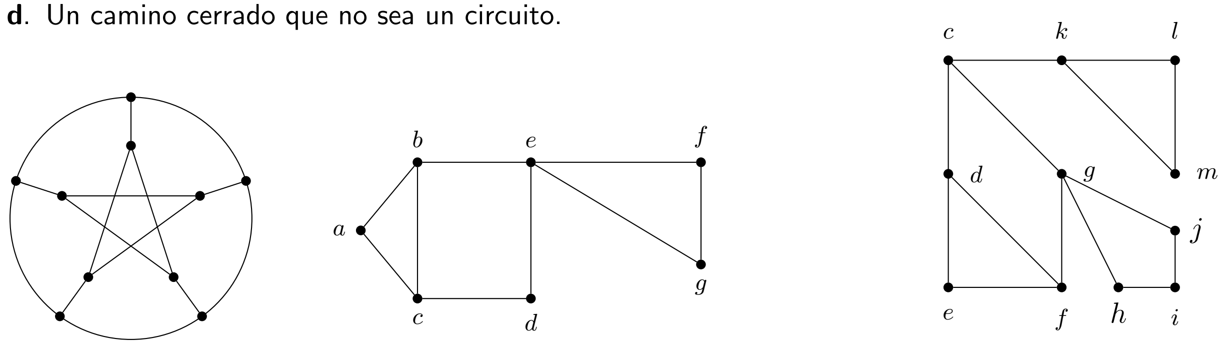
Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 8

Grafos I: Caminos, conexidad, subgrafos

Ejercicio 1. Para el grafo de la Figura 1 (ii), determine:

- **a**. Un camino abierto que no sea un recorrido.
- **b**. Un recorrido que no sea camino simple.
- **c**. Un camino simple de b a d de longitud 3.
- **d**. Un camino cerrado que no sea un circuito.
- **e**. Un circuito que no sea un ciclo.
- **f**. Todos los ciclos que pasan por b.
- **g**. Todos los caminos simples de b a f.



(i) Grafo de Petersen (ii) (iii)

Figure 1:

Ejercicio 2.

- **a**. ¿Cuál es la distancia entre el vértice d y los demás vértices del grafo de la Figura 1 (iii)?
- **b**. Halle el diámetro de K_n, $K_{n,m}$, P_n, C_n y del grafo de Petersen (Figura 1(i)).
- **c**. ¿Cuántos caminos simples tienen P_n y $K_{1,n}$?

Ejercicio 3. (1^{er} parcial 2017) Sean x e y dos vértices adyacentes de C_{20}.
¿Cuántos caminos de largo 11 empiezan en x y terminan en y?

Ejercicio 4. ¿Cuántos caminos de largo n hay entre dos vértices opuestos de C_4?

Ejercicio 5. Para cada natural $n \geq 3$ se define el grafo *rueda de n rayos* como el grafo W_n con $n+1$ vértices v_0, v_1, ..., v_n, tal que v_0 es adyacente a todos los demás vértices y $v_1, \ldots, v_n, v_1$ es un ciclo. En la Figura 2 se muestra W_3, W_4 y W_5.

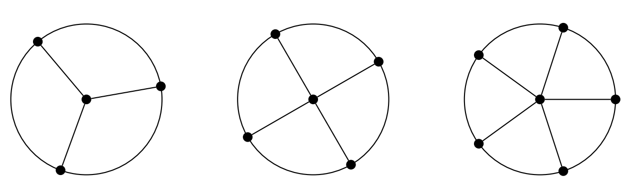


Figure 2:

a. ¿Cuántas aristas tiene W_n?

b. ¿Cuántos 3-ciclos tiene W_3? ¿y W_4?

c. ¿Cuántos 4-ciclos tienen W_3, W_4 y W_5?

d. Ídem para 5-ciclos.

e. Ídem para 6-ciclos.

f. Determine cuántos k-ciclos tiene W_n.

Ejercicio 6. Pruebe que dos caminos simples de la mayor longitud posible, en un grafo conexo, poseen un vértice en común.

Ejercicio 7. Sea G el grafo con conjunto de vértices $\{1, 2, \ldots, 15\}$ donde el vértice i es adyacente al j si y solo si su máximo común divisor es mayor que 1. ¿Cuántas componentes conexas tiene G?

Ejercicio 8. Encuentre un grafo G que tenga tres vértices u, v y w tales que

$$\kappa(G-u) = \kappa(G), \qquad \kappa(G-v) > \kappa(G), \qquad \kappa(G-w) < \kappa(G).$$

Ejercicio 9. Un hombre debe cruzar un perro, una oveja y una bolsa de repollos, a la otra margen del río, por medio de una canoa. El tamaño de la canoa no permite llevar más de un objeto a la vez. Además, no se puede dejar al perro sólo con la oveja ni a la oveja sola con la bolsa de repollos. Una secuencia de viajes se dice admisible si no se repite la misma configuración luego de uno o de dos viajes de ida y vuelta.

a. Indique una secuencia de viajes admisibles que cumpla el objetivo.

b. Encuentre una secuencia de viajes admisibles que cumpla el objetivo usando exactamente 9 viajes de ida y vuelta y un viaje solo de ida para terminar. ¿Y si cambiamos 9 viajes de ida y vuelta por 10 viajes de ida y vuelta es posible lograr el objetivo?

Sugerencia: asociar a cada configuración factible un vértice y unir dos vértices si se puede pasar de dicha disposición a la otra en un viaje de ida y vuelta, o un viaje solo de ida en el último paso.

Ejercicio 10. Sea G el grafo de la Figura 3 (a).

a. ¿Cuántos subgrafos conexos de G tienen 4 vértices e incluyen un ciclo?

b. Describa los subgrafos G_1 y G_2 de G (Figura 3 (b) y (c)) como subgrafos inducidos y en términos de la eliminación de vértices de G.

c. Trace el subgrafo de G inducido por el conjunto de vértices $U = \{b, c, d, f, i, j\}$.

d. Considere las aristas $e_1 = \{a, c\}$ y $e_2 = \{a, d\}$ del grafo G y trace el subgrafo $G - \{e_1, e_2\}$.

e. Encuentre un subgrafo de G que no sea inducido.

f. ¿Cuántos subgrafos recubridores tiene G?

g. ¿Cuántos de los subgrafos anteriores son conexos?

h. ¿Cuántos subgrafos de la parte **g.** tienen el vértice a como vértice aislado?

Ejercicio 11. (Examen marzo 2001)
El hipercubo H_n de dimensión n, es el grafo cuyos vértices son las n-uplas de ceros y unos, tales que dos n-uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas, por ejemplo $(0, 0, \ldots, 0)$ es adyacente a $(1, 0, \ldots, 0)$ pero no a $(1, 0, \ldots, 0, 1)$.

a. Halle los conjuntos de vértices de H_1, H_2, H_3 y dibuje dichos grafos.

b. ¿Cuántos vértices y aristas tiene H_n?

c. Halle 2 caminos simples en H_5 de $(0, 0, 1, 1, 0)$ a $(0, 0, 0, 1, 0)$.

d. Demuestre que H_n no tiene 3–ciclos.

e. ¿Cuántos 4–ciclos tiene H_n? (*Sugerencia*: cuente cuántos 4–ciclos pasan por un vértice fijo.)

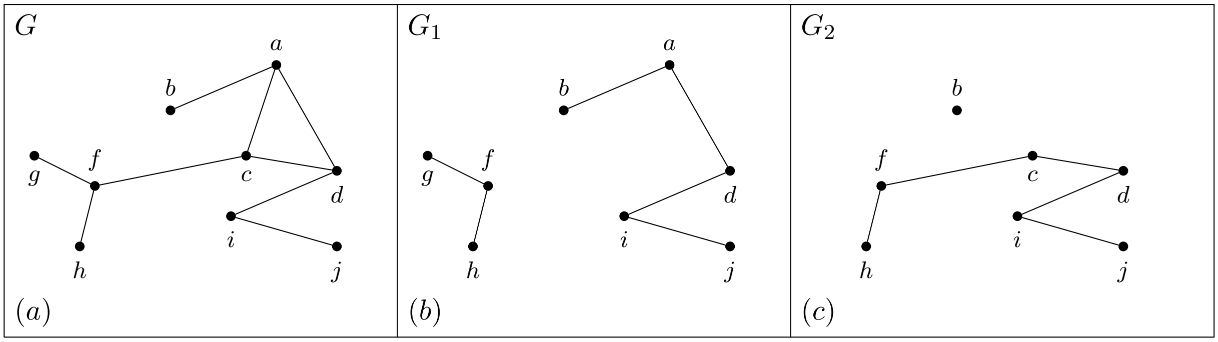


Figure 3:

Ejercicio 12. Sea G_n el grafo con vértices las n-uplas de 0s y 1s:

$$V(G_n) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \{0, 1\}\}$$

Dos n-uplas serán adyacentes si difieren en los valores de exactamente dos de sus posiciones, coincidiendo en el resto. Por ejemplo, en G_n, $(0, 0, 1)$ es adyacente a $(1, 1, 1)$ y a $(1, 0, 0)$, pero no a $(1, 1, 0)$.

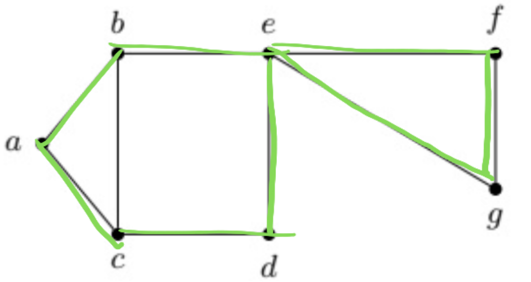
- **a**. Dibuje G_2, G_3 y G_1.
- **b**. ¿Para qué valores de n es G_n conexo?
- **c**. ¿Cuántas componentes conexas tiene G_n?

Sugerencia: sume los 1s de cada vértice.

Vértice(s) repetido(s)	Arista(s) repetida(s)	Abierto	Cerrado	Nombre
Sí	Sí	Sí		Camino abierto
Sí	Sí		Sí	Camino (cerrado)
Sí	No	Sí		Recorrido
Sí	No		Sí	Circuito
No	No	Sí		Camino simple ab
No	No		Sí	Ciclo si long ≥3 | Cno simple cerrado

d) Camino cerrado no circuito (Repite aristas)
(a,c,b,a,c,b,a)

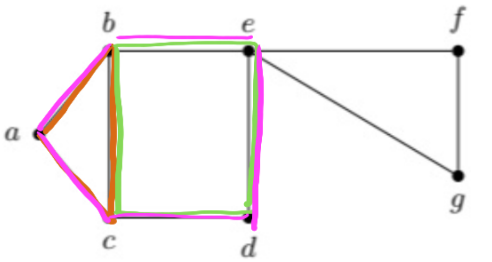
e) Circuito no ciclo (Repite vértice)
(a,c,d,e,g,f,e,b,a)



(ii)

Figure 1:

f) Todos los ciclos por b.



(ii)

(b,a,c,b) y
- revirtiendo orientación
- comenzando desde otro vértice

6 ciclos de largo 3

(b,a,c,b)
(b,c,a,b)
(c,a,b,c)
(c,b,a,c)
(a,b,c,a)
(a,c,b,a)

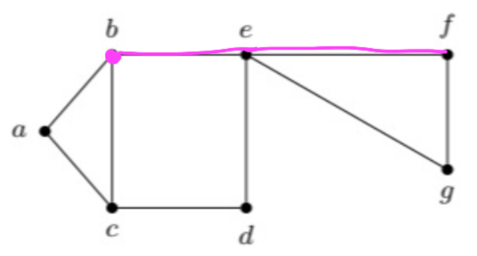
Lo mismo con (b,c,d,e,b)

8 ciclos de largo 4

Lo mismo con (b,a,c,d,e,b)

10 ciclos de largo 4.

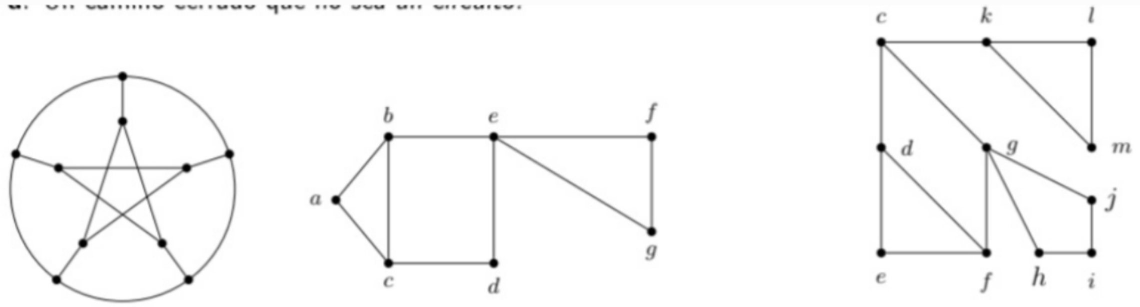
g) Todos los caminos simples de b a f.



(ii)

(b,e,f)
(b,e,g,f)
(b,c,d,e,f)
(b,c,d,e,g,f)
(b,a,c,d,e,f)
(b,a,c,d,e,g,f)

d. Un camino cerrado que no sea un circuito.



(i) Grafo de Petersen (ii) (iii)

Figure 1:

Ejercicio 2.

a. ¿Cuál es la distancia entre el vértice d y los demás vértices del grafo de la Figura 1 (iii)?

b. Halle el diámetro de K_n, $K_{n,m}$, P_n, C_n y del grafo de Petersen (Figura 1(i)).

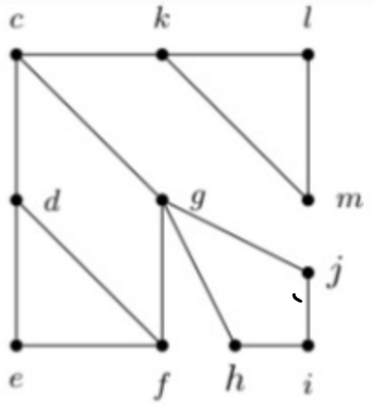
c. ¿Cuántos caminos simples tienen P_n y $K_{1,n}$?

Sean v y v' dos vértices de un grafo G

$d(v,v')$ = longitud del cno. más corto de v a v'

$\mathrm{diam}(G) = \max_{v,v'}\{d(v,v')\}$

a)



(iii)

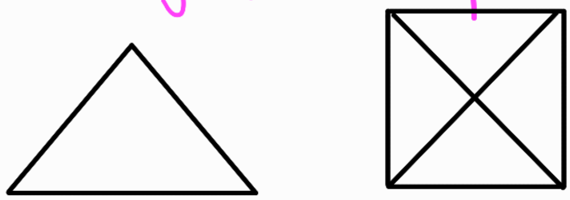
$d(d,c) = 1$

$d(d,k) = 2$

$d(d,i) = 4$

$d(d,j) = 3$

b) K_n: grafo completo

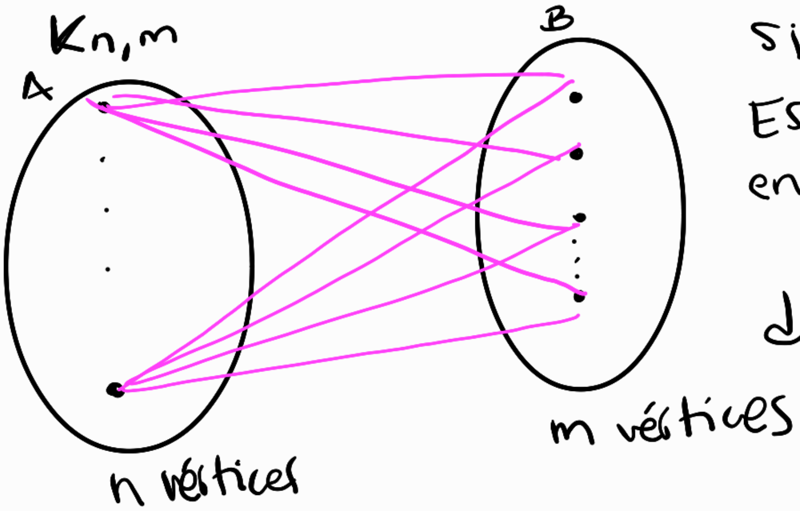


. . .

Hay una arista entre cualquier par de vértices $\Rightarrow$ $d(v,v') = 1 \quad \forall v,v'$

$\mathrm{diam}(K_n) = 1$

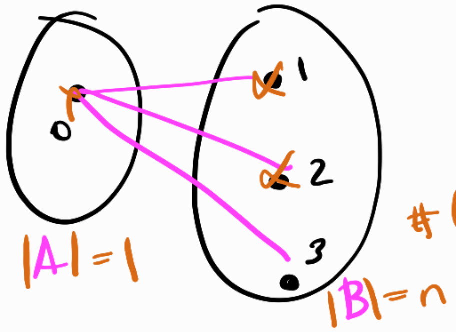
$K_{n,m}$: grafo bipartito completo



si $v \neq v'$ $\Rightarrow$ hay 2 opc.
Están en misma comp. o
en separadas $\Rightarrow d(v,v') = 2$
o
$d(v,v') = 1$

$diam(K_{n,m}) = 2$

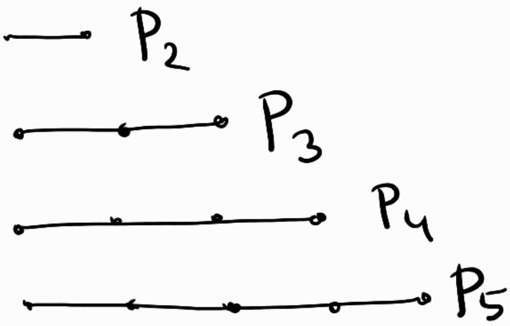
Ejemplo $K_{1,3}$.



Cnos simples de A en A = 1
de A en B = n
B en A = n
B en B = n^2

Entre dos vértices cualquiera de $K_{1,n}$ hay exactamente un cno. simple $\Rightarrow$ hay $(n+1)^2$ cnos. simples en total.

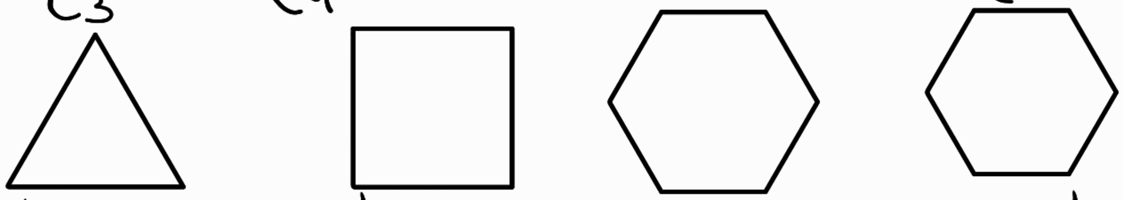
P_n



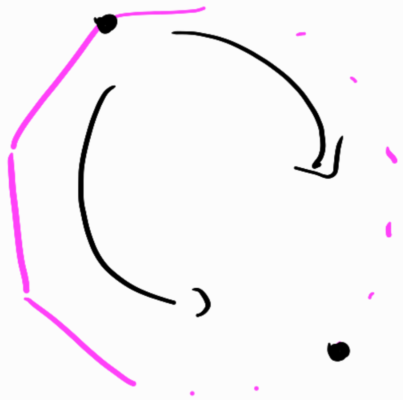
diam $P_n = n-1$

Entre dos vértices cualquiera de P_n hay exactamente un cno. simple $\Rightarrow$ hay n^2 cnos. simples en total.

C_n $\quad C_3 \quad C_4 \quad C_5 \quad C_6$



$\operatorname{diam} C_3 = 1 \quad \operatorname{diam} C_4 = 2 \quad \operatorname{diam} C_5 = 2 \quad \operatorname{diam} C_6 = 3$



$$\operatorname{diam}(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Ejercicio 9. Un hombre debe cruzar un perro, una oveja y una bolsa de repollos, a la otra margen del río, por medio de una canoa. El tamaño de la canoa no permite llevar más de un objeto a la vez. Además, no se puede dejar al perro sólo con la oveja ni a la oveja sola con la bolsa de repollos. Una secuencia de viajes se dice admisible si no se repite la misma configuración luego de uno o de dos viajes de ida y vuelta.

a. Indique una secuencia de viajes admisibles que cumpla el objetivo.

b. Encuentre una secuencia de viajes admisibles que cumpla el objetivo usando exactamente 9 viajes de ida y vuelta y un viaje solo de ida para terminar. ¿Y si cambiamos 9 viajes de ida y vuelta por 10 viajes de ida y vuelta es posible lograr el objetivo?

Sugerencia: asociar a cada configuración factible un vértice y unir dos vértices si se puede pasar de dicha disposición a la otra en un viaje de ida y vuelta, o un viaje solo de ida en el último paso.

Modelamos el problema con un grafo:
Los vértices son las configuraciones posibles:

HPOB|	|HPOB
HPO|B	B|HPO
HPB|O	O|HPB
HOB|P	P|HOB
HO|BP	BP|HO

Unimos dos vértices si se puede ir de uno a otro haciendo un viaje ida-vuelta.