Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 5

Sucesiones definidas por relaciones de recurrencia

Ejercicio 1. En cada caso hallar el término a_{100}:

(a) $a_{n+1} - 3a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, con $a_{50} = 2 \cdot 3^{-8}$.

(b) $a_{n+2} + 4a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, con $a_0 = a_1 = 1$ (sugerencia: use el cambio de variable $b_n := a_{2n}$).

Ejercicio 2. Resolver las relaciones de recurrencia:

(a) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$ con $a_0 = 1, a_1 = 3$.

(b) $b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$ con $b_0 = 5, b_2 = 27$.

Ejercicio 3. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se considera el número: $a_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.

(a) Mostrar que a_n verifica una relación de recurrencia de orden 2, homogénea, a coeficientes constantes.
(b) Probar que a_n es un entero positivo para todo natural n.

Ejercicio 4. Hay n estudiantes formando una fila y cuando suena el silbato cada estudiante puede (no está obligado) intercambiar de lugar con su compañero de adelante o de atrás (en caso de que los haya). ¿De cuántas formas diferentes pueden quedar esos n estudiantes luego de haber sonado el silbato?

Ejercicio 5. (Examen Febrero 2009)
Para un campeonato de ajedrez se tiene una cantidad par de jugadores participantes. Se quiere armar la primera fecha (en una fecha todos los participantes juegan exactamente un partido). Sea a_k la cantidad de formas de armar la primera fecha de un campeonato con $2k$ jugadores.

(a) Calcular a_1, a_2, a_3.
(b) Deducir que $a_{k+1} = (2k+1) \times a_k$.
(c) Probar que $a_k = (2k-1) \times (2k-3) \times ... \times 3 \times 1$, para todo $k \geq 1$.

Ejercicio 6. Expresar a_n en función de los términos anteriores (a_k con $k \leqslant n-1$) siendo a_n:

(a) La cantidad de saludos entre las primeras n personas que llegan a una reunión.

(b) El número de secuencias de ceros y unos de largo n en las cuales no aparecen dos ceros seguidos.

(c) El número de secuencias de largo n de letras A, B y C que no tienen la letra A dos veces seguidas.

(d) La cantidad de formas de subir una escalera de n escalones si se pueden subir de a uno o de a dos en cada paso.

(e) Lo anterior pero sin que se puedan saltar dos veces seguidas un escalón (o sea, que si se saltea un escalón, entonces el siguiente no se saltea).

(f) El número de secuencias de unos y doses que suman n. Por ejemplo, para $n = 3$ son 3 secuencias en total: 111, 12 y 21.

Ejercicio 7. Respolver las relaciones de recurrencia:

(a) $c_{n+1} = c_n + n2^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $c_0 = 0$.

(b) $d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{2}d_{n+1} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$, con $d_0 = d_{100} = 0$.

(c) $e_{n+1} = 2e_n + 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $e_0 = 0$.

(d) $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n \in \mathbb{N}$, con $f_0 = f_1 = 1$.

Ejercicio 8. Se pretende diseñar una bandera con n franjas horizontales, cada una de las cuales puede ser de color rojo, azul, verde o amarillo. Hallar la cantidad de banderas posibles en cada una de las siguientes situaciones:

(a) No hay restricciones sobre el color de cada franja.
(b) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color.
(c) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color, como tampoco pueden serlo la primera y la última franjas.

Aclaración: Se considera que la bandera tiene una primera franja, una segunda franja, tercera franja, etc (de arriba hacia abajo, por ejemplo). En el conteo importa de que color está pintada cada franja.

Ejercicio 9. Para cada una de las siguientes relaciones de recurrencia utilice un cambio de variable adecuado para transformala en una recurrencia lineal, luego halle la solución general de la misma.

(a) $a_n - na_{n-1} = 0, \quad n \geqslant 1$.

(b) $na_n - (n-1)a_{n-1} = 0, \quad n \geqslant 2$.

(c) $a_n/a_{n-1}^p = 2$, $n \geq 1$, siendo $a_0 = 1$ y p positivo diferente de 1.

(d) $a_{n+2} = 4a_{n+1}^2/a_n$, $n \geq 0$, siendo $a_0 = a_1 = 1$

Ejercicio 10. (Primer Parcial 2009)
Si a_n verifica que $a_n - 2a_{n-1} = 3 \times 2^n$, con $a_0 = 1$, entonces:

(a) $a_{50} = 2^{50}$; (b) $a_{50} = 50 \times 2^{50}$; (c) $a_{50} = 150 \times 2^{50}$; (d) $a_{50} = 151 \times 2^{50}$.

Ejercicio 11. (Parcial 2001)
Se considera la siguiente ecuación:

$$a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 2^n, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

Hallar α, β y a_{100} sabiendo que: $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 1$ y $a_3 = 17$.

$(*)\ A a_{n+2} + B a_{n+1} + C a_n = r^n h(n)$

cte   polinomio

La solución general es $a_n = b_n + a_n^P$, donde b_n es sol. de $A a_{n+2} + B a_{n+1} + C a_n = 0$ y a_n^P es una solución particular

Recordemos:

Para hallar b_n: hallamos r_1 y r_2 raíces de $Ar^2 + Br + C = 0$.

a) Si $r_1 \neq r_2$: $b_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$.

b) Si $r_1 = r_2$: $b_n = \alpha r_1^n + \beta . n . r_1^n$.

Para hallar a_n^P:

1) Si $r = r_1 = r_2$ (r raíz doble del polinomio.

$\Rightarrow a_n^P = n^2 r^n g(n)$ ($g(n)$ polinomio del mismo grado que $h(n)$)

2) Si r es raíz simple del polinomio

$a_n^P = n r^n g(n)$

3) Si r no es raíz $\Rightarrow a_n^P = r^n g(n)$.

Ejercicio 7. Respolver las relaciones de recurrencia:

(a) $c_{n+1} = c_n + n2^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $c_0 = 0$.

(b) $d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{2}d_{n+1} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$, con $d_0 = d_{100} = 0$.

(c) $e_{n+1} = 2e_n + 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $e_0 = 0$.

(d) $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n \in \mathbb{N}$, con $f_0 = f_1 = 1$.

(a) $C_{n+1} - C_n = n2^{n-1}$

La sol. grd. es $C_n = b_n + C_n^P$

sol. homogenea

Paso 1 Hallamos b_n:

$$b_{n+1} = b_n = b_{n-1} = \dots = b_1 = b_0$$

$$\Rightarrow \boxed{b_n = \alpha \text{ cte.}}$$

Paso 2 Hallemos C_n^P: la solución es de la forma $C_n^P = 2^n \cdot g(n)$ g polinomio de grado 1

$g(n) = an + b$

$2^n(an+b)$ debe ser tal que cumpla la recurrencia $\Rightarrow$

$$2^{n+1}(a(n+1)+b) - 2^n(an+b) = n2^{n-1}$$

$$2 \cdot \cancel{2^n}(an+b+a) - \cancel{2^n}(an+b) = \frac{n}{2}\cancel{2^{n-1}}$$

$$2(an+b+a) - (an+b) = \frac{1}{2}n$$

$$\underbrace{2an - an}_{\frac{1}{2}n} + \underbrace{2b + 2a - b}_{0} = \frac{1}{2}n$$

$an = \frac{1}{2}n \Rightarrow a = 1/2$

$b + 2a = 0 \Rightarrow b = -1$

$\Rightarrow g(n) = \frac{1}{2}n - 1$

Paso 3 La solución grel. de la no hom. es $C_n = b_n + C_n^P$.

$= \alpha + \left(\frac{1}{2}n - 1\right)2^n$

Paso 4 Hallamos α que verifique nuestra condición inicial

$\Rightarrow C_0 = 0 \Rightarrow \alpha$ debe ser tq

$\alpha + \frac{1}{2}\cdot 0 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$

$$C_n = 1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right)2^n$$

(b) $-\frac{1}{2}d_{n+2} + d_{n-1} - \frac{1}{2}d_n = 1$

$r=1$ polinomio cte 1.

Resolvemos la recurrencia homogenea.

$p(\lambda) = -\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(\lambda^2 - 2\lambda + 1)$

$= -\frac{1}{2}(\lambda - 1)^2$

$\Rightarrow$ Tiene raiz doble $\boxed{\lambda = 1}$

$$b_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot n \cdot 1^n = \alpha + \beta n$$

Ahora hallamos una solución particular.
$r=1$ es raíz doble del pol. car!
Entonces

$$d_n^P = n^2 \cdot 1^n \cdot g(n)$$

↪ polinomio cte.

$$\boxed{d_n^P = n^2 \cdot K}$$

Hallamos K:

$$-\frac{1}{2}\left((n+2)^2 \cdot K\right) + (n+1)^2 K - \frac{1}{2}(n^2 K) = 1$$

$$-K(n^2+4n+4) + 2(n^2+2n+1)K - n^2K = 2$$

$$-K\cancel{n^2} - \cancel{4Kn} - 4K + \cancel{2n^2K} + \cancel{4nK} + 2K - \cancel{n^2K} = 2$$

$$-2K = 2 \Rightarrow K = -1$$

$$\boxed{d_n^P = -n^2}$$

$\Rightarrow$ La sol. grl. es $d_n = \alpha + \beta n - n^2$

$\Rightarrow$ hallemos α y β para que $d_0 = d_{100} = 0$.

$$d_0 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta \cdot 0 - 0^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$d_{100} = 0 \Rightarrow \beta \cdot 100 - 100^2 = 0 \Rightarrow \beta = 100$$

$$\boxed{d_n = 100n - n^2}$$

Ejercicio 11. (Parcial 2001)
Se considera la siguiente ecuación:

$$(*) \quad a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 2^n, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

Hallar α, β y a_{100} sabiendo que: $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 1$ y $a_3 = 17$.

α y β deben ser tales que a_0, a_1, a_2 cumplan la recurrencia.

$$\Rightarrow 1 + \alpha 5 + \beta \cdot 1 = 2^2$$

a_1, a_2 y a_3 también cumplen $(*)$

$$\Rightarrow 17 + \alpha + 5\beta = 2^3$$

$$\begin{cases} 5\alpha + \beta = 3 \quad \cdot 5 \\ 5\alpha + 5\beta = -9 \quad \cdot 5 \\ \hline -24\beta = 48 \end{cases}$$

$$\beta = -2 \rightsquigarrow \alpha = -9 + 5 \cdot (-2)$$
$$= 1$$

$\Rightarrow$ la ecuación nos queda:

$$a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2} = 2^n$$

$\overset{\shortparallel}{r^n}$ $\quad h(n) = 1$ cte.

Ejercicio 9. Para cada una de las siguientes relaciones de recurrencia utilice un cambio de variable adecuado para transformala en una recurrencia lineal, luego halle la solución general de la misma.

(a) $a_n - na_{n-1} = 0, \quad n \geqslant 1.$

(b) $na_n - (n-1)a_{n-1} = 0, \quad n \geqslant 2.$

(c) $a_n / a_{n-1}^p = 2$, $n \geq 1$, siendo $a_0 = 1$ y p positivo diferente de 1.

(d) $a_{n+2} = 4a_{n+1}^2 / a_n$, $n \geq 0$, siendo $a_0 = a_1 = 1$ $\hookrightarrow b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow b_{n+1} = 4b_n$

(a)
$$
\begin{aligned}
a_n &= n a_{n-1} \\
&= n \cdot (n-1) a_{n-2} \\
&= n(n-1)(n-2) a_{n-3} \\
&= n(n-1)(n-2)(n-3) a_{n-4} \\
&\vdots \\
&= n! \; a_0
\end{aligned}
$$

(b) Cambio de variables $b_n = n a_n$

$b_n - b_{n-1} = 0 \longrightarrow b_n = \alpha$ cte.

$\Leftrightarrow na_n - (n-1)a_{n-1} = 0$

$\Rightarrow na_n = \alpha \rightsquigarrow \boxed{a_n = \dfrac{\alpha}{n}}$

$$
\begin{aligned}
a_n = \frac{(n-1)\,a_{n-1}}{n} &= \frac{(n-1)}{n} \frac{(n-2)}{(n-1)} a_{n-2} \\
&= \frac{(n-\cancel{1})}{n} \frac{(n-\cancel{2})}{(\cancel{n-1})} \frac{(n-3)}{(\cancel{n-2})} a_{n-3} \\
&= \frac{1}{n} a_1
\end{aligned}
$$