Universidad de la República | **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística | **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 5
Sucesiones definidas por relaciones de recurrencia

Ejercicio 1. En cada caso hallar el término a_{100}:

(a) $a_{n+1} - 3a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, con $a_{50} = 2 \cdot 3^{-8}$.

(b) $a_{n+2} + 4a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, con $a_0 = a_1 = 1$ (sugerencia: use el cambio de variable $b_n := a_{2n}$).

Ejercicio 2. Resolver las relaciones de recurrencia:

(a) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \;$ con $a_0 = 1, a_1 = 3$.

(b) $b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \;$ con $b_0 = 5, b_2 = 27$.

Ejercicio 3. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se considera el número: $a_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.

(a) Mostrar que a_n verifica una relación de recurrencia de orden 2, homogénea, a coeficientes constantes.
(b) Probar que a_n es un entero positivo para todo natural n.

Ejercicio 4. Hay n estudiantes formando una fila y cuando suena el silbato cada estudiante puede (no está obligado) intercambiar de lugar con su compañero de adelante o de atrás (en caso de que los haya). ¿De cuántas formas diferentes pueden quedar esos n estudiantes luego de haber sonado el silbato?

Ejercicio 5. (Examen Febrero 2009)
Para un campeonato de ajedrez se tiene una cantidad par de jugadores participantes. Se quiere armar la primera fecha (en una fecha todos los participantes juegan exactamente un partido). Sea a_k la cantidad de formas de armar la primera fecha de un campeonato con $2k$ jugadores.

(a) Calcular a_1, a_2, a_3.
(b) Deducir que $a_{k+1} = (2k+1) \times a_k$.
(c) Probar que $a_k = (2k-1) \times (2k-3) \times \ldots \times 3 \times 1$, para todo $k \geq 1$.

Ejercicio 6. Expresar a_n en función de los términos anteriores (a_k con $k \leqslant n-1$) siendo a_n:

(a) La cantidad de saludos entre las primeras n personas que llegan a una reunión.

(b) El número de secuencias de ceros y unos de largo n en las cuales no aparecen dos ceros seguidos.

(c) El número de secuencias de largo n de letras A, B y C que no tienen la letra A dos veces seguidas.

(d) La cantidad de formas de subir una escalera de n escalones si se pueden subir de a uno o de a dos en cada paso.

(e) Lo anterior pero sin que se puedan saltar dos veces seguidas un escalón (o sea, que si se saltea un escalón, entonces el siguiente no se saltea).

(f) El número de secuencias de unos y doses que suman n. Por ejemplo, para $n = 3$ son 3 secuencias en total: 111, 12 y 21.

Ejercicio 7. Respolver las relaciones de recurrencia:

(a) $c_{n+1} = c_n + n2^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $c_0 = 0$.

(b) $d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{2}d_{n+1} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$, con $d_0 = d_{100} = 0$.

(c) $e_{n+1} = 2e_n + 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $e_0 = 0$.

(d) $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n \in \mathbb{N}$, con $f_0 = f_1 = 1$.

Ejercicio 8. Se pretende diseñar una bandera con n franjas horizontales, cada una de las cuales puede ser de color rojo, azul, verde o amarillo. Hallar la cantidad de banderas posibles en cada una de las siguientes situaciones:

(a) No hay restricciones sobre el color de cada franja.
(b) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color.
(c) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color, como tampoco pueden serlo la primera y la última franjas.

Aclaración: Se considera que la bandera tiene una primera franja, una segunda franja, tercera franja, etc (de arriba hacia abajo, por ejemplo). En el conteo importa de que color está pintada cada franja.

Ejercicio 9. Para cada una de las siguientes relaciones de recurrencia utilice un cambio de variable adecuado para transformala en una recurrencia lineal, luego halle la solución general de la misma.

(a) $a_n - na_{n-1} = 0, \quad n \geqslant 1$.

(b) $na_n - (n-1)a_{n-1} = 0, \quad n \geqslant 2$.

(c) $a_n/a_{n-1}^p = 2$, $n \geq 1$, siendo $a_0 = 1$ y p positivo diferente de 1.

(d) $a_{n+2} = 4a_{n+1}^2/a_n$, $n \geq 0$, siendo $a_0 = a_1 = 1$

Ejercicio 10. (Primer Parcial 2009)
Si a_n verifica que $a_n - 2a_{n-1} = 3 \times 2^n$, con $a_0 = 1$, entonces:

(a) $a_{50} = 2^{50}$; (b) $a_{50} = 50 \times 2^{50}$; (c) $a_{50} = 150 \times 2^{50}$; (d) $a_{50} = 151 \times 2^{50}$.

Ejercicio 11. (Parcial 2001)
Se considera la siguiente ecuación:

$$a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 2^n, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

Hallar α, β y a_{100} sabiendo que: $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 1$ y $a_3 = 17$.

Ejercicio 4. Hay n estudiantes formando una fila y cuando suena el silbato cada estudiante puede (no está obligado) intercambiar de lugar con su compañero de adelante o de atrás (en caso de que los haya). ¿De cuántas formas diferentes pueden quedar esos n estudiantes luego de haber sonado el silbato?

E_4	E_4	E_4
E_3	E_2 ✓	E_1 X
E_2	E_3	E_2
E_1	E_1	E_3

a_n: formas diferentes en que pueden quedar n est.

E_4		E_4		E_3
E_3	A	E_3	B	E_4
E_2		E_2		E_2
E_1		E_1		E_1

Supongamos que hay $n+1$ estudiantes.
El estudiante $n+1$ puede

- Quedarse en su posición: los otros n estudiantes tienen a_n formas de posicionarse.

- Intercambiar con el de adelante: $E_{n+1} \leftrightarrow E_n$.
los otros $n-1$ estudiantes tienen a_{n-1} formas de posicionarse.

Por la Regla de la suma:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

$a_1 = 1$

$a_2 = 2$

(hay que resolverla)

Ejercicio 5. (Examen Febrero 2009)

Para un campeonato de ajedrez se tiene una cantidad par de jugadores participantes. Se quiere armar la primera fecha (en una fecha todos los participantes juegan exactamente un partido). Sea a_k la cantidad de formas de armar la primera fecha de un campeonato con $2k$ jugadores.

(a) Calcular a_1, a_2, a_3.

(b) Deducir que $a_{k+1} = (2k+1) \times a_k$.

(c) Probar que $a_k = (2k-1) \times (2k-3) \times \ldots \times 3 \times 1$, para todo $k \geq 1$.

(a) $a_1 = 1$ $\qquad a_4 = 7 \cdot 5 \cdot 3$

$a_2 = 3 = C^4_2 / 2$

$a_3 = 5 \cdot 3$

(b) $a_{k+1} = (2k+1)\ a_k$

a_{k+1}: 2k+2 jugadores

$(2k+1)$: emparejamos al primer jugador

a_k: emparejamos a los otros 2k jugadores.

(c) Por Inducción Completa

P.B. $\quad a_1 = 1 = (2 \cdot 1 - 1)$ ✓

P.I.: H.I. $\quad a_k = (2k-1)(2k-3) \ldots 3 \cdot 1$

T.I. $\quad a_{k+1} = (2(k+1)-1)(2(k+1)-3) \ldots 3 \cdot 1.$

$= (2k+1)(2k-1) \ldots 3 \cdot 1.$

dem. del P.I.: $\quad a_{k+1} = (2k+1) a_k$

$= (2k+1)(2k-1)(2k-3) \ldots 3 \cdot 1.$ ∎

Ejercicio 6. Expresar a_n en función de los términos anteriores (a_k con $k \leqslant n-1$) siendo a_n:

(a) La cantidad de saludos entre las primeras n personas que llegan a una reunión.

(b) El número de secuencias de ceros y unos de largo n en las cuales no aparecen dos ceros seguidos.

(c) El número de secuencias de largo n de letras A, B y C que no tienen la letra A dos veces seguidas.

(d) La cantidad de formas de subir una escalera de n escalones si se pueden subir de a uno o de a dos en cada paso.

(e) Lo anterior pero sin que se puedan saltar dos veces seguidas un escalón (o sea, que si se saltea un escalón, entonces el siguiente no se saltea).

(f) El número de secuencias de unos y doses que suman n. Por ejemplo, para $n=3$ son 3 secuencias en total: 111, 12 y 21. $\rightsquigarrow$ es la parte (d).

(a) $a_{n+1} = n + a_n$

$P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5$

$a_4 \quad \cdot \quad 4$

(b)
0 0 1 1 0 ✗
0 1 0 1 1 ✓
1 1 1 1 1 ✓

$1 \underbrace{\ 0 \ / \ 1 \ }_{\text{secuencia válida de largo } n}$ $\cdot$ $0\ 1 \underbrace{\qquad}_{\text{secuencia válida de largo } n-1}$.

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

(c) Hay dos opciones para una secuencia de largo $n+1$.

- Empieza con A : $A \ \begin{matrix} B \\ C \\ 2 \end{matrix} \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{secuencia válida de largo } n-1}$ hay $2 \cdot a_{n-1}$

- Empieza con B o C : $\begin{matrix} B \\ C \\ 2 \end{matrix} \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{secuencia válida de largo } n}$ hay $2 \cdot a_n$

$a_{n+1} = 2a_n + 2a_{n-1}$

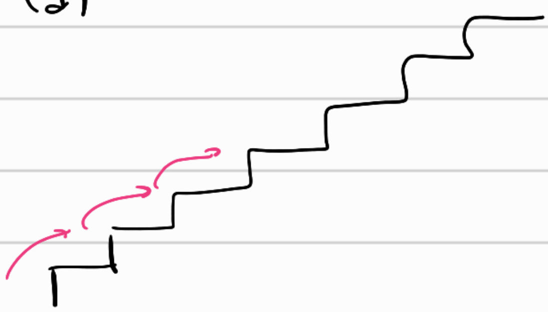
A B A C A

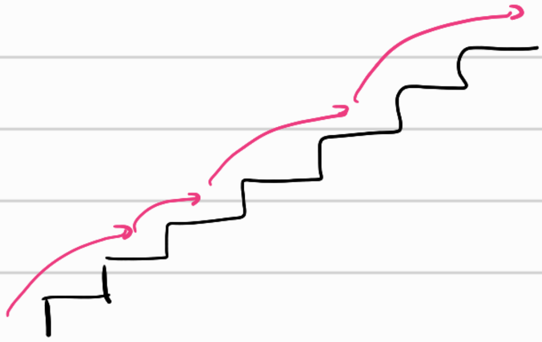
A C A C A

B A C A C

C A C A C

(d)





Hay 2 opciones para subir n+1 escalones:

Comienzo subiendo un escalón: a_n

Comienzo subiendo dos escalones: a_{n-1}

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.