Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 6
Relaciones I

Ejercicio 1. Determine si las siguientes relaciones son reflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas ($(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R$) o transitivas en $A = \{1,2,3,4\}$:

a. $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$.

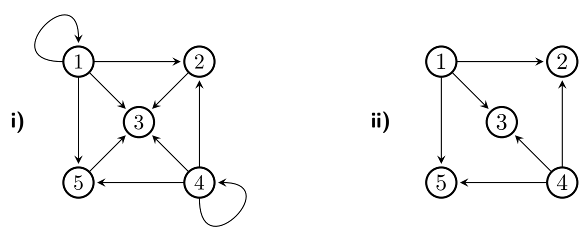
b. $R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$.

c. $R = \{(1,3), (1,1), (3,1), (1,2), (3,3), (4,4)\}$.

d. $R = \emptyset$.

e. $R = A \times A$.

Ejercicio 2. Determine si las relaciones siguientes son reflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas o transitivas en $A = \{1,2,3,4,5\}$, donde cada relación se representa en un grafo dirigido (o digrafo):



Ejercicio 3. Demuestre o halle un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

a. El producto de dos relaciones puede ser una función sin que ninguna de ellas lo sea.
b. La inversa de una relación puede ser una función sin que ella misma lo sea.
c. El producto de dos relaciones puede dar la relación vacía sin que ninguna de ellas lo sea

Ejercicio 4. Considere el conjunto de propiedades $P = \{$reflexiva, simétrica, transitiva$\}$. Para cada subconjunto T de P, encuentre una relación que cumpla las propiedades de T y no cumpla las de $P \setminus T$.

Ejercicio 5. Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

a. Si R y S son *simétricas*: ¿lo serán también $\overline{R}$, R^{-1}, RS, $R \cup S$, $R \cap S$?
b. Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexiva, antisimétrica, asimétrica y transitiva*.

Ejercicio 6. Determinar la cantidad de relaciones R que se pueden definir sobre el conjunto $A = \{a,b,c,d\}$ que verifican simultáneamente las 3 condiciones siguientes: R es simétrica; $(a,b) \in R$; $(c,c) \in R$.

Ejercicio 7. ¿Cuántas relaciones binarias en $A = \{1,2,\ldots,n\}$ son reflexivas? Repita el mismo ejercicio cambiando reflexivas por simétricas y reflexivas por antisimétricas.

Ejercicios de relaciones de equivalencias:

Ejercicio 8. Dada una función $f : A \to B$, definimos la relación en A dada por: $xR_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

(a) Demostrar que R_f es una relación de equivalencia en A.

(b) Demostrar que para toda relación de equivalencia S existe una función f tal que $R_f = S$.

Ejercicio 9. En cada uno de los siguientes casos, probar que R es una relación de equivalencia en A y describir las clases de equivalencia de la relación:

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, \cdot, 100\}$ y aRb si $\lfloor\sqrt{a}\rfloor = \lfloor\sqrt{b}\rfloor$, donde $\lfloor x\rfloor$ denota la parte entera de x.

(b) $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$ y aRb si $a - b$ es un número par.

(c) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a - b$ es múltiplo de 3.

Ejercicio 10. Probar que si R es una relación en A que es simétrica y transitiva, tal que para todo a en A existe algún elemento b en A tal que aRb, entonces R es una relación de equivalencia en A.

Ejercicio 11. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia definidas en $\{1, 2, 3\}$.

Ejercicio 12. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que tienen exactamente 3 clases de equivalencia.

Ejercicio 13. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia R sobre el conjunto $A = \{0, \dots, 9\}$ con $\#\,[0] = 5$ y $\#\,[2] = 3$.

Ejercicio 14. En cada caso hallar la cantidad de relaciones de equivalencia R en $\{0, 1, \dots, 7\}$ tales que:

a. $\#[0] = 2$ y $\#[1] = 4$.

b. $\#[0] < \#[1] < \#[2]$ y $(3, 4) \in R$.

ALGUNAS NOTACIONES:

- R^{-1} denota la relación inversa, o sea $R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$;
- $\overline{R}$ la relación complementaria, o sea, $\overline{R} = \{(x, y) : (x, y) \notin R\}$
- RS el producto de las relaciones R y S (denotado como $R \circ S$ en el libro de Grimaldi), o sea $RS = \{(x, z) : \exists\, y, (x, y) \in R \text{ y } (y, z) \in S\}$.

Ejercicio 4. Considere el conjunto de propiedades $P = \{\text{reflexiva, simétrica, transitiva}\}$. Para cada subconjunto T de P, encuentre una relación que cumpla las propiedades de T y no cumpla las de $P \setminus T$.

$A = \{1,2,3\}$

- $T = \{\text{reflexiva}\}$ $P \setminus T = \{\text{simétrica, transitiva}\}$

Relación R no S ni T

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3)\}$

- Relación R, S y T

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

- Relación S y T no R

$R = \phi$

- Relación no R, no S, no T

$R = \{(1,3),(2,1)\}$

$1 \not R 1$ no ref.

$2R1$ pero $1 \not R 2$ no simi.

$2R1$ o $1R3$ pero $2 \not R 3$

- Relación no R, no T pero si S

$R = \{(1,3),(2,1),(1,2),(3,1)\}$

$1 \not R 1$ no ref.

$1R2$ y $2R1$ } simétrica

$1R3$ y $3R1$

$1R3$ y $3R1$ pero $1 \not R 1 \Rightarrow$ no trans.

Ejercicio 5. Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

a. Si R y S son *simétricas*: ¿lo serán también $\overline{R}$, R^{-1}, RS, $R \cup S$, $R \cap S$?

b. Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexiva*, *antisimétrica*, *asimétrica y transitiva*.

(a) $\overline{R} = \{(x,y) : (x,y) \notin R\}$

$A = \{1,2\}$

$R = \{(1,2), (2,1), (1,1)\}$

$\overline{R} = \{(2,2)\}$

$\overline{R}$ es simétrica:

Sea $(x,y) \in \overline{R} \Rightarrow (x,y) \notin R$

$\Rightarrow (y,x) \notin R$ (si $(y,x) \in R \Rightarrow (x,y) \in R$)

$\Rightarrow (y,x) \in \overline{R}$.

R^{-1} es simétrica:

Sea $(x,y) \in R^{-1} \Rightarrow (y,x) \in R$

$\Rightarrow (x,y) \in R$ por simetría

$\Rightarrow (y,x) \in R^{-1}$

$RS = \{(x,z) : \exists y \ (x,y) \in R$ e $(y,z) \in S\}$:

Sea $(x,z) \in RS \Leftrightarrow \exists y \ (x,y) \in R$ e $(y,z) \in S$

$\Leftrightarrow \exists y \ (y,x) \in R$ e $(z,y) \in S$

$\Leftrightarrow \exists y \ (z,y) \in S$ e $(y,x) \in R$

$\Leftrightarrow (z,x) \in SR$

esto no es lo queríamos, la ppd. no parece cierta, busquemos contraejemplo.

$R = \{(1,2),(2,1)\}$
$S = \{(1,3),(3,1)\}$

$RS = \{(2,3)\}$

$2R3$ pero $3 \not R 2$ $\rightarrow$ no sim.

$(1,1) \notin RS$
$(2,3) \in RS$
$(1,3) \notin RS$

$(2,3) \in RS$ si $\exists\, y \,/\, (2,y) \in R \quad (y,3) \in S$.

Ejercicio 7. ¿Cuántas relaciones binarias en $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ son reflexivas? Repita el mismo ejercicio cambiando reflexivas por simétricas y reflexivas por antisimétricas.

$R \subseteq A \times A$. R tiene una matriz asociada

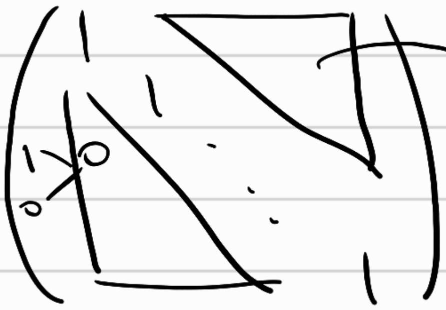
$$M \quad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline 1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ n & & & & \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{ij} = 0 & \text{si } i \not R j \\ M_{ij} = 1 & \text{si } i R j \end{cases}$$

Ej: $A = \{(1,2,3)\}$ $\qquad R = \{(1,1),(2,2),(1,2)\}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R es reflexiva sii su matriz asociada M tiene 1 en la diagonal: $M_{ii} = 1 \; \forall i = 1, \dots, n$

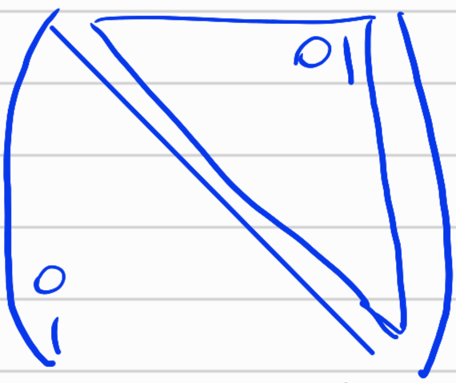


una entrada aquí puede ser 0 o 1.

Hay $n^2 - n$ entradas que pueden ser 0 o 1 (todas las entradas $-$ la diagonal)
$\Rightarrow$ hay $2^{n(n-1)}$ relaciones reflexivas.

Otra forma: hay $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$ elem. en el triangulo superior $\Rightarrow$ hay $n(n-1)$ en los dos Δ $\Rightarrow$ hay $2^{n(n-1)}$ relaciones reflexivas.

R es simétrica sii M es simétrica $\Rightarrow$ la matriz queda determinada por los elem. de la diagonal y de un solo Δ



Hay $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ entradas que pueden
$\Rightarrow$ ser 0 o 1 $\Rightarrow$ $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ rel. simétricas.

R es antisimétrica sii M_{ij} y M_{ji} $j \neq i$ no son ambos 1.

$\underline{i \neq j}$:

Si $M_{ij} = 1 \Rightarrow iRj \Rightarrow j \not{R} i$
$\Rightarrow M_{ji} = 0$

Si $M_{ij} = 0 \Rightarrow i \not{R} j$
$\Rightarrow jRi$ o $j \not{R} i$
$\Rightarrow M_{ji} = 1$ o $M_{ji} = 0$

En la diagonal: puede tomar valor 0 o 1

Si $i \neq j$: Hay 3 opciones

0	0
0	1
1	0

Conclusión: hay $2^n \cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ relaciones antisimétricas.

Ejercicio 8. Dada una función $f: A \to B$, definimos la relación en A dada por: $xR_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

(a) Demostrar que R_f es una relación de equivalencia en A.

(b) Demostrar que para toda relación de equivalencia S existe una función f tal que $R_f = S$.

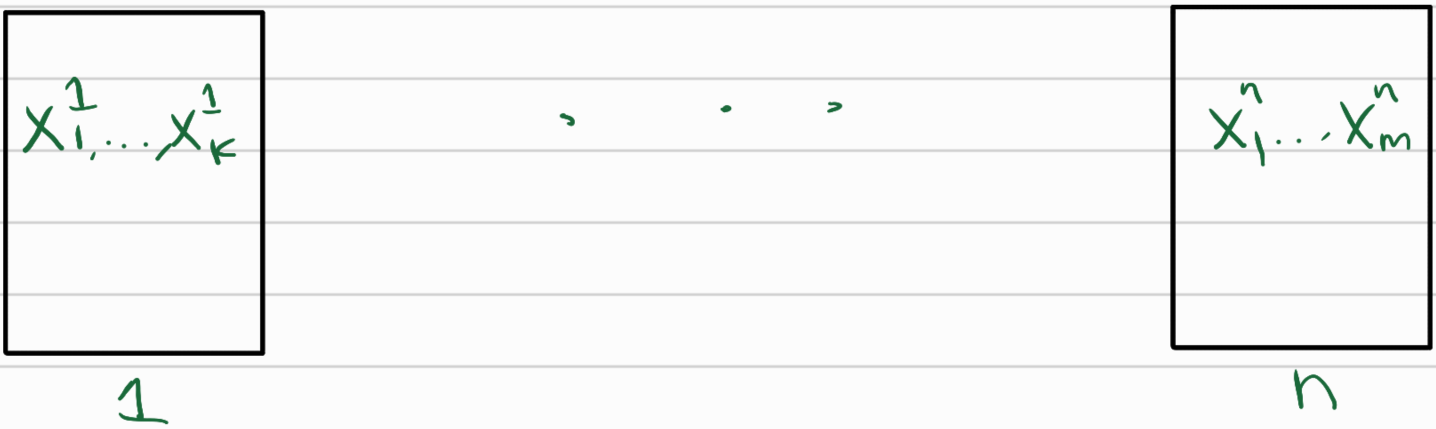
(a) Reflexiva: $xR_f x \Leftrightarrow f(x) = f(x)$ ✓

Simétrica: $xR_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(y) = f(x)$ ✓

Transitiva: $xR_f y \quad yR_f z \Rightarrow \begin{cases} f(x) = f(y) \\ f(y) = f(z) \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = f(z) \to xR_f z$ ✓

(b) Sea S reflexiva, simétrica y transitiva



$S \subseteq A \times A$

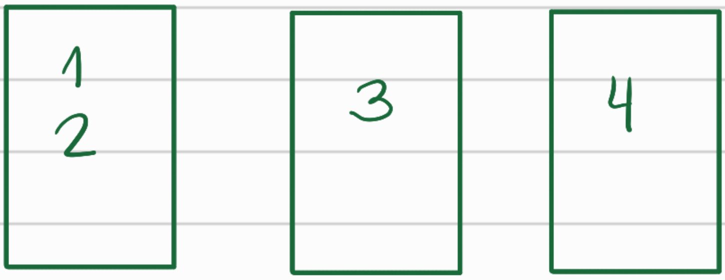
Si tengo una rel. eq. $\Rightarrow$ puedo partir mi conjunto A en subconjuntos que son las clases de eq.

$$\Rightarrow f: A \to \text{Cjto. de clases}$$
$$a \to [a]$$

↳ Lo seguimos viendo la próxima clase.

Ejemplo: $A = \{1,2,3,4\}$

$S = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1)\} \subseteq A \times A$



Clase de equivalencia: $[x] = \{y : (x,y) \in S\}$

$\Rightarrow$ dos clases de equivalencia son iguales o son disjuntas $\Rightarrow$ la función de arriba está bien definida y $(x,y) \in S \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.