Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 4: COMBINATORIA III

Principio de Inclusión-Exclusión, funciones sobreyectivas, desórdenes y números de Stirling.

Ejercicio 1.

(a) ¿Cuántos números naturales entre 1 y 105 inclusive no son múltiplos de 3, 5 ni 7?

(b) ¿Cuántos números naturales entre 1 y 1155 inclusive son múltiplos de 3 pero no de 5, 7 ni 11?

Ejercicio 2. Se tira un dado 6 veces. Calcular la cantidad de formas en que podemos obtener un número múltiplo de 18 como suma de las 6 tiradas del dado. Tomar en cuenta el orden de los valores obtenidos en el dado.
Por ejemplo, los resultados en orden $(6, 6, 2, 2, 1, 1)$ y $(6, 2, 6, 2, 1, 1)$ cuentan a favor como casos diferentes.

Ejercicio 3. ¿De cuántas formas pueden extraerse 9 canicas de una bolsa si hay 3 de cada uno de los siguientes colores: blanco, rojo, azul, negro?

Ejercicio 4. ¿Cuántos enteros positivos entre 1 y 9.999.999 inclusive cumplen que la suma de sus dígitos es igual a 31?

Ejercicio 5. Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ con las siguientes restricciones:

(a) $0 \leqslant x_i \leqslant 8$ para todo i.

(b) $0 \leqslant x_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 6$, $3 \leqslant x_3 \leqslant 7$ y $0 \leqslant x_4 \leqslant 8$.

(c) $0 < x_1 \leq 4$, $1 < x_2 < 5$, $3 \leq x_3 \leq 7$ y $0 \leq x_4 \leq 8$.

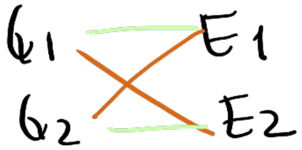
Ejercicio 6. Hallar la cantidad de permutaciones de los dígitos de 123456789 tales que:

(a) Ningún dígito está en su posición original.

(b) Los dígitos pares no están en su posición original.

(c) Los dígitos pares no están en su posición original y los primeros cuatro dígitos son precisamente 1, 2, 3 y 4, en algún orden.

Ejercicio 7. ¿ De cuántas formas se puede factorizar el número $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ como producto de 2 factores positivos mayores que 1? ¿ Y como producto de 3 factores positivos mayores que 1? En ambos casos el orden de los factores no importa.



$G_1 - G_2$

Ejercicio 8. Seis perros y dos gatos tienen cuatro escondites para guarecerse de la lluvia. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse los ocho animales en los cuatro escondites sabiendo que se utilizan todos los escondites y además no pueden haber perros y gatos en el mismo escondite?

Ejercicio 9. Probar las siguientes recurrencias para el número de funciones sobreyectivas y los números de Stiling de segundo tipo, respectivamente.

(a) **Funciones Sobreyectivas:** $Sob(m+1,n) = n(Sob(m,n-1) + Sob(m,n))$.

(b) **Números de Stirling de segundo tipo:** $S(m+1,n) = S(m,n-1) + nS(m,n)$.

Ejercicio 10. Probar las siguientes identidades usando la regla de la suma y del producto:

(a) $n^m = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} Sob(m,i)$.

(b) $Sob(m,n) = \sum_{i=1}^{m-(n-1)} \binom{m}{i} Sob(m-i,n-1)$.

(c) $n! = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$, donde $d_0 = 1$ y d_k es el número de desórdenes de tamaño k.

Aclaraciones:

- En el ejercicio 7 el orden de los factores no importa. Por ejemplo $2310 = 10 \cdot 231$ y $2310 = 231 \cdot 10$ se consideran como la misma factorización. Sugerencia: considere el Teorema Fundamental de la Aritmética: todo entero positivo $n > 1$ se escribe de forma única (a menos del orden de los factores) como producto de números primos.

- En el ejercicio 8, los perros se consideran distinguibles entre sí y también los gatos se consideran distinguibles entre sí. Por el contrario, los escondites se consideran como indistinguibles (o sea, lo único relevante es como los animales se agrupan entre ellos).

Ejercicio 8. Seis perros y dos gatos tienen cuatro escondites para guarecerse de la lluvia. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse los ocho animales en los cuatro escondites sabiendo que se utilizan todos los escondites y además no pueden haber perros y gatos en el mismo escondite?

Lo que nos interesa es contar cómo se agrupan entre ellos. ¿Cómo se pueden agrupar los gatos?

→ • 2 gatos en un escondite

→ • 2 gatos en dos escondites

=> Regla de la suma y del producto.

2 gatos en un escondite y 6 perros en tres escondites
$1 \cdot S(6,3)$

2 gatos en dos escondites y 6 perros en dos escondites
$1 \cdot S(6,2)$

=> hay $S(6,3) + S(6,2)$ formas.

$$S(m,n) = \frac{Sob(m,n)}{n!}$$

Fórmula para $Sob(m,n)$ usando PIE:

$$Sob(m,n) = n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m + \dots$$

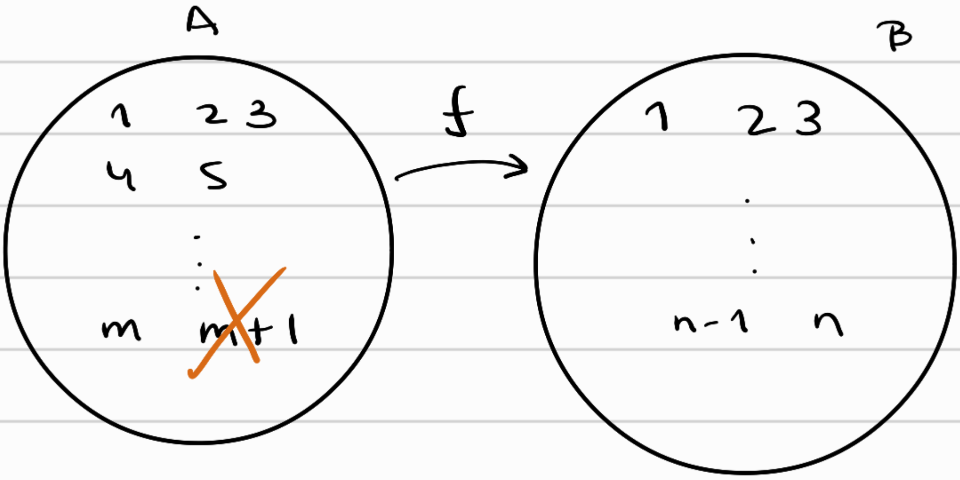
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_k^n (n-k)^m$$

Ejercicio 9. Probar las siguientes recurrencias para el número de funciones sobreyectivas y los números de Stiling de segundo tipo, respectivamente.

(a) **Funciones Sobreyectivas:** $Sob(m+1,n) = n(Sob(m,n-1) + Sob(m,n))$.

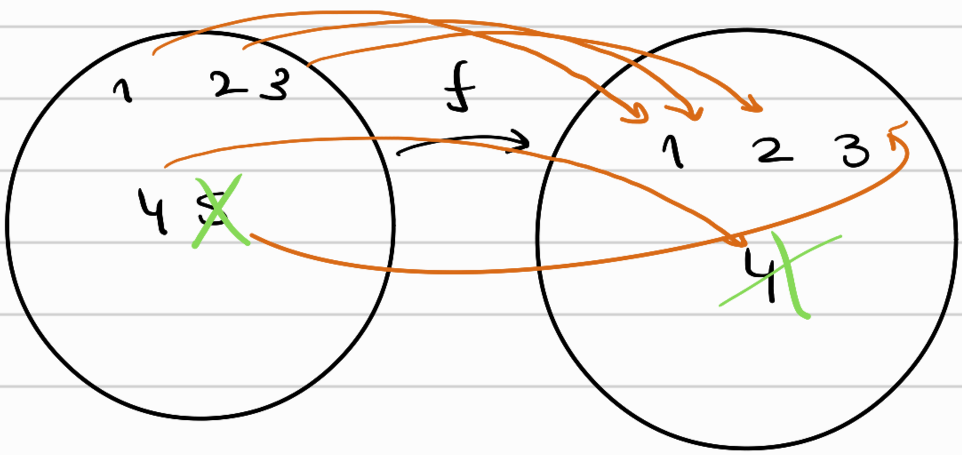
(b) **Números de Stirling de segundo tipo:** $S(m+1,n) = S(m,n-1) + nS(m,n)$.

(a)

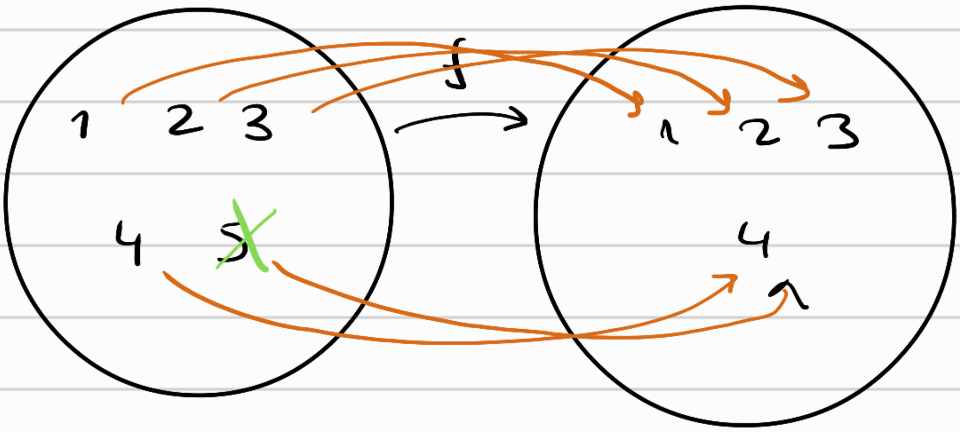


¿Qué pasa si sacamos el elemento m+1 de A?

$f|_{\{1,\dots,m\}} : \{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,n\}$



deja de ser sobre



es sobre

Hay dos opciones

- Sigue siendo sobreyectiva: hay $n \cdot Sob(m,n)$ funciones sobres de este tipo.
  $\uparrow$ opciones para $f(m+1)$

- Deja de ser sobreyectiva: hay $n \cdot Sob(m,n-1)$ funciones de este tipo.
  $\uparrow$ opciones para $f(m+1)$

$$\Rightarrow Sob(m+1,n) = n\left(Sob(m,n) + Sob(m,n-1)\right).$$

(b) $S(m+1,n) = S(m,n-1) + n\,S(m,n)$

$$S(m+1,n) = \frac{Sob(m+1,n)}{n!} = \frac{n\,Sob(m,n)}{n!} + \frac{\cancel{n}\,Sob(m,n-1)}{\cancel{n}(n-1)!}$$

$$= n\,S(m,n) + S(m,n-1)$$

Ejercicio 10. Probar las siguientes identidades usando la regla de la suma y del producto:

(a) $n^m = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} Sob(m,i)$.

(b) $Sob(m,n) = \sum_{i=1}^{m-(n-1)} \binom{m}{i} Sob(m-i, n-1)$.

(c) $n! = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$, donde $d_0 = 1$ y d_k es el número de desórdenes de tamaño k.

(a) n^m es el número de funciones de A en B, donde $|A| = m$ y $|B| = n$.

$A = \{1, \dots, m\}$ $\qquad B = \{1, \dots, n\}$

$1 \to n$ opc

$2 \to n$ opc $\qquad \Rightarrow$ hay n^m funciones de A en B.

$\vdots$

$m \to n$ opc

$f: A \to ImA$ es sobreyectiva $\Rightarrow$ divido en casos según $|ImA|$.

- ImA tiene 1 elemento: $n = C^n_n \cdot Sob(m,1)$
- ImA tiene 2 elementos: $C^n_2 \cdot Sob(m,2)$
- ImA tiene 3 elementos: $C^n_3 \cdot Sob(m,3)$

- ImA tiene n elementos: $C^n_n \cdot Sob(m,n)$

$\Rightarrow$ Regla de la suma: hay $\sum_{i=1}^{n} C^n_i \, Sob(n,i)$ funciones.

(c) $n! = \sum_{k=0}^{n} C^n_k \, d_k$

n! es el número de permutaciones de un conjunto con n elementos.
Una permutación puede:

- No fijar elementos: hay d_n permutación de este tipo.
- Fijar exactamente un elemento: $n \cdot d(n-1)$
- Fija exactamente k elementos: $C^n_k \cdot d(n-k)$

$\Rightarrow$ Regla de la suma: $n! = \sum_{k=0}^{n} C^n_k \, d_{n-k}$