Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 3: COMBINATORIA II
PERMUTACIONES, ARREGLOS Y COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Ejercicio 1. ¿Cuántas palabras distintas pueden construirse (con o sin sentido), usando todas las letras de la palabra ASALAS?

$\frac{6!}{2!\cdot 3!}$

Ejercicio 2. (Ej. 1 del examen de diciembre de 2016)

a. ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras de SKYWALKER que empiecen en vocal y no contengan la secuencia RL?

b. ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras de SKYWALKER que empiecen en vocal y no contengan la secuencia RK?

Ejercicio 3. ¿De cuántas maneras diferentes puede un Rey, desplazarse desde la esquina inferior izquierda (a1) hasta la esquina superior derecha (h8) de un tablero de ajedrez, admitiendo únicamente movimientos hacia arriba o hacia la derecha (no se permite movimiento en diagonal)?

Ejercicio 4. Determine cuántas funciones $f : \{1, 2, \dots, 10\} \to \{1, 2, \dots, 4\}$ verifican que todo elemento del codominio $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tiene exactamente i preimágenes.

Ejercicio 5. Dados $A = \{1, 2, \dots, m\}$ y $B = \{1, 2, \dots, n\}$, hallar la cantidad de funciones $f : A \to B$ tales que:

(a) No hay restricciones.
(b) f es inyectiva.
(c) f es biyectiva.
(d) f es monótona creciente estrictamente.
(e) f es monótona creciente.

Ejercicio 6. Exprese los resultados de las siguientes preguntas como una combinación con repetición.

(a) ¿Cuántas fichas diferentes hay en el juego popular del dominó?

(b) ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al arrojar simultáneamente 3 dados idénticos?

Ejercicio 7.

(a) Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$.

(b) ¿Cuántas soluciones hay si se reemplaza el signo $=$ por el signo $<$?
O sea: hallar la cantidad de soluciones naturales de la inecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 < 4$.

(c) Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ tal que se cumplen simultáneamente las siguientes condiciones $x_1 \geq 3$ y $x_4 \geq 3$.

Ejercicio 8.

(a) ¿Cuántas formas hay de sentar 5 personas en 12 sillas puestas en línea?

(b) Ídem pero las personas no deben quedar sentadas en asientos contiguos.

Ejercicio 9. Hallar la cantidad de maneras de distribuir $2r$ pelotitas de las cuales la mitad son rojas y la otra mitad son azules en n cajas diferentes (las pelotitas del mismo color se consideran indistinguibles).

Ejercicio 10. ¿De cuántas formas puede distribuir un maestro 8 bizcochos de chocolate y 7 de crema entre 3 estudiantes, si cada uno desea al menos un bizcocho de cada tipo?

Ejercicio 11.

a. Sean n, t enteros positivos y $n_1, \dots, n_t$ números naturales tales que $n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$. Repasar la demostración (hay al menos dos posibles demostraciones) que el coeficiente de $x_1^{n_1}\ x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t}$ en $(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n$ viene dado por $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_t!}$.

b. (Ej. 3 del 1^{er} parcial del 2001) Determinar el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $\left(x^3 - x^2 + x - 1\right)^6$.

c. (Ej. 1b del 1^{er} parcial 2018 sem. impar) Hallar el coeficiente de x^6 en $(2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + x^5)^5$.

Ejercicio 12.

(a) Hallar el coeficiente en x^5 en el desarrollo de $(x^5 + x - 1)^{10}$.

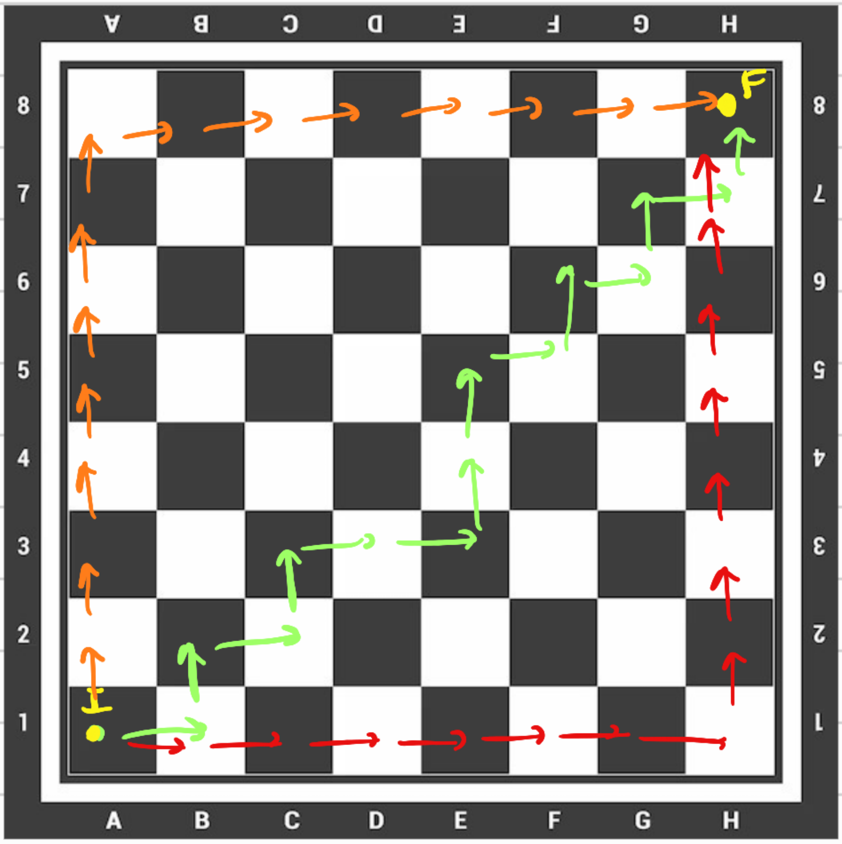
(b) Hallar el coeficiente en xy^3z^5 del polinomio $(2x + 4y + 2z + 5)^{14}$.

Algunas aclaraciones:

a. En el ejercicio 6 debe expresar el resultado como una combinación con repetición.

b. En el ejercicio 8 solo importa la posición relativa de las personas y no que persona está sentada en cada silla (i.e. se consideran las personas indistinguibles).

Ejercicio 3. ¿De cuántas maneras diferentes puede un Rey, desplazarse desde la esquina inferior izquierda (a1) hasta la esquina superior derecha (h8) de un tablero de ajedrez, admitiendo únicamente movimientos hacia arriba o hacia la derecha (no se permite movimiento en diagonal)?



Movimientos Admisibles: A : Arriba

D : Derecha

Obs: Siempre nos tenemos que mover 7 ↑ y 7 →.

Idea: formar palabras con las letras A y D.

Hay 7 letras A y 7 letras D.

Cantidad de palabras : $\boxed{\dfrac{14!}{7!\,7!}}$

Ejemplo:

Un grupo de 10 amigos va a cenar, hay tres opciones para el menú: hamburguesa
pizza
empanadas

¿De cuántas formas se puede realizar el pedido?

Ejemplo de pedido: 3h 3p 4e
10h 0p 0e

R) Combinación con repetición: elegir $r=10$ comidas de un menú de $n=3$, con repetición.

x x x | x x x x | x x x

Podemos modelar el problema como sigue:

- Agregamos 2 separadores
- A la izq. del primero: pedidos de hamb
- A la der. del segundo: pedidos de emp
- En medio: los de pizza.

x x x | x x x x | x x x

3h 4p 3e

|| x x x x x x x x x x

0h 0p 10e

x x x x x | x x | x x x

5h 2p 3e

Queremos todas las palabras ≠ con 10 α y 2 |

$$\frac{12!}{2!\,10!}$$

$C^n_m = C^n_{n-m}$

Combinación con repetición $CR^n_r = C^{n+r-1}_r = C^{n+r-1}_{n-1}$

Ejercicio 9. Hallar la cantidad de maneras de distribuir $2r$ pelotitas de las cuales la mitad son rojas y la otra mitad son azules en n cajas diferentes (las pelotitas del mismo color se consideran indistinguibles).

- r pelotitas rojas
- r pelotitas azules

Si distribuimos pelotitas rojas:
me interesa la cantidad de pelotitas por caja.
hay CR^n_r

Idem para distribuir pelotitas azules: hay CR^n_r

En total hay $CR^n_r \cdot CR^n_r$ distribuciones.

Ejercicio 8.

(a) ¿Cuántas formas hay de sentar 5 personas en 12 sillas puestas en línea? C_5^{12} / A_5^{12}

(b) Ídem pero las personas no deben quedar sentadas en asientos contiguos. CR_5^{12} / $5!\, CR_5^{12}$

a)

¿Distinguimos personas? Supongamos que no (si las distinguimos multiplicamos el resultado por 5!).

Sólo me interesa saber que sillas están ocupadas.

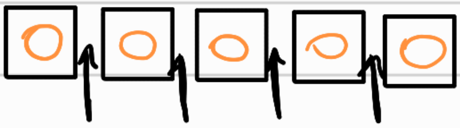
V V V V V V V O O O O O

$$\frac{12!}{5!\,7!}$$

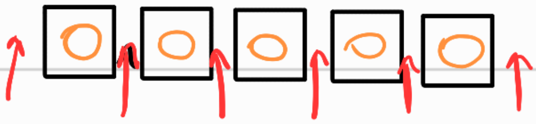
Estamos eligiendo cinco sillas / posiciones, que son las ocupadas: hay C_5^{12}.

b)

Sentamos a las 5 personas en 5 sillas. (nos quedan 7 sillas)



Colocamos una silla entre todo par de personas (nos quedan 3 sillas)



Distribuimos, con repetición, las tres sillas en los seis lugares disponibles: CR_3^6

Ejercicio 4. Determine cuántas funciones $f : \{1, 2, \ldots, 10\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ verifican que todo elemento del codominio $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tiene exactamente i preimágenes.

El 1 tiene una preimagen
El 2 tiene dos preimagenes
El 3 tiene tres preimagenes
El 4 tiene cuatro preimagenes.

Hay 10 opciones para la preimagen del 1
$f(x) = 4$

Luego hay 9 posibles $x \,/\, f(x)=2$, queremos elegir 2 de estos 9: C_2^9

Hay 7 posibles $x \,/\, f(x)=3$, queremos elegir 3: hay C_3^7 formas.

Quedan 4 elementos $x \,/\, f(x)=4$, hay sólo una forma de elegir 4: $C_4^4 = 1$.

Hay: $10 \cdot C_2^9 \cdot C_3^7$ posibles funciones.