Universidad de la República
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística

Matemática Discreta 1

Segundo semestre 2024

PRÁCTICO 6
Relaciones I

Ejercicio 1. Determine si las siguientes relaciones son reflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas ($(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$) o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

a. $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$.

b. $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

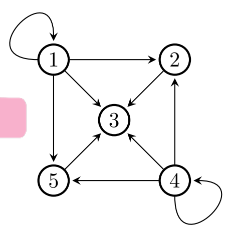
c. $R = \{(1, 3), (1, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.

d. $R = \emptyset$.

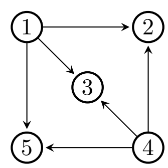
e. $R = A \times A$.

Ejercicio 2. Determine si las relaciones siguientes son reflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, donde cada relación se representa en un grafo dirigido (o digrafo):

i)



ii)



Ejercicio 3. Demuestre o halle un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

a. El producto de dos relaciones puede ser una función sin que ninguna de ellas lo sea.
b. La inversa de una relación puede ser una función sin que ella misma lo sea.
c. El producto de dos relaciones puede dar la relación vacía sin que ninguna de ellas lo sea

Ejercicio 4. Considere el conjunto de propiedades $P = \{\text{reflexiva, simétrica, transitiva}\}$. Para cada subconjunto T de P, encuentre una relación que cumpla las propiedades de T y no cumpla las de $P \setminus T$.

Ejercicio 5. Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

a. Si R y S son *simétricas*: ¿lo serán también $\overline{R}$, R^{-1}, RS, $R \cup S$, $R \cap S$?
b. Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexiva, antisimétrica, asimétrica y transitiva*.

Ejercicio 6. Determinar la cantidad de relaciones R que se pueden definir sobre el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ que verifican simultáneamente las 3 condiciones siguientes: R es simétrica; $(a, b) \in R$; $(c, c) \in R$.

Ejercicio 7. ¿Cuántas relaciones binarias en $A = \{1, 2, \dots, n\}$ son reflexivas? Repita el mismo ejercicio cambiando reflexivas por simétricas y reflexivas por antisimétricas.

Ejercicios de relaciones de equivalencias:

Ejercicio 8. Dada una función $f : A \to B$, definimos la relación en A dada por: $xR_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

(a) Demostrar que R_f es una relación de equivalencia en A.

(b) Demostrar que para toda relación de equivalencia S existe una función f tal que $R_f = S$.

Ejercicio 9. En cada uno de los siguientes casos, probar que R es una relación de equivalencia en A y describir las clases de equivalencia de la relación:

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, \cdot, 100\}$ y aRb si $\lfloor\sqrt{a}\rfloor = \lfloor\sqrt{b}\rfloor$, donde $\lfloor x\rfloor$ denota la parte entera de x.

(b) $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$ y aRb si $a - b$ es un número par.

(c) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a - b$ es múltiplo de 3.

Ejercicio 10. Probar que si R es una relación en A que es simétrica y transitiva, tal que para todo a en A existe algún elemento b en A tal que aRb, entonces R es una relación de equivalencia en A.

Ejercicio 11. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia definidas en $\{1, 2, 3\}$.

Ejercicio 12. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que tienen exactamente 3 clases de equivalencia.

Ejercicio 13. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia R sobre el conjunto $A = \{0, \ldots, 9\}$ con $\#\,[0] = 5$ y $\#\,[2] = 3$.

Ejercicio 14. En cada caso hallar la cantidad de relaciones de equivalencia R en $\{0, 1, \ldots, 7\}$ tales que:

a. $\#[0] = 2$ y $\#[1] = 4$.

b. $\#[0] < \#[1] < \#[2]$ y $(3, 4) \in R$.

ALGUNAS NOTACIONES:

- R^{-1} denota la relación inversa, o sea $R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$;
- $\overline{R}$ la relación complementaria, o sea, $\overline{R} = \{(x, y) : (x, y) \notin R\}$
- RS el producto de las relaciones R y S (denotado como $R \circ S$ en el libro de Grimaldi), o sea $RS = \{(x, z) : \exists\, y, (x, y) \in R \text{ y } (y, z) \in S\}$.

(b) $R = \{(1,1),(1,2)\}$ no es función
$R^{-1} = \{(1,1),(2,1)\}$ es función.

(c) $R = \{(1,1)\}$
$S = \{(2,2)\}$
$RS = \phi$

Ejercicio 5. Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

a. Si R y S son *simétricas*: ¿lo serán también $\overline{R}$, R^{-1}, RS, $R \cup S$, $R \cap S$?

b. Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexiva*, *antisimétrica*, *asimétrica* y *transitiva*.

(a) $A = \{1,2\}$
$R = \{(1,2),(2,1),(1,1)\}$
$\overline{R} = \{(x,y) \in A \times A : (x,y) \notin R\}$
$\overline{R} = \{(2,2)\}$

Sea $(x,y) \in \overline{R} \Rightarrow (x,y) \notin R$
$\Rightarrow (y,x) \notin R$ (sino, por sim. $(x,y) \in R$)
$\Rightarrow (y,x) \in \overline{R}$.

$\Rightarrow \overline{R}$ es simétrico.

$(x,y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y,x) \in R$
$\Leftrightarrow (x,y) \in R$ por simetria
$\Leftrightarrow (y,x) \in R^{-1}$.

$\Rightarrow R^{-1} = R$ es simétrico.

X $(x,z) \in RS \Leftrightarrow \exists y \; (x,y) \in R \quad (y,z) \in S$
$\Leftrightarrow \exists y \; (y,x) \in R, \; (z,y) \in S$
$\Leftrightarrow (z,x) \in SR$

$A = \{1,2,3\}$

$R = \{(1,2),(2,1)\}$ simétrica

$S = \{(2,3),(3,2)\}$ simétrica

$RS = \{(1,3)\}$ $\quad (1,3) \in RS \;,\; (3,1) \notin RS$

$\Rightarrow RS$ no es simétrica

Ejercicio 7. ¿Cuántas relaciones binarias en $A = \{1, 2, \dots, n\}$ son reflexivas? Repita el mismo ejercicio cambiando reflexivas por simétricas y reflexivas por antisimétricas.

La Matriz asociada a una relación $R \subseteq A \times A$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & \cdots & j & \cdots & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & & \\ & & \vdots & & \\ & & M_{ij} & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$$M_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \not R j \\ 1 & \text{si } i R j \end{cases}$$

Ej: $A = \{1,2,3\}$ $\qquad R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1)\}$

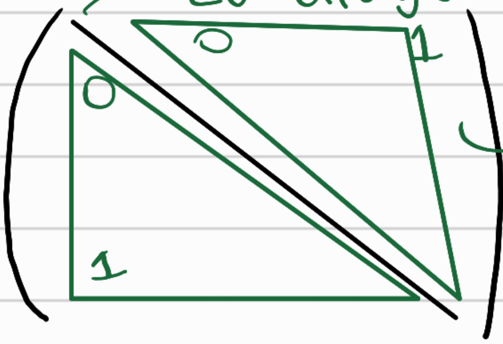
$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Reflexivas: las entradas de la diagonal son 1

$\Rightarrow$  $\Rightarrow$ hay $n^2 - n$ entradas que pueden tomar valor 0 o 1.

Hay 2^{n^2-n} relaciones reflexivas.

Simétrica: la matriz es simétrica: $M_{ij} = M_{ji}$.



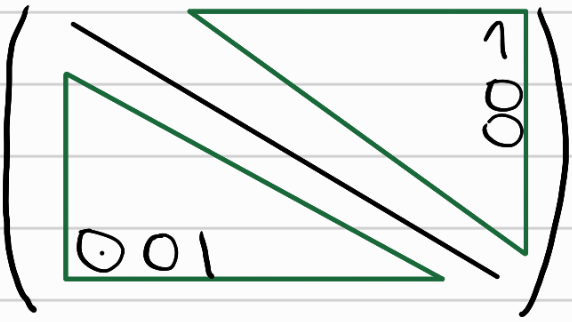
→ La diagonal puede tomar valores 0,1.

→ el Δ sup. determina el Δ inferior

$\Rightarrow$ hay n elementos en la diagonal y $\frac{n^2-n}{2}$ elementos en un Δ.

$\Rightarrow 2^{\frac{n^2-n}{2}+n} = 2^{\frac{n^2+n}{2}}$ relaciones simétricas

Antisimetrico:



Si $M_{ij} = 1 \Rightarrow M_{ji} = 0$

Si $M_{ij} = 0 \Rightarrow M_{ji} = 1$

$\circ$ $M_{ji} = 0$

$\Rightarrow$ · hay n elementos en la diagonal que pueden tomar valor 0 o 1.

· Por cada elemento en el Δ sup hay 3 opc:

1	0
0	1
0	0

$\Rightarrow 2^n \cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}}$ relaciones antisimétricas.

Ejercicio 9. En cada uno de los siguientes casos, probar que R es una relación de equivalencia en A y describir las clases de equivalencia de la relación:

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, \cdot, 100\}$ y aRb si $\lfloor\sqrt{a}\rfloor = \lfloor\sqrt{b}\rfloor$, donde $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de x.

(b) $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$ y aRb si $a - b$ es un número par.

(c) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a - b$ es múltiplo de 3.

R es de equivalencia si es
- Reflexiva
- Simétrica
- Transitiva.

$R \subseteq A \times A$

$[x] = \{y \in A : xRy\}$

(b) $6R3$ si 3 es par $\Rightarrow 6 \not R 3$.
$12R6$ si $12-6=6$ par $\Rightarrow 12 R 6$

- Reflexiva: $a-a=0$ es par $\Rightarrow aRa$ ✓
- Simétrica: $b-a = -(a-b) \Rightarrow$ tienen la misma paridad $\rightarrow aRb \Rightarrow bRa$ ✓
- Transitiva: $b-a$ par, $c-b$ par
$\Rightarrow c-a = \underbrace{c-b}+\underbrace{b-a} =$
$=$ par $-$ par $=$ par ✓

24 30 18 12 6 0	27 15 21 3 9

$[0] = \{0, 6, 12, 18, 24, 30\} = [6] = [12] = [18]$
$= [24] = [30]$

$[3] = \{3, 9, 15, 21, 27\} = [9] = [15] = [21] = [27]$

(c)

- Reflexiva: $a-a=0$ es múltiplo de 3 ✓
- Simétrica: $b-a=-(a-b) \Rightarrow$ si $(a-b)$ es $\dot{3}$
  $(b-a)$ también.
- Transitiva: $b-a\ \dot{3}$, $c-b\ \dot{3}$
  $\Rightarrow c-a = c-b+b-a =$
  $= \dot{3} + \dot{3} = \dot{3}$ ✓