Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 4: COMBINATORIA III

Principio de Inclusión-Exclusión, funciones sobreyectivas, desórdenes y números de Stirling.

Ejercicio 1.

(a) ¿Cuántos números naturales entre 1 y 105 inclusive no son múltiplos de 3, 5 ni 7?

(b) ¿Cuántos números naturales entre 1 y 1155 inclusive son múltiplos de 3 pero no de 5, 7 ni 11?

Ejercicio 2. Se tira un dado 6 veces. Calcular la cantidad de formas en que podemos obtener un número múltiplo de 18 como suma de las 6 tiradas del dado. Tomar en cuenta el orden de los valores obtenidos en el dado.
Por ejemplo, los resultados en orden $(6, 6, 2, 2, 1, 1)$ y $(6, 2, 6, 2, 1, 1)$ cuentan a favor como casos diferentes.

Ejercicio 3. ¿De cuántas formas pueden extraerse 9 canicas de una bolsa si hay 3 de cada uno de los siguientes colores: blanco, rojo, azul, negro?

Ejercicio 4. ¿Cuántos enteros positivos entre 1 y 9.999.999 inclusive cumplen que la suma de sus dígitos es igual a 31?

Ejercicio 5. Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ con las siguientes restricciones:

(a) $0 \leqslant x_i \leqslant 8$ para todo i.

(b) $0 \leqslant x_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 6$, $3 \leqslant x_3 \leqslant 7$ y $0 \leqslant x_4 \leqslant 8$.

(c) $0 < x_1 \leq 4$, $1 < x_2 < 5$, $3 \leq x_3 \leq 7$ y $0 \leq x_4 \leq 8$.

Ejercicio 6. Hallar la cantidad de permutaciones de los dígitos de 123456789 tales que:

(a) Ningún dígito está en su posición original.

(b) Los dígitos pares no están en su posición original.

(c) Los dígitos pares no están en su posición original y los primeros cuatro dígitos son precisamente 1, 2, 3 y 4, en algún orden.

Ejercicio 7. ¿ De cuántas formas se puede factorizar el número $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ como producto de 2 factores positivos mayores que 1? ¿ Y como producto de 3 factores positivos mayores que 1? En ambos casos el orden de los factores no importa.

Ejercicio 8. Seis perros y dos gatos tienen cuatro escondites para guarecerse de la lluvia. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse los ocho animales en los cuatro escondites sabiendo que se utilizan todos los escondites y además no pueden haber perros y gatos en el mismo escondite?

Ejercicio 9. Probar las siguientes recurrencias para el número de funciones sobreyectivas y los números de Stiling de segundo tipo, respectivamente.

(a) **Funciones Sobreyectivas:** $Sob(m+1,n) = n(Sob(m,n-1) + Sob(m,n))$.

(b) **Números de Stirling de segundo tipo:** $S(m+1,n) = S(m,n-1) + nS(m,n)$.

Ejercicio 10. Probar las siguientes identidades usando la regla de la suma y del producto:

(a) $n^m = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} Sob(m,i)$.

(b) $Sob(m,n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m-(n-1)} \binom{m}{i} Sob(m-i,n-1)$.

(c) $n! = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$, donde $d_0 = 1$ y d_k es el número de desórdenes de tamaño k.

Aclaraciones:

- En el ejercicio 7 el orden de los factores no importa. Por ejemplo $2310 = 10 \cdot 231$ y $2310 = 231 \cdot 10$ se consideran como la misma factorización. Sugerencia: considere el Teorema Fundamental de la Aritmética: todo entero positivo $n > 1$ se escribe de forma única (a menos del orden de los factores) como producto de números primos.
- En el ejercicio 8, los perros se consideran distinguibles entre sí y también los gatos se consideran distinguibles entre sí. Por el contrario, los escondites se consideran como indistinguibles (o sea, lo único relevante es como los animales se agrupan entre ellos).

Ejercicio 4. ¿Cuántos enteros positivos entre 1 y 9.999.999 inclusive cumplen que la suma de sus dígitos es igual a 31?

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 31$$

$$0 \leq x_i \leq 9$$

Es observar que no hay problemas con el nº 0000000 pues sus dígitos no suman 31.

Ejercicio 5. Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ con las siguientes restricciones:

(a) $0 \leqslant x_i \leqslant 8$ para todo i.

(b) $0 \leqslant x_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 6$, $3 \leqslant x_3 \leqslant 7$ y $0 \leqslant x_4 \leqslant 8$.

(c) $0 < x_1 \leq 4$, $1 < x_2 < 5$, $3 \leq x_3 \leq 7$ y $0 \leq x_4 \leq 8$.

$1 \leq x_1 \leq 4 \quad 2 \leq x_2 \leq 5$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$$

$0 \leq x_1 \leq 5$, $0 \leq x_2 \leq 6$, $3 \leq x_3 \leq 7$, $0 \leq x_4 \leq 8$

- Hacemos el cambio de variables $\overline{x_3} = x_3 - 3$

$\Rightarrow$ nos queda $x_1 + x_2 + \overline{x_3} + 3 + x_4 = 19$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + \overline{x_3} + x_4 = 16 \\ \text{con } 0 \leq x_1 \leq 5, \; 0 \leq x_2 \leq 6, \; 0 \leq \overline{x_3} \leq 4 \\ 0 \leq x_4 \leq 8 \end{array}}$$

- N = Total de sols naturales de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$

- $c_1: x_1 \geq 6$ • $c_2: x_2 \geq 7$ • $c_3: x_3 \geq 5$ • $c_4: x_4 \geq 9$

Queremos $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}\,\overline{c_4})$

$$= N - \underbrace{N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) - N(c_4)}_{S_1} + \underbrace{N(c_1 c_2) + \ldots}_{S_2} \ldots$$

$N = CR^4_{16}$

$$\left.\begin{array}{l} N(C_1) = CR^4_{10} \\ N(C_2) = CR^4_{9} \\ N(C_3) = CR^4_{11} \\ N(C_4) = CR^4_{7} \end{array}\right\} S_1 = CR^4_{10} + CR^4_{9} + CR^4_{11} + CR^4_{7}$$

$$\left.\begin{array}{l} N(C_1C_2) = CR^4_{3} \\ N(C_1C_3) = CR^4_{5} \\ N(C_2C_3) = CR^4_{4} \\ N(C_1C_4) = CR^4_{1} \\ N(C_2C_4) = CR^4_{0} = 1 \\ N(C_3C_4) = CR^4_{2} \end{array}\right\} S_2 = CR^4_3 + CR^4_5 + CR^4_4 + CR^4_1 + CR^4_0 + CR^4_2$$

Observar que $N(C_iC_jC_k) = 0$ para todo $i,j,k \in \{1,2,3,4\}$
$\Rightarrow S_3 = 0$ y $S_4 = 0$.

Total sols: $N - S_1 + S_2$

Ejercicio 6. Hallar la cantidad de permutaciones de los dígitos de 123456789 tales que:

(a) Ningún dígito está en su posición original.

(b) Los dígitos pares no están en su posición original.

(c) Los dígitos pares no están en su posición original y los primeros cuatro dígitos son precisamente 1, 2, 3 y 4, en algún orden.

(a)

$N =$ Total de permutaciones $= 9!$

C_i: i está fijo por la permutación

$N(C_1) = 8!$ $(N(C_i) = 8 \ \forall i)$

$S_1 = 9 \cdot 8! = 9!$

$N(C_1C_2) = 7!$

$S_2 = C^9_2 \cdot 7! = \frac{9!}{2!\,7!} 7! = \frac{9!}{2!}$

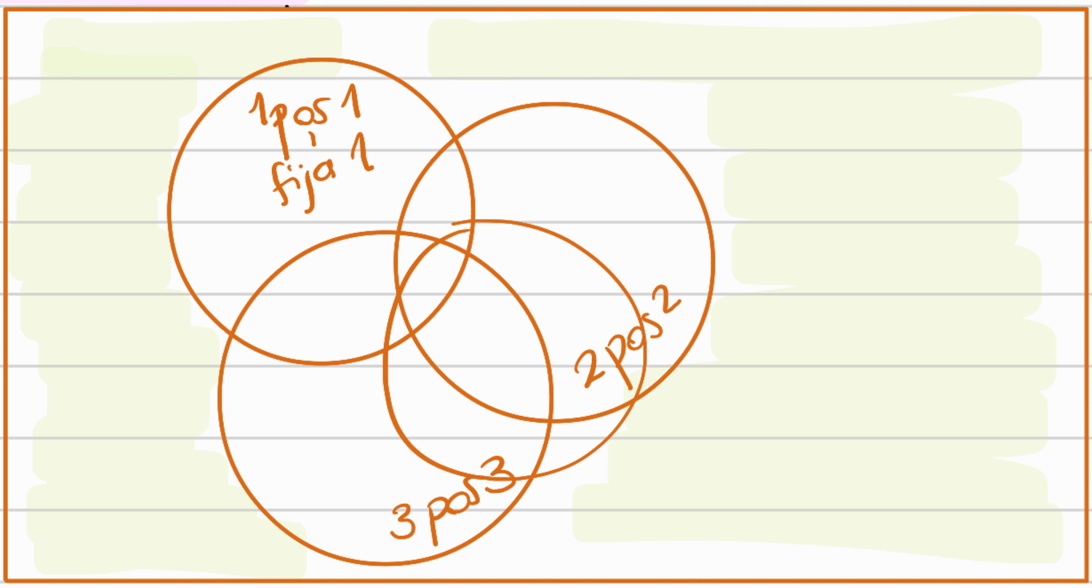
$S_3 = C^9_3 \cdot 6! = \frac{9!}{3!\,6!} 6! = \frac{9!}{3!}$

1	2	3
1	2	3
1	3	2

$$S_i = C^9_i \cdot (n-i)! = \frac{9!}{i!\,(n-i)!}(n-i)! = \frac{9!}{i!}$$

$$d_9 = 9! - 9! + \frac{9!}{2!} - \frac{9!}{3!} + \frac{9!}{4!} - \frac{9!}{5!} + \frac{9!}{6!} - \frac{9!}{7!} + \frac{9!}{8!} - \frac{9!}{9!}$$

$$d_9 = \sum_{i=0}^{9} (-1)^i \frac{9!}{i!} = 9! \sum_{i=0}^{9} \frac{(-1)^i}{i!}$$



(b) N = Total de permutaciones $= 9!$

C_2: fija al 2 $\quad$ C_4: fija al 4 $\quad$ C_6: fija al 6

C_8: fija al 8

Queremos calcular $N(\overline{C_2}\,\overline{C_4}\,\overline{C_6}\,\overline{C_8})$.

$N(C_2) = 8!\ (= N(C_4) = N(C_6) = N(C_8))$

$S_1 = 4 \cdot 8!$

$N(C_iC_j) = 7!$

$S_2 = C^4_2\, 7!$

$S_3 = C^4_3\, 6! = 4 \cdot 6!$

$S_4 = 5!$

Total:

$9! - 4 \cdot 8! + 6\,7! - 4 \cdot 6! + 5!$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & 2 & & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & 6 & & 8 & \end{pmatrix}$

\# Permutaciones de 1 2 3 4 que no fijan al 2 ni al 4 · \# Permutaciones de 5 6 7 8 9 que no fijan al 6 y al 8