Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 7
Relaciones II

Ejercicio 1. Para cada uno de los órdenes $(A, \leq)$ siguientes, dibujar el diagrama de Hasse.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y $\leq$ es el orden de divisibilidad ($x \leq y$ sii y es múltiplo de x).

(b) A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.

Ejercicio 2. Hallar la cantidad de relaciones de orden en $\{1, 2, 3, 4\}$ tales que $1 > 2 > 3$.

Ejercicio 3. Sea $A = \{a, b, c\}$, calcular la cantidad de relaciones de orden que hay sobre A.

Ejercicio 4. Un orden parcial $(A, \leq)$ es un *buen orden* si todo subconjunto no vacío de A tiene mínimo.

(a) Demostrar que si $(A, \leq)$ es un buen orden entonces es un orden total.

(b) Demostrar que si $(A, \leq)$ es un orden total entonces tiene a lo sumo un elemento maximal.

(c) Concluir que si un orden parcial $(A, \leq)$ tiene dos elementos maximales distintos o dos minimales distintos entonces no es un buen orden.

Ejercicio 5. Demostrar que en un conjunto con 61 personas hay al menos 13 personas cada una de las cuales desciende de la siguiente o hay un al menos 6 personas tales que ninguna de ellas desciende de otra.

Ejercicio 6. Halle el número de relaciones de orden en $\{1, 2, 3, 4\}$ que contienen a la relación $\{(1, 2); (3, 4)\}$.

Ejercicio 7. Sea $A = \{1, 2, ..., 100\}$. ¿Qué hay más, relaciones de equivalencia o de orden en A?

Ejercicio 8. Un empleado de un centro de cómputos, tiene que ejecutar 10 programas P_0, P_1, ..., P_9 que, debido a las prioridades, están restringidos a las siguientes condiciones: $P_7, P_2 < P_9$; $P_6 < P_7$; $P_4 < P_6$; $P_8, P_5 < P_2$; $P_3, P_0 < P_5$; $P_3, P_4 < P_8$; $P_1 < P_3, P_4, P_0$; donde, por ejemplo, $P_i < P_j$ significa que el programa P_i debe realizarse antes que el programa P_j. Determine un orden de ejecución de estos programas de modo que se satisfagan las restricciones.

Ejercicio 9. Determine cuáles de los órdenes $(A, \leq)$ del Ejercicio 1 representa un retículo.

Ejercicio 10. ¿Cuáles de los diagramas de Hasse de la Figura 1 representa un retículo?

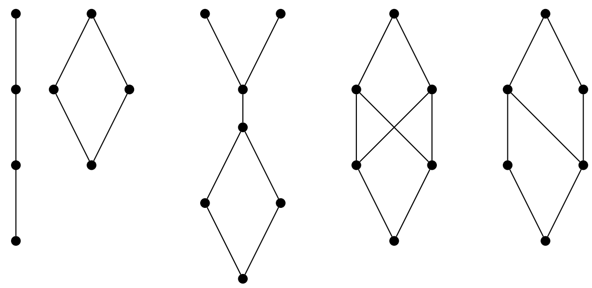


Figure 1:

Ejercicio 11. Demuestre que si A es un conjunto finito y $\leq$ es un orden en A entonces A tiene algún elemento maximal y alguno minimal. Demuestre también que si $(A, \leq)$ es un retículo (látice) y A es finito entonces A tiene mínimo y máximo. ¿Es cierto alguno de estos resultado si A es infinito? (en caso afirmativo dé una demostración y en caso negativo un contraejemplo).

Relaciones de Orden: $R \subseteq A \times A$

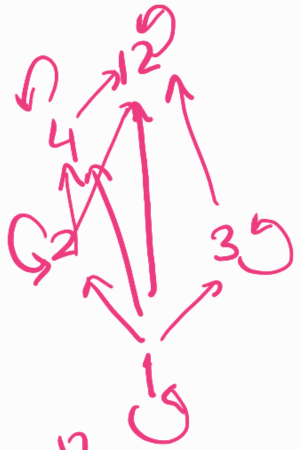
reflexiva
antisimétrica
transitiva

Ejercicio 1. Para cada uno de los órdenes $(A, \leq)$ siguientes, dibujar el diagrama de Hasse.

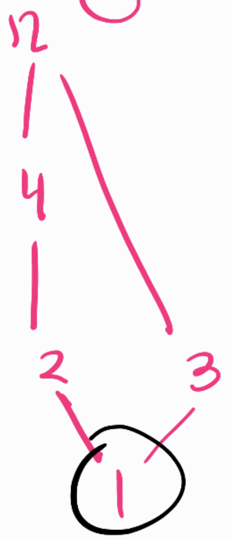
(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y $\leq$ es el orden de divisibilidad ($x \leq y$ sii y es múltiplo de x).

(b) A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.

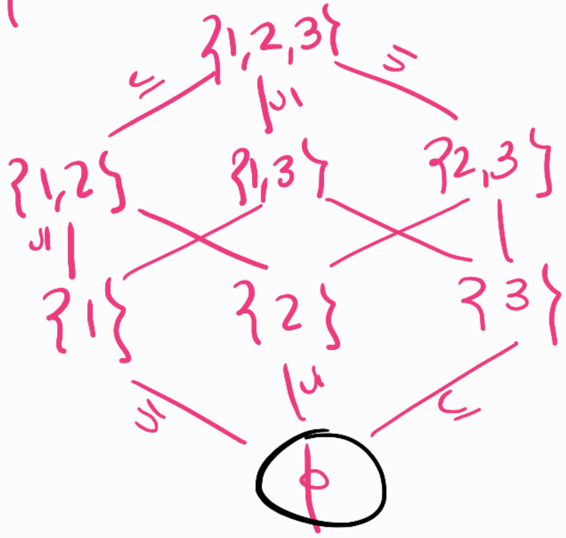
(a)

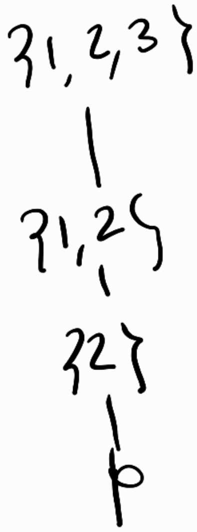


- eliminamos lazos
- eliminamos arista (1,4) ...
- eliminamos las flechas.



(b) $A = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$



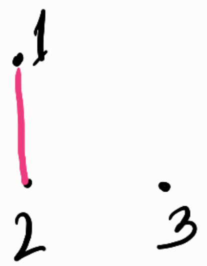


Ejercicio 3. Sea $A = \{a, b, c\}$, calcular la cantidad de relaciones de orden que hay sobre A.

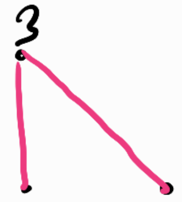
3 niveles

$3! = 6$ rel

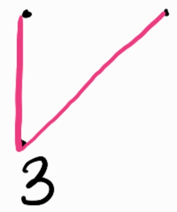
2 niveles



6 rel



3 rel.



3 rel

1 nivel

$\}$ 1 relación

Total: $1 + 6 + 3 + 3 + 6 = 19$ relaciones de orden.

Definiciones:

Elemento minimal: $m \in A$ / $\forall a \in A$ $a \neq m$ $a \not\leq m$.

Elemento maximal: $M \in A$ / $\forall a \in A$ $a \neq M$ $M \not\leq a$

Máximo: $M \in A$ / $a \leq M$ $\forall a \in A$

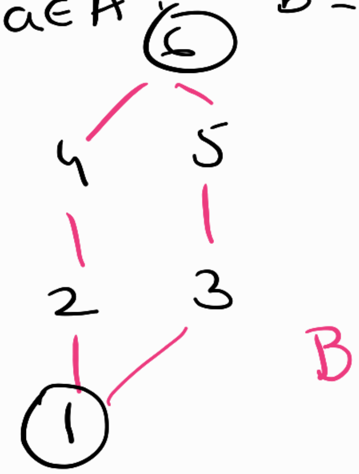
Mínimo: $m \in A$ / $m \leq a$ $\forall a \in A$

misma def para $B \subseteq A$

$B \subseteq A$ subconjunto.

Cota inf: $a \in A$: $a \leq b$ $\forall b \in B$

Cota sup: $a \in A$: $b \leq a$ $\forall b \in B$



Supremo de B: la menor de las cotas sup

Ínfimo de B: la mayor de las inf.

Retículo: A es retículo si $\forall a,b \in A$ $\exists$ $\sup\{a,b\}$ e $\inf\{a,b\}$.

Ejercicio 4. Un orden parcial $(A, \leq)$ es un *buen orden* si todo subconjunto no vacío de A tiene mínimo.

(a) Demostrar que si $(A, \leq)$ es un buen orden entonces es un orden total.

(b) Demostrar que si $(A, \leq)$ es un orden total entonces tiene a lo sumo un elemento maximal.

(c) Concluir que si un orden parcial $(A, \leq)$ tiene dos elementos maximales distintos o dos minimales distintos entonces no es un buen orden.

(a) Orden total (dos elementos cualquiera son comparables) $a, b \in A \Rightarrow a \leq b$ o $b \leq a$.

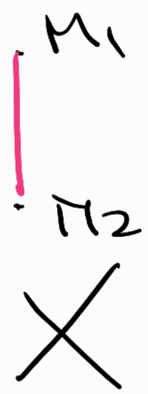
Sean $a, b \in A$, donde $(A, \leq)$ es un b. o.

Si tomamos $S = \{a, b\}$ sabemos que S tiene mínimo:

- si a es mínimo $a \leq b$
- si b es mínimo $b \leq a$

(b) Sean M_1, M_2 elementos maximales, como el orden es total

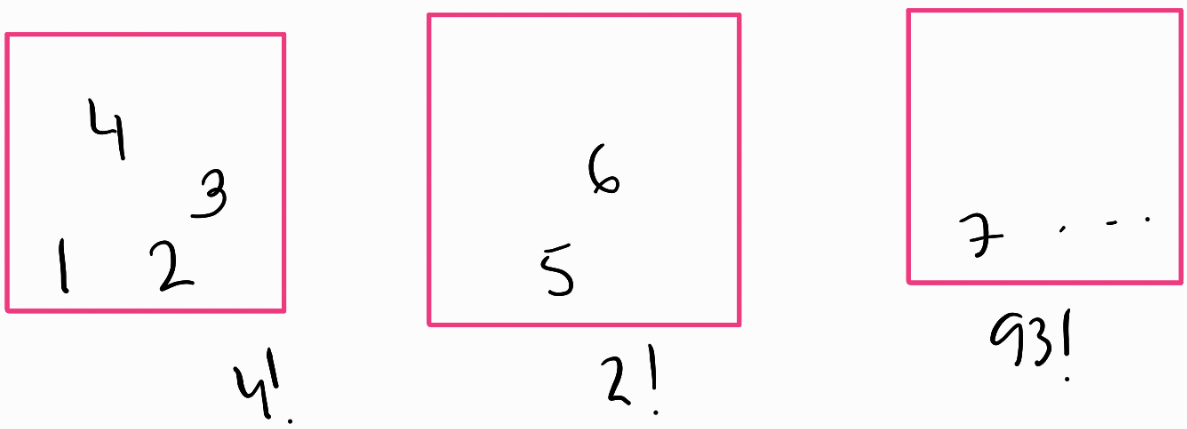
- $M_1 \leq M_2 \Rightarrow$ Como M_1 es maximal $\Rightarrow M_1 = M_2$
- $M_2 \leq M_1 \Rightarrow$ Como M_2 es maximal $\Rightarrow M_1 = M_2$.



o $M_2 = M_1$ ✓

(c) Si tenemos dos elementos maximales, por la parte (b) $(A, \leq)$ no es un orden total y por la parte (a) $(A, \leq)$ tampoco es un buen orden.

Ejercicio 7. Sea $A = \{1, 2, ..., 100\}$. ¿Qué hay más, relaciones de equivalencia o de orden en A?



Hay tantas rel. de eq. como particiones del cjto A.

Si $\{P_1, \dots, P_k\}$ es una partición

$\Rightarrow$ en cada P_i hay $|P_i|!$ órdenes totales

$\Rightarrow$ hay más órdenes que rel. de eq.

Ejercicio 10. ¿Cuáles de los diagramas de Hasse de la Figura 1 representa un retículo?

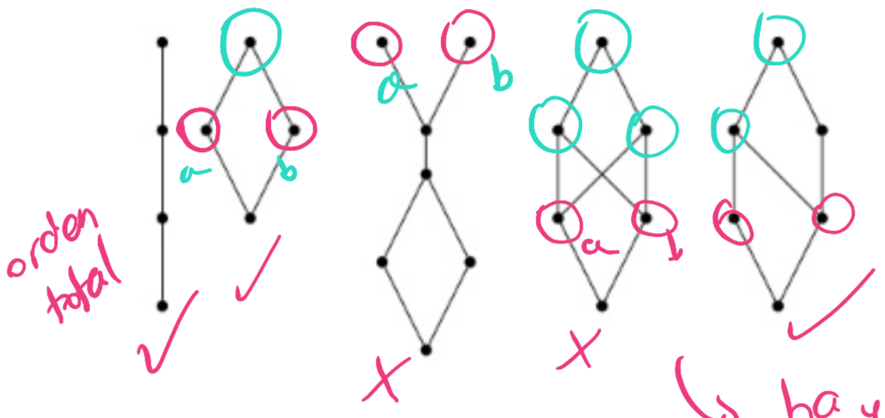


Figure 1:

hay 2 elem. maximales a, b
$\Rightarrow$ no hay cotas sup de $\{a,b\}$

hay 3 cotas sup de $\{a,b\}$ pero no existe inf de estas cotas