Universidad de la República
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística

Matemática Discreta 1

Segundo semestre 2024

PRÁCTICO 7
Relaciones II

Ejercicio 1. Para cada uno de los órdenes $(A, \leq)$ siguientes, dibujar el diagrama de Hasse.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y $\leq$ es el orden de divisibilidad ($x \leq y$ sii y es múltiplo de x).

(b) A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.

Ejercicio 2. Hallar la cantidad de relaciones de orden en $\{1, 2, 3, 4\}$ tales que $1 > 2 > 3$.

Ejercicio 3. Sea $A = \{a, b, c\}$, calcular la cantidad de relaciones de orden que hay sobre A.

Ejercicio 4. Un orden parcial $(A, \leq)$ es un *buen orden* si todo subconjunto no vacío de A tiene mínimo.

(a) Demostrar que si $(A, \leq)$ es un buen orden entonces es un orden total.

(b) Demostrar que si $(A, \leq)$ es un orden total entonces tiene a lo sumo un elemento maximal.

(c) Concluir que si un orden parcial $(A, \leq)$ tiene dos elementos maximales distintos o dos minimales distintos entonces no es un buen orden.

Ejercicio 5. Demostrar que en un conjunto con 61 personas hay al menos 13 personas cada una de las cuales desciende de la siguiente o hay un al menos 6 personas tales que ninguna de ellas desciende de otra.

Ejercicio 6. Halle el número de relaciones de orden en $\{1, 2, 3, 4\}$ que contienen a la relación $\{(1, 2); (3, 4)\}$.

Ejercicio 7. Sea $A = \{1, 2, ..., 100\}$. ¿Qué hay más, relaciones de equivalencia o de orden en A?

Ejercicio 8. Un empleado de un centro de cómputos, tiene que ejecutar 10 programas P_0, P_1, ..., P_9 que, debido a las prioridades, están restringidos a las siguientes condiciones: $P_7, P_2 < P_9$; $P_6 < P_7$; $P_4 < P_6$; $P_8, P_5 < P_2$; $P_3, P_0 < P_5$; $P_3, P_4 < P_8$; $P_1 < P_3, P_4, P_0$; donde, por ejemplo, $P_i < P_j$ significa que el programa P_i debe realizarse antes que el programa P_j. Determine un orden de ejecución de estos programas de modo que se satisfagan las restricciones.

Ejercicio 9. Determine cuáles de los órdenes $(A, \leq)$ del Ejercicio 1 representa un retículo.

Ejercicio 10. ¿Cuáles de los diagramas de Hasse de la Figura 1 representa un retículo?

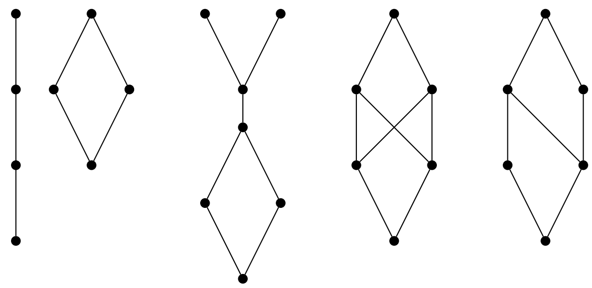


Figure 1:

Ejercicio 11. Demuestre que si A es un conjunto finito y $\leq$ es un orden en A entonces A tiene algún elemento maximal y alguno minimal. Demuestre también que si $(A, \leq)$ es un retículo (látice) y A es finito entonces A tiene mínimo y máximo. ¿Es cierto alguno de estos resultado si A es infinito? (en caso afirmativo dé una demostración y en caso negativo un contraejemplo).

$R \subseteq A \times A$ reflexivas

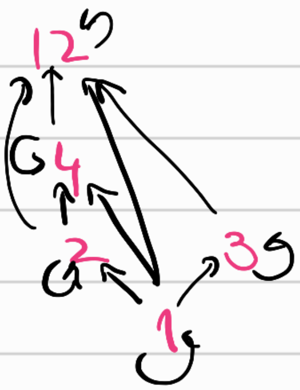
antisimétrica

transitiva

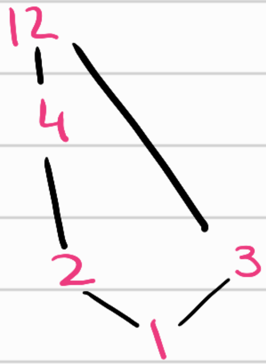
Ejercicio 1. Para cada uno de los órdenes $(A, \leq)$ siguientes, dibujar el diagrama de Hasse.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y $\leq$ es el orden de divisibilidad ($x \leq y$ sii y es múltiplo de x).

(b) A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.



(a)

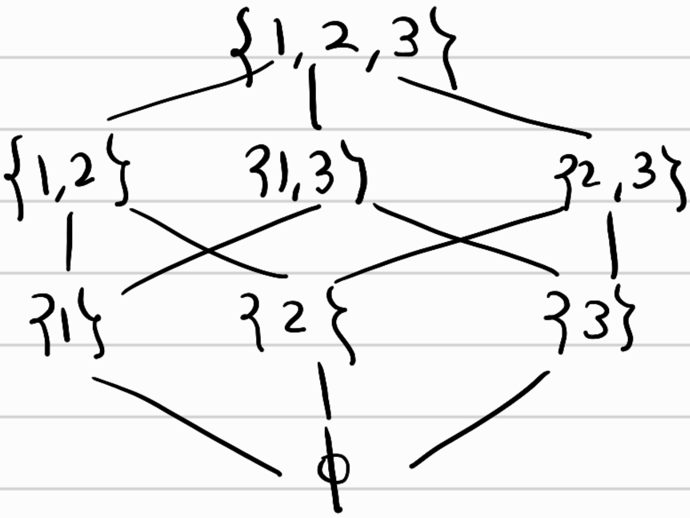


$1 < 2 < 4$

(b) $A = \{\{1,2,3\}, \{1,3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \phi\}$

$\{1,3\} \leq \{1,2,3\}$

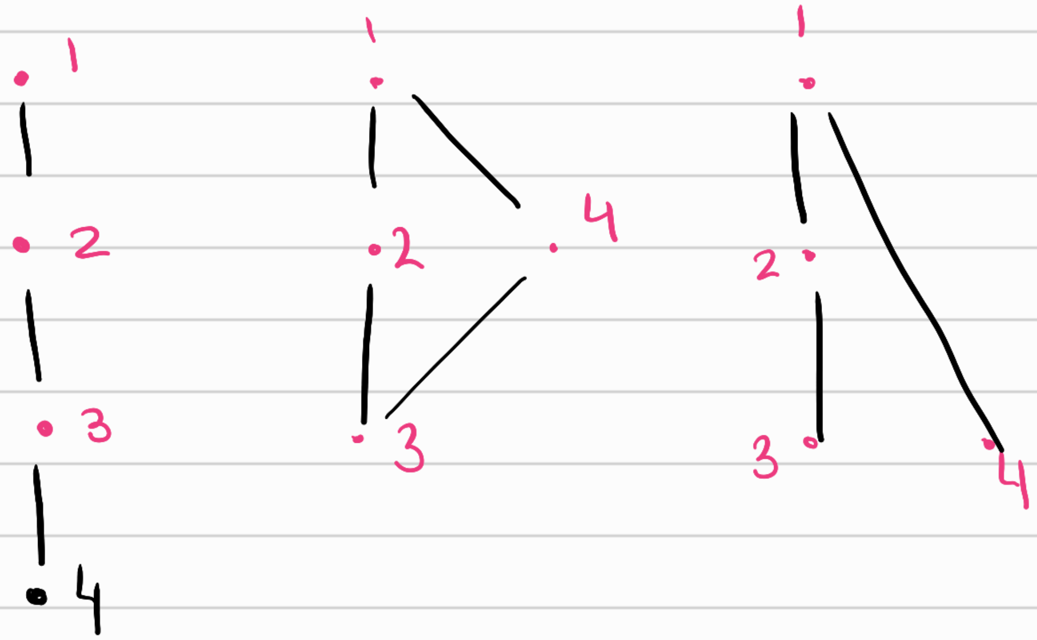
$\{1,3\} \not\leq \{1,2\}$



$\{1,2\}$ no puede estar en el nivel 2 pq $\phi < \{1\} \leq \{1,2\}$

Ejercicio 2. Hallar la cantidad de relaciones de orden en $\{1, 2, 3, 4\}$ tales que $1 > 2 > 3$.

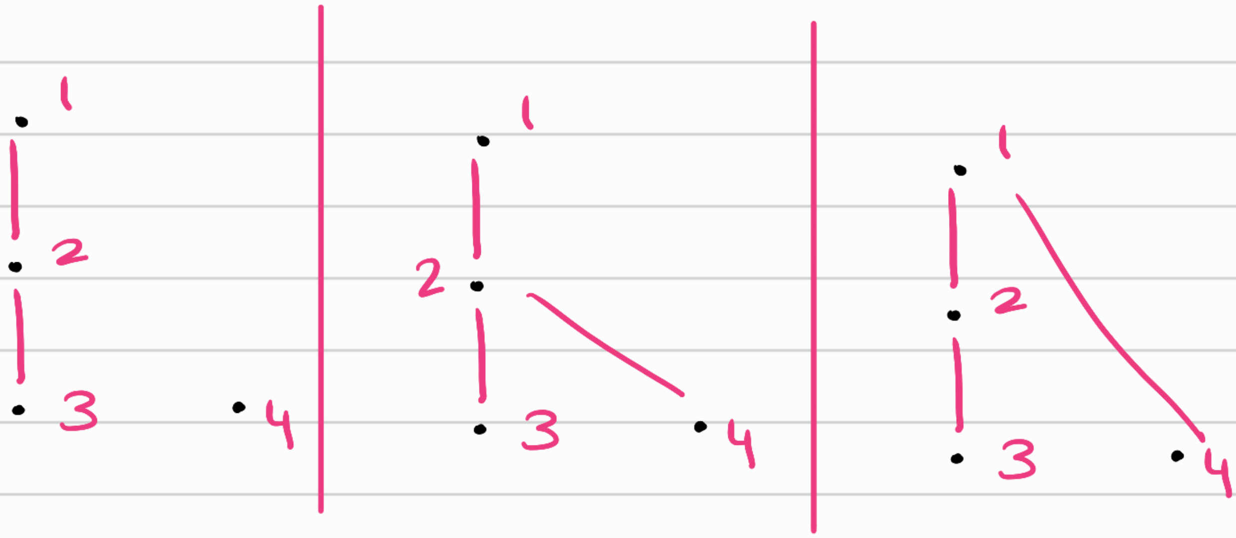
Ejemplos:



- Diagramas de 4 niveles: (orden total)

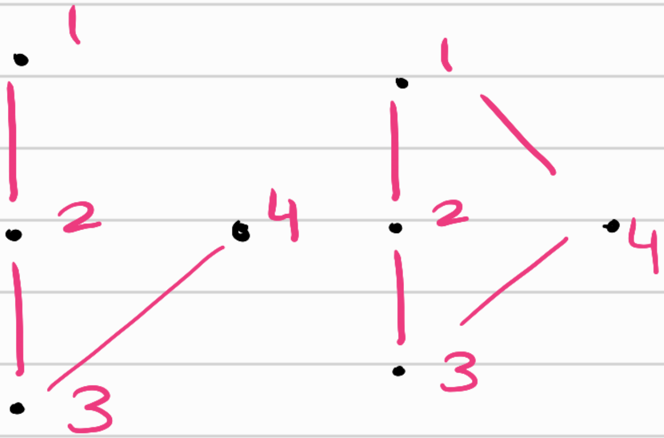
hay 4 rel. de orden que corresponden a las 4 pos. donde poner el 4

- Diagramas con 3 niveles:
  - El 4 en el 1º nivel



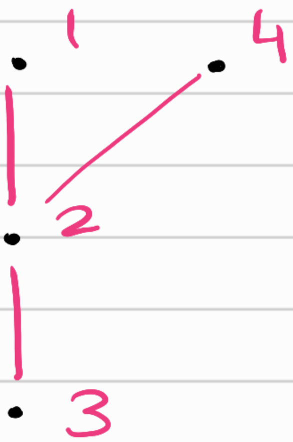
3

- El 4 en el segundo nivel.



2

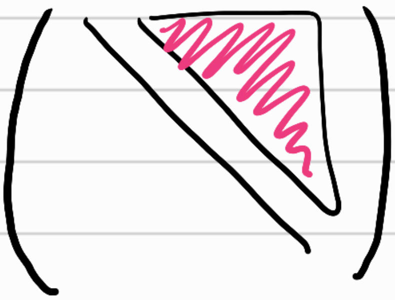
- El 4 en el tercer nivel.



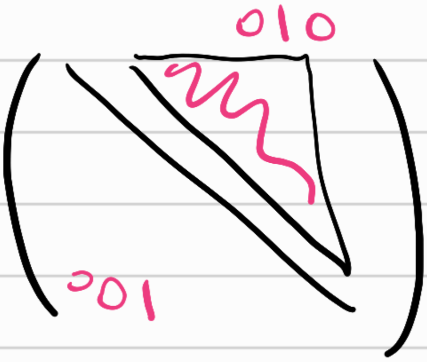
1

En total hay $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ rel. de orden en $\{1,2,3,4\}$ con $1<2<3$.

Ejercicio 7. Sea $A = \{1, 2, ..., 100\}$. ¿Qué hay más, relaciones de equivalencia o de orden en A?

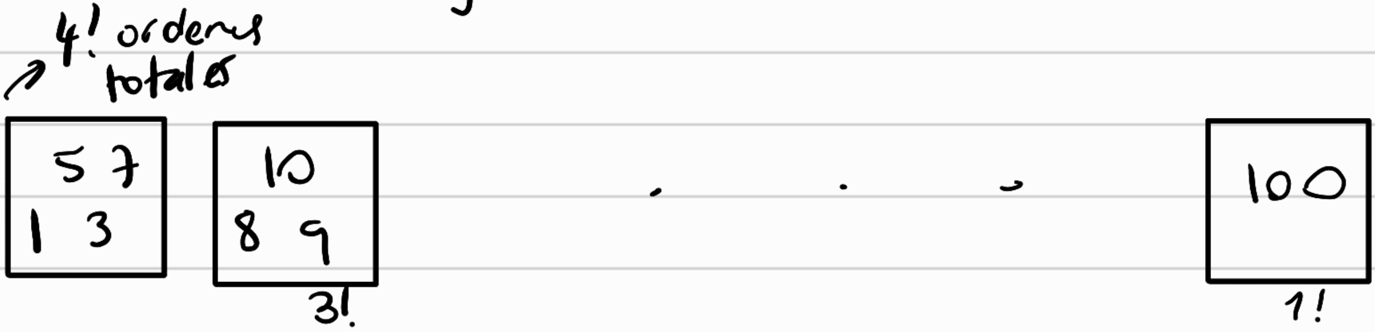


$2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ rel. simétricas) eq.



$2^{n} 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ rel antisimétricas.) orden

Contar rel. de equivalencia coincide con contar particiones del cjto. A.



A cada subconjunto S de una partición le puedo dar $|S|!$ ordenes totales.

$\Rightarrow$ Hay más rel. de orden que de eq.

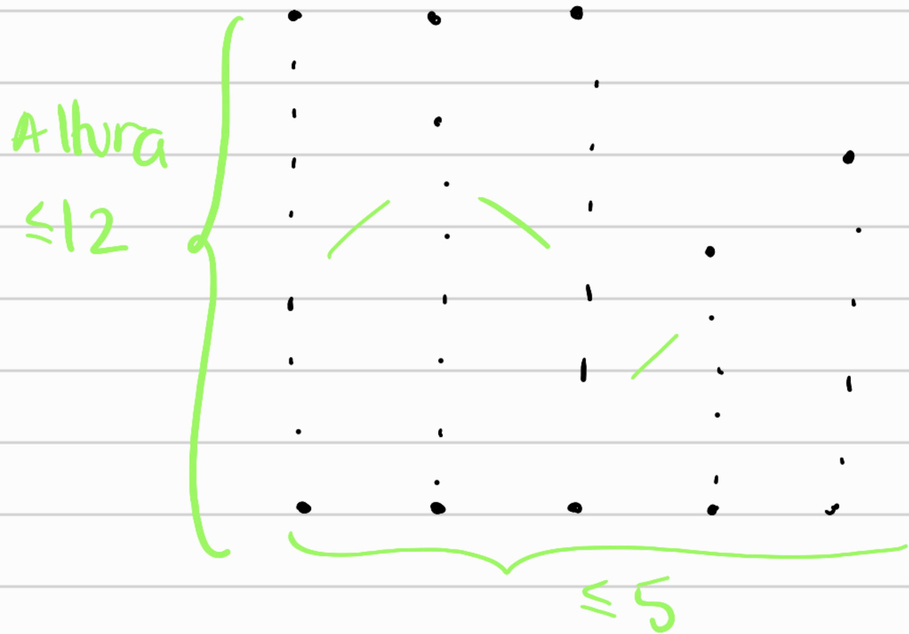
Ejercicio 5. Demostrar que en un conjunto con 61 personas hay al menos 13 personas cada una de las cuales desciende de la siguiente o hay un al menos 6 personas tales que ninguna de ellas desciende de otra.

A Tenemos una cadena de largo 13

.

B Tenemos una anticadena de largo 6

Tenemos que probar que si no ocurre A $\Rightarrow$ ocurre B.



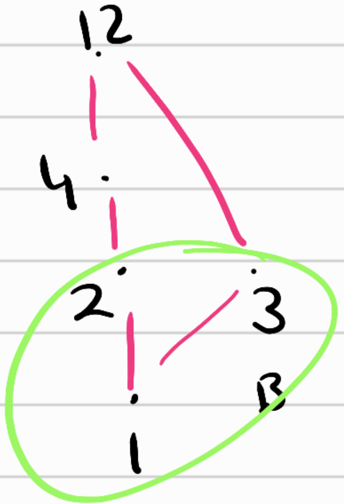
Supongamos que no hay cadenas de largo 12, entonces, si tampoco tenemos una anticadena de largo 6 $\Rightarrow$ hay 5 o menos elementos minimales $\Rightarrow$ hay a lo más $12.5 = 60$ elementos en A $\lightning$

Defs:

$m \in A$ es minimal si $\forall a \in A \quad a \neq m \quad a \nleq m$

$M \in A$ es maximal si $\forall a \in A \quad a \neq M \quad M \nleq a$

$B \subseteq A$



$m \in B$ es mínimo si $\forall a \in B \quad m \leq a$

$M \in B$ es máximo si $\forall a \in B \quad a \leq M$

$S \in A$ es cota sup. de B si $b \leq S \quad \forall b \in B$

$s \in A$ es cota inf. de B si $s \leq b \quad \forall b \in B$

$\sup(B)$ (la menor de las cotas sup)

$\inf(B)$ (la mayor de las cotas inf)

A es un retículo si $\exists \sup\{a,b\}$ e $\inf\{a,b\}$ $\forall a,b \in A$.

Ejercicio 10. ¿Cuáles de los diagramas de Hasse de la Figura 1 representa un retículo?

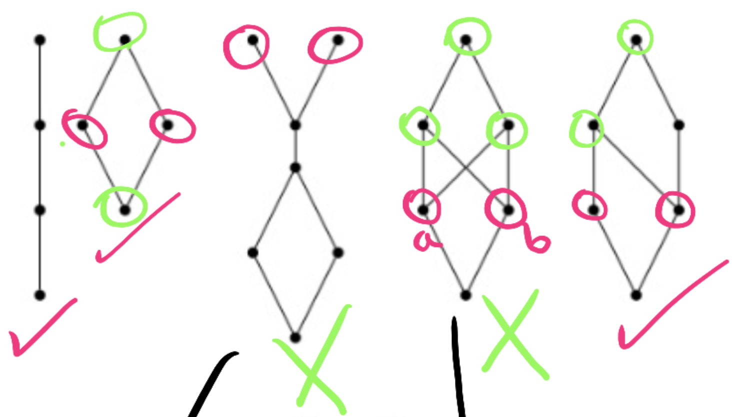


Figure 1:

no existen
cotas sup.

Existen 3 cotas sup
de $\{a,b\}$ pero no
existe el supremo.