \alpha \text{ cno de } v \text{ a } v' \text{, } \alpha = (v, \dots, v')\}$$

$$\text{diam}(G) = \max_{v,v'}\{d(v,v')\}$$



$d(a,b) = 1$

$d(b,c) = 1$

$d(a,c) = 2$

$\text{diam } G = 2$

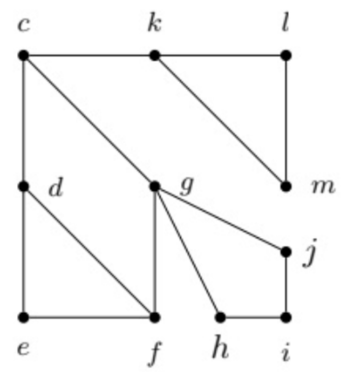
Ejercicio 2.

a. ¿Cuál es la distancia entre el vértice d y los demás vértices del grafo de la Figura 1 (iii)?

b. Halle el diámetro de K_n, $K_{n,m}$, P_n, C_n y del grafo de Petersen (Figura 1(i)).

c. ¿Cuántos caminos simples tienen P_n y $K_{1,n}$?

a)



(iii)

$d(d,c) = 1$

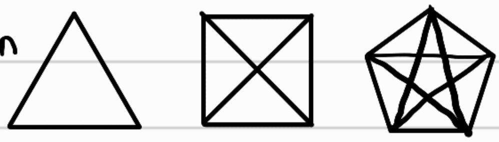
$d(d,k) = 2$

$d(d,h) = 3$

$d(d,m) = 3$

Falta completarlo.

b) K_n

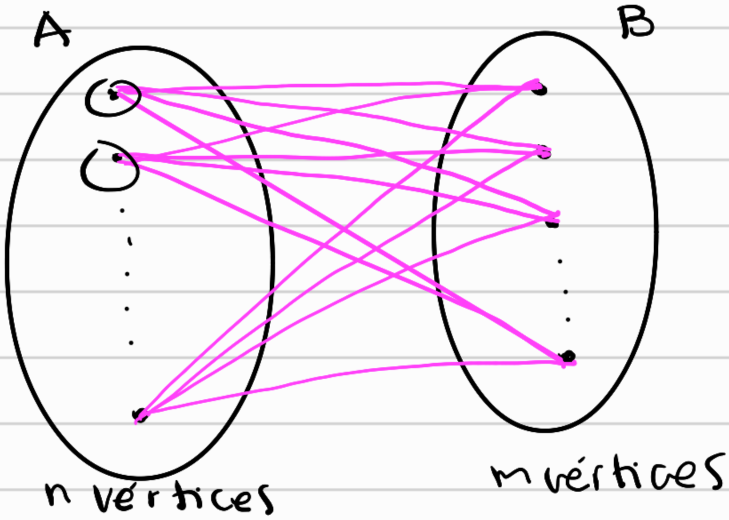


. . .

$d(v,v') = 1 \quad v \neq v'$

$\text{diam}(K_n) = 1$

$K_{n,m}$

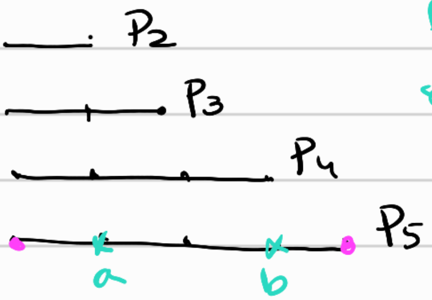


$v \neq v'$

$$\begin{cases} d(v,v') = 2 & \text{si } v,v' \in A \quad \text{o} \quad \text{si } v,v' \in B \\ d(v,v') = 1 & \text{si } v \in A \ \ v' \in B \quad \text{o} \quad v \in B \ \ v' \in A. \end{cases}$$

$\text{diam}(K_{n,m}) = 2.$

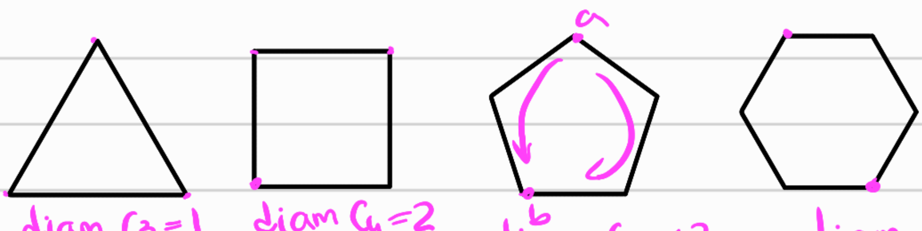
P_n



Hay exactamente un cno. simple por par de vértices.
$\Rightarrow$ hay n^2 cnos. simples.

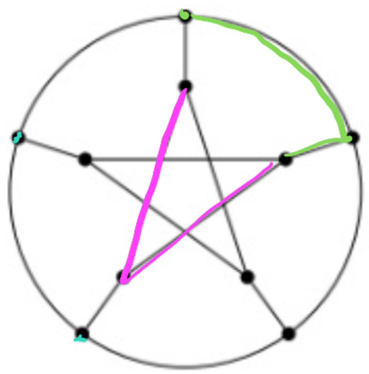
$\text{diam}(P_n) = n-1$

C_n



$\text{diam } C_3 = 1$ $\quad$ $\text{diam } C_4 = 2$ $\quad$ $\text{diam } C_5 = 2$ $\quad$ $\text{diam } C_6 = 3$

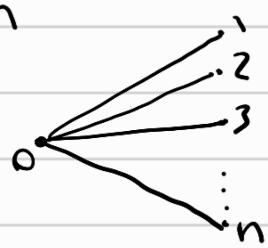
$\text{diam } C_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$



(i) Grafo de Petersen

$\text{diam (i)} = 2$

$K_{1,n}$



Hay exactamente un cn simple por par de vértices.
$\Rightarrow$ hay $(n+1)^2$ cnos. simples.

Ejercicio 9. Un hombre debe cruzar un perro, una oveja y una bolsa de repollos, a la otra margen del río, por medio de una canoa. El tamaño de la canoa no permite llevar más de un objeto a la vez. Además, no se puede dejar al perro sólo con la oveja ni a la oveja sola con la bolsa de repollos. Una secuencia de viajes se dice admisible si no se repite la misma configuración luego de uno o de dos viajes de ida y vuelta.

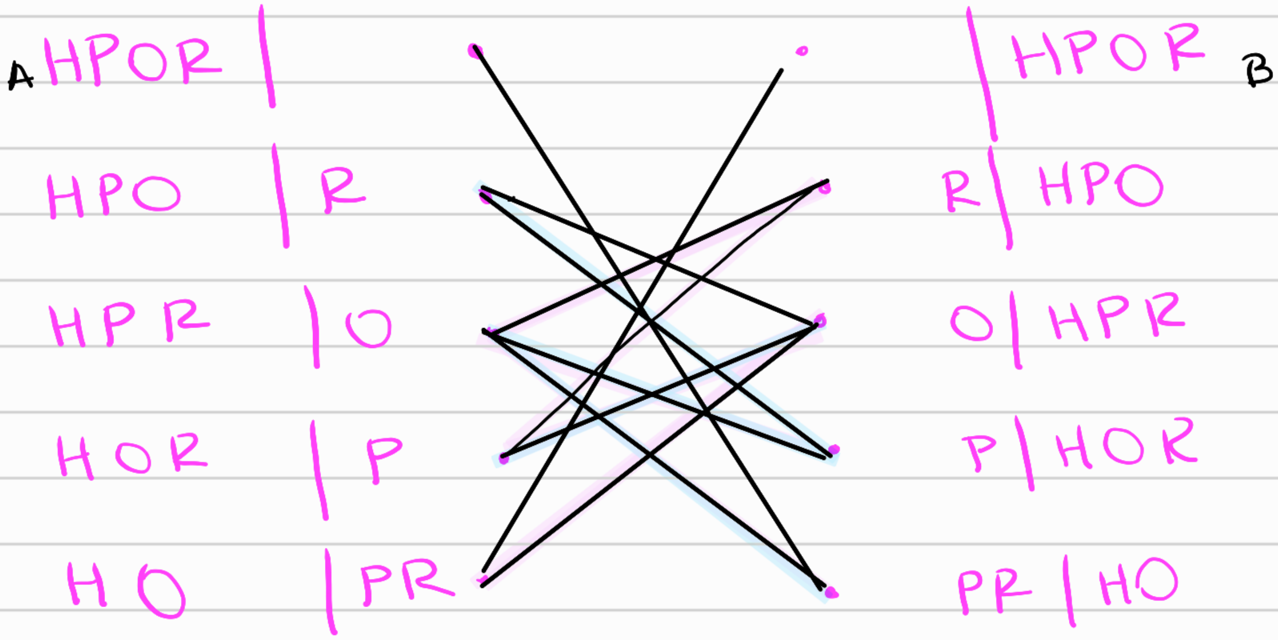
a. Indique una secuencia de viajes admisibles que cumpla el objetivo.

b. Encuentre una secuencia de viajes admisibles que cumpla el objetivo usando exactamente 9 viajes de ida y vuelta y un viaje solo de ida para terminar. ¿Y si cambiamos 9 viajes de ida y vuelta por 10 viajes de ida y vuelta es posible lograr el objetivo?

Sugerencia: asociar a cada configuración factible un vértice y unir dos vértices si se puede pasar de dicha disposición a la otra en un viaje de ida y vuelta, o un viaje solo de ida en el último paso.

lado 1 | lado 2   Lado 1 | Lado 2
HPOR | | HPOR

a)

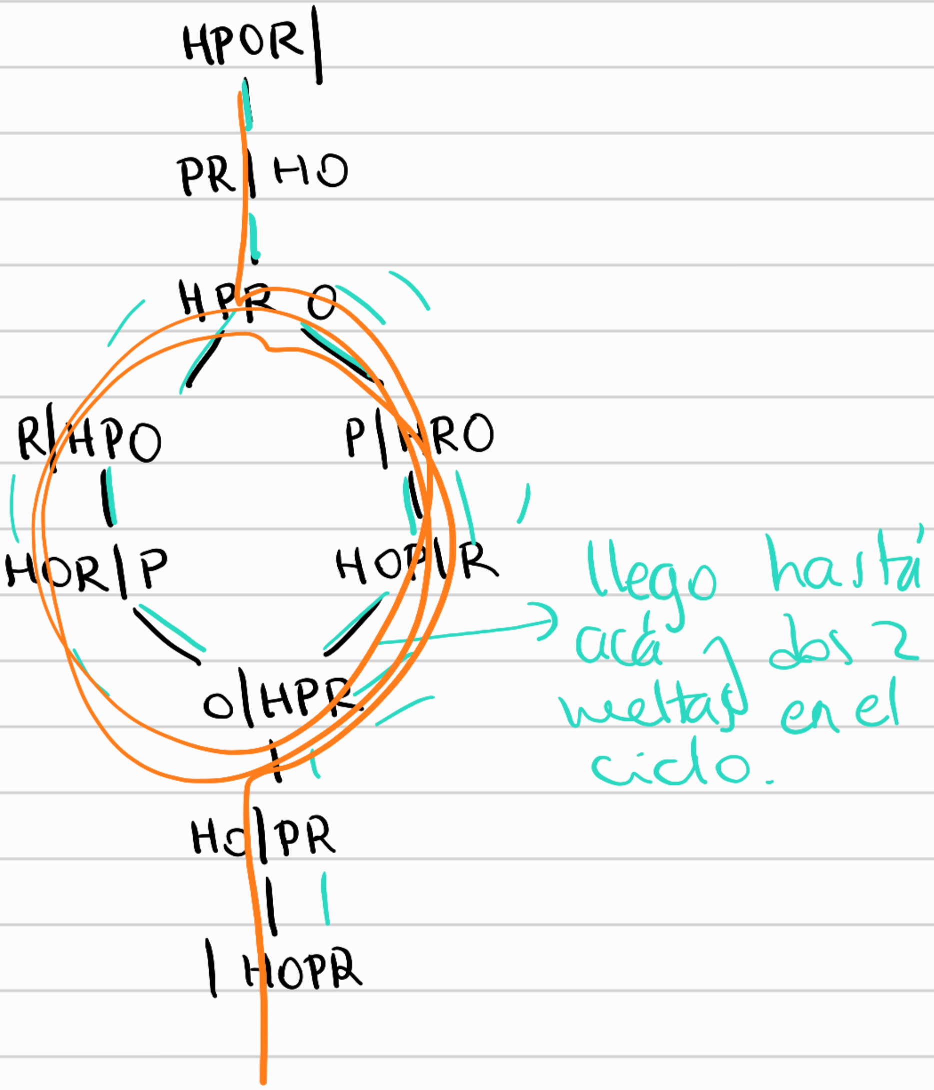


Es un grafo bipartito! (*)
⇒ en particular no hay viajes de long. par entre HPOR| y |HPOR.

(HPOR| , PR|HO , HPR|O, P|HOR, PHO|R, O|HPR, HO|PR, |HPOR)
Cno. de largo 7.

b) Cuidado, tenemos que interpretar bien la letra ces el grafo anterior nos sirve para dar un ej. en la parte a) y para justificar que no hay viajes de largo par.

Pero la letra nos pide probar que no hay viajes admisibles de long. 21. Veamos de otra forma este grafo.



⇒ Solo tenemos viajes admisibles de largo $7, 7+6, 7+2\cdot 6, 7+3\cdot 6 \ldots$