Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 5

Sucesiones definidas por relaciones de recurrencia

Ejercicio 1. En cada caso hallar el término a_{100}:

(a) $a_{n+1} - 3a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, con $a_{50} = 2 \cdot 3^{-8}$.

(b) $a_{n+2} + 4a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, con $a_0 = a_1 = 1$ (sugerencia: use el cambio de variable $b_n := a_{2n}$).

Ejercicio 2. Resolver las relaciones de recurrencia:

(a) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $a_0 = 1, a_1 = 3$.

(b) $b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $b_0 = 5, b_2 = 27$.

Ejercicio 3. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se considera el número: $a_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.

(a) Mostrar que a_n verifica una relación de recurrencia de orden 2, homogénea, a coeficientes constantes.
(b) Probar que a_n es un entero positivo para todo natural n.

Ejercicio 4. Hay n estudiantes formando una fila y cuando suena el silbato cada estudiante puede (no está obligado) intercambiar de lugar con su compañero de adelante o de atrás (en caso de que los haya). ¿De cuántas formas diferentes pueden quedar esos n estudiantes luego de haber sonado el silbato?

Ejercicio 5. (Examen Febrero 2009)
Para un campeonato de ajedrez se tiene una cantidad par de jugadores participantes. Se quiere armar la primera fecha (en una fecha todos los participantes juegan exactamente un partido). Sea a_k la cantidad de formas de armar la primera fecha de un campeonato con $2k$ jugadores.

(a) Calcular a_1, a_2, a_3.
(b) Deducir que $a_{k+1} = (2k+1) \times a_k$.
(c) Probar que $a_k = (2k-1) \times (2k-3) \times ... \times 3 \times 1$, para todo $k \geq 1$.

Ejercicio 6. Expresar a_n en función de los términos anteriores (a_k con $k \leqslant n-1$) siendo a_n:

(a) La cantidad de saludos entre las primeras n personas que llegan a una reunión.

(b) El número de secuencias de ceros y unos de largo n en las cuales no aparecen dos ceros seguidos.

(c) El número de secuencias de largo n de letras A, B y C que no tienen la letra A dos veces seguidas.

(d) La cantidad de formas de subir una escalera de n escalones si se pueden subir de a uno o de a dos en cada paso.

(e) Lo anterior pero sin que se puedan saltar dos veces seguidas un escalón (o sea, que si se saltea un escalón, entonces el siguiente no se saltea).

(f) El número de secuencias de unos y doses que suman n. Por ejemplo, para $n = 3$ son 3 secuencias en total: 111, 12 y 21.

Ejercicio 7. Respolver las relaciones de recurrencia:

(a) $c_{n+1} = c_n + n2^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $c_0 = 0$.

(b) $d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{2}d_{n+1} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$, con $d_0 = d_{100} = 0$.

(c) $e_{n+1} = 2e_n + 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $e_0 = 0$.

(d) $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n \in \mathbb{N}$, con $f_0 = f_1 = 1$.

Ejercicio 8. Se pretende diseñar una bandera con n franjas horizontales, cada una de las cuales puede ser de color rojo, azul, verde o amarillo. Hallar la cantidad de banderas posibles en cada una de las siguientes situaciones:

(a) No hay restricciones sobre el color de cada franja.
(b) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color.
(c) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color, como tampoco pueden serlo la primera y la última franjas.

Aclaración: Se considera que la bandera tiene una primera franja, una segunda franja, tercera franja, etc (de arriba hacia abajo, por ejemplo). En el conteo importa de que color está pintada cada franja.

Ejercicio 9. Para cada una de las siguientes relaciones de recurrencia utilice un cambio de variable adecuado para transformala en una recurrencia lineal, luego halle la solución general de la misma.

(a) $a_n - na_{n-1} = 0, \quad n \geqslant 1$.

(b) $na_n - (n-1)a_{n-1} = 0, \quad n \geqslant 2$.

(c) $a_n/a_{n-1}^p = 2$, $n \geq 1$, siendo $a_0 = 1$ y p positivo diferente de 1.

(d) $a_{n+2} = 4a_{n+1}^2/a_n$, $n \geq 0$, siendo $a_0 = a_1 = 1$

Ejercicio 10. (Primer Parcial 2009)
Si a_n verifica que $a_n - 2a_{n-1} = 3 \times 2^n$, con $a_0 = 1$, entonces:

(a) $a_{50} = 2^{50}$; (b) $a_{50} = 50 \times 2^{50}$; (c) $a_{50} = 150 \times 2^{50}$; (d) $a_{50} = 151 \times 2^{50}$.

Ejercicio 11. (Parcial 2001)
Se considera la siguiente ecuación:

$$a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 2^n, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

Hallar α, β y a_{100} sabiendo que: $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 1$ y $a_3 = 17$.

Vamos a estudiar sucesiones a_n que cumplen que a_n depende de $a_1, \dots, a_{n-1}$

Ejemplo: Sucesión de Fibonacci: 1 1 2 3 5 8 . . .

Vamos a ver
- lineales homogeneas de primer orden
  $a_{n+1} = d a_n$
  1 2 4 8 16 . . . $(a_{n+1} = 2a_n)$
- de segundo orden:
  $C_{n+2} a_{n+2} + C_{n+1} a_{n+1} + C_n a_n = 0$

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$a_n := a(n)$

Ejercicio 1. En cada caso hallar el término a_{100}:

(a) $a_{n+1} - 3a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, con $a_{50} = 2 \cdot 3^{-8}$.

(b) $a_{n+2} + 4a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, con $a_0 = a_1 = 1$ (sugerencia: use el cambio de variable $b_n := a_{2n}$).

(a)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n \\ &= 3(3a_{n-1}) = 3^2 a_{n-1} \\ &= 3^3 a_{n-2} \\ &\vdots \\ &= 3^{n+1} a_0 \end{aligned}$$

a_0 $\quad a_1 = 3a_0$ $\quad a_2 = 3^2 a_0$ . . .

1 3 9 27 81 . . .

Solución gral. de la recurrencia: $a_n = 3^n a_0$.

Ahora queremos una solución tq $a_{50} = 2 \cdot 3^{-8}$

Por una parte $a_{50} = 2 \cdot 3^{-8}$ y por otra parte

$a_{50} = 3^{50} \cdot a_0$

despejamos la de a_0: $a_0 \cdot 3^{50} = 2 \cdot 3^{-8}$

$\Rightarrow a_0 = 2 \cdot 3^{-58}$

$\Rightarrow$ La solución particular es $\boxed{a_n = 2 \cdot 3^{-58} \cdot 3^n.}$

Obs: la sol. gral de $a_{n+1} = d a_n$ es $a_n = d^n a_0$.

$a_{100} = 2 \cdot 3^{-58} \cdot 3^{100} = 2 \cdot 3^{42}$

(b) $a_{n+2} = -4a_n$

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
a_0	a	$-4a_0$	$-4a_1$	$(-4)^2 a_0$	$(-4)^2 a_1$	$(-4)^3 a_0$	...

- a_0 determina a_n n par
- a_1 determina a_n n impar

$b_n = a_{2n} \Rightarrow b_n$ satisface la recurrencia $b_{n+1} = -4b_n$

$b_0 = a_0$ $\quad b_1 = a_2$ $\quad a_2 = -4a_0$ $\quad \ldots \Rightarrow b_n = (-4)^n b_0$

$b_1 = -4 b_0$

$c_n = a_{2n+1} \Rightarrow c_n$ satisface la recurrencia $c_{n+1} = -4c_n$

$c_n = (-4)^n c_0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{2n} = (-4)^n b_0 = (-4)^n a_0 = (-4)^n \\ a_{2n+1} = (-4)^n c_0 = (-4)^n a_1 = (-4)^n \end{cases}$$

$a_{100} = a_{2 \cdot 50} = (-4)^{50}$.

Relaciones de recurrencia de orden 2, homogeneas, con coefs. ctes.

$$A a_{n+2} + B a_{n+1} + C a_n = 0 \qquad \forall n \geq 0$$

A, B, C ctes.

Buscamos sols. del tipo $a_n = K \cdot r^n$

$$A K r^{n+2} + B K r^{n+1} + C K r^n = 0$$

$$\underbrace{K r^n}_{\neq 0} (A r^2 + B r + C) = 0$$

↳ Queremos sols. de $Ar^2 + Br + C = 0 \Rightarrow$ Bhaskara encontramos r_1 y r_2 raíces del polinomio Ar^2+Br+C.

- $\underline{r_1 \neq r_2}$: La sol. gral es $a_n = \alpha \cdot r_1^n + \beta r_2^n$.
- $r_1 = r_2$: La sol. gral es $a_n = \alpha \cdot r_1^n + \beta n r_1^n$

Ejercicio 2. Resolver las relaciones de recurrencia:

(a) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $a_0 = 1, a_1 = 3$.

(b) $b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $b_0 = 5, b_2 = 27$.

(a) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$

Vamos a hallar sols. de la forma $a_n = K \cdot r^n$.

Tenemos que hallar las raíces del polinomio

$$1r^2 - 5r + 6 = 0$$

$r_1 = 2$

$r_2 = 3$

La sol. gral. es $a_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$

Ahora hallemos α y β

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \alpha \cdot 2^0 + \beta \cdot 3^0 = \alpha + \beta = 1 & (\beta = 1 - \alpha) \\ a_1 = \alpha \cdot 2^1 + \beta \cdot 3^1 = 2\alpha + 3\beta = 3 \end{cases}$$

$$2\alpha + \cancel{3} - 3\alpha = \cancel{3}$$

$$\alpha = 0 \qquad \beta = 1$$

SOLUCIÓN: $a_n = 3^n$

(b) $b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n = 0$

Hallamos las raíces del polinomio

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

$\boxed{r_1 = r_2 = 3}$

La solución general es $b_n = \alpha 3^n + \beta n 3^n$

Hay que hallar α y β tales que $b_0 = 5$
$b_2 = 27$

$b_0 = 5 \Rightarrow$
$b_2 = 27 \Rightarrow$
$\begin{cases} \alpha 3^0 + \beta \cdot 0 \cdot 3^0 = 5 \\ \alpha \cdot 3^2 + \beta \cdot 2 \cdot 3^2 = 27 \end{cases}$
$\begin{cases} \alpha = 5 \\ \dots \end{cases}$

hallar

SOLUCIÓN: $a_n = 5 3^n + \beta n 3^n$

Ejercicio 3. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se considera el número: $a_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.

(a) Mostrar que a_n verifica una relación de recurrencia de orden 2, homogénea, a coeficientes constantes.

(b) Probar que a_n es un entero positivo para todo natural n.

a

$a_n = r_1^n + r_2^n$

Queremos ver que $\exists A, B, C \in \mathbb{R}$ tales que
$A a_{n+2} + B a_{n+1} + C a_n = 0$.

a_n tiene la forma de una sol. particular $\Rightarrow$
$r_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ y $r_2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ son las raíces de un polinomio $Ar^2 + Br + C = 0$ y los coefs A, B y C son los que queremos.

polinomio con raíces

$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$ $b=-1$, $a=1$, $c=-1$

$$p(x) = r^2 - r - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$$

(b) Como a_{n+2} depende de a_{n+1} y a_n $\Rightarrow$ lo probamos por Inducción Fuerte.