Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 2: Combinatoria I

Regla del producto, permutaciones, arreglos y combinaciones sin repetición

Ejercicio 1. Un alfabeto consta de 5 vocales y 22 consonantes. ¿Cuántas palabras de longitud 6 se pueden formar con tal alfabeto que no tengan ni dos consonantes ni dos vocales juntas?

Ejercicio 2. La final de un campeonato de fútbol ha terminado en empate y debe definirse por penales. Para patearlos, la directora técnica debe elegir en orden 5 jugadoras diferentes de un total de 11. ¿De cuántas formas puede hacerlo? Responder la misma pregunta si la capitana del equipo siempre patea el quinto penal.

Ejercicio 3.

a. ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar usando todas las letras de la palabra *ÁRBOL*?

b. ¿ Cuántas palabras de largo 3 se pueden formar usando letras distintas de la palabra *ÁRBOL* ?

c. ¿ Cuántas palabras distintas pueden obtenerse permuntando las letras de la palabra *ALGORITMO*?

Ejercicio 4.

a. ¿De cuántas formas se puede colorear una bandera de cuatro franjas horizontales con cinco colores de forma que franjas contiguas no tengan el mismo color?

b. Idem a la parte **a**. con la restricción de que el color de la primera y última franja sean distintos.

Ejercicio 5. ¿Cuántos números naturales pares $n < 1000$ con todos sus dígitos distintos existen?

Ejercicio 6. Un comité de 12 personas debe elegir de entre sus miembros un presidente, un secretario, y un tesorero. ¿De cuántas formas puede hacerse esto?

P S T => 12·11·10
12 11 10

Ejercicio 7. Un comité de 10 personas será elegido entre 8 hombres y 8 mujeres. De cuántas formas se puede hacer una selección si

a. No hay restricciones.

b. Debe haber 5 hombres y 5 mujeres.

c. Deben haber más mujeres que hombres.

d. Deben haber al menos 7 hombres.

Ejercicio 8. En una playa se juntan 13 chicos y deciden hacer 4 equipos para jugar al voleibol, para ello hacer tres equipos de 3 jugadores y uno de 4. Entre los chicos se encuentra uno sumamente habilidoso y otro que es muy, pero muy poco habilidoso (antes se le decía "es un chambonazo"). Los restantes 11 jugadores son de nivel medio en este deporte. Para equiparar, al habilidoso lo colocan en uno de los equipos de 3 jugadores y al poco habilidoso en el equipo de 4 jugadores.
¿De cuántas formas se pueden armar los equipos?

Ejercicio 9. En una prueba que consta de 10 preguntas un estudiante decide responder sólo 6, y quiere que al menos 3 de ellas estén entre las 5 primeras. ¿De cuántas formas distintas podría hacerlo?

Ejercicio 10. Para una selección de fútbol, fueron convocados 2 goleros, 6 zagueros, 7 mediocampistas y 4 atacantes. ¿De cuántos modos es posible formar una selección con un golero, 4 zagueros, 4 mediocampistas y 2 atacantes?

Ejercicio 11. ¿De cuántas formas puede un jugador extraer 5 cartas de una baraja común (de 48 cartas) y obtener:

a. cinco cartas del mismo palo, $4 \cdot C^{12}_5$

b. cuatro ases, $1 \cdot 44 = C^4_4 \cdot C^{44}_1$

c. cuatro cartas del mismo valor, $12 \cdot 1 \cdot 44$

d. tres ases y dos sotas, $C^4_3 \cdot C^4_2$

e. tres ases y un par? $\underbrace{C^4_3}_{\text{tres ases}} \cdot 11 \cdot C^4_2$ → 2 cartas de ese valor; ↳ un valor ≠ ases.

Ejercicio 12. Prox.

a. Hallar la cantidad de subconjuntos de un conjunto con n elementos razonando con la fórmula del binomio.

b. Probar que: $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_j^n = 0$.

c. (Ej. 4 del 1^{er} parcial del 2000) Hallar el valor de la siguiente suma: $\sum_{k=0}^{203} C_k^{203} (-4)^k$.

Ejercicio 13. Considerar la suma: $\sum_{i=0}^{i=n} C_m^i$.

a. Calcular la suma para algunos casos, usando el triángulo de Pascal.
Aclaración: si $i < m$ asumimos $C_m^i = 0$.

b. Conjeture cuánto suma en general y demuéstrelo por Inducción Completa.

Ejercicio 14. Usando que $(1 + x)^n (1 + x)^n = (1 + x)^{2n}$, probar que:

$$\sum_{i=0}^{i=n} (C_i^n)^2 = C_n^{2n}.$$

Algunas aclaraciones:

a. En el ejercicio 4 hay una primera franja, una segunda franja, tercera franja y cuarta franja (de arriba hacia abajo, por ejemplo). En el conteo importa de que color está pintada cada franja.

b. En el ejercicio 7 las personas son distinguidas.

c. En el ejercicio 11, cada una de las 48 cartas tiene asociado un valor (número del 1 al 12) y un palo (oro, basto, espada o copa). A las cartas con valor 1 se las llaman ases y a las cartas con valor 10 se las llaman sotas. Un par consiste en dos cartas con el mismo valor.

Fórmula del Binomio (Newton)

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n a^i b^{n-i}$$

Ejercicio 12. Prox.

tres ases ^{3} un valor ≠ ases. ^{2}

a. Hallar la cantidad de subconjuntos de un conjunto con n elementos razonando con la fórmula del binomio.

b. Probar que: $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_j^n = 0$.

c. (Ej. 4 del 1er parcial del 2000) Hallar el valor de la siguiente suma: $\sum_{k=0}^{203} C_k^{203} (-4)^k$.

a) Cantidad de subconjuntos de 0 elem: $C_0^n = 1$

Cantidad de subconjuntos de 1 elem: $C_1^n = n$

Cantidad de subconjuntos de 2 elem: C_2^n

$\vdots$

Cantidad de subconjuntos de i elem: C_i^n

En total, por la regla de la suma

$$\text{Cantidad de subconjuntos} = \sum_{i=0}^{n} C_i^n$$

Si en la Fórmula del Binomio ponemos $a=b=1$

$$\Rightarrow (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n$$

$\Rightarrow$ la # de subconjuntos es 2^n.

b)

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_j^n = \sum_{j=0}^{n} C_j^n (-1)^j 1^{n-j} \quad \leftarrow \text{F. Binomio.}$$

$$= ((-1)+1)^n$$

$$= 0^n = 0$$

c)

$$\sum_{k=0}^{203} C_k^{203} (-4)^k = \sum_{k=0}^{203} C_k^{203} (-4)^k (1)^{n-k} \quad \leftarrow \text{F. Binomio}$$

$$= (-4+1)^{203} = (-3)^{203} = (-1)\, 3^{203}$$

Ejercicio 13. Considerar la suma: $\sum_{i=0}^{i=n} C_m^i$.

a. Calcular la suma para algunos casos, usando el triángulo de Pascal. Aclaración: si $i < m$ asumimos $C_m^i = 0$.

b. Conjeture cuánto suma en general y demuéstrelo por Inducción Completa.

Triangulo de Pascal

F0: 1 (6)

F1: 1 1 (10)

F2: 1 2 1 (4)

F3: 1 3 3 1 (15)

F4: 1 4 6 4 1

F5: 1 5 10 10 5 1

F6: 1 6 15 20 15 6 1

$$C_0^0$$

$$C_0^1 \quad C_1^1$$

$$C_0^2 \quad C_1^2 \quad C_2^2$$

$$\vdots$$

← (Teórico/Fórmula de Stiefel)

$m=2 \quad n=3$

$$\sum_{i=0}^{3} C_2^i = \underbrace{\cancel{C_2^0}}_{0} + \underbrace{\cancel{C_2^1}}_{0} + C_2^2 + C_2^3 = 1 + 3 = 4$$

$m=5 \quad n=3$

$$\sum_{i=0}^{3} C_5^i = C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 = 0$$

$m=3 \quad n=5$

$$\sum_{i=0}^{5} C_3^i = \cancel{C_3^0} + \cancel{C_3^1} + \cancel{C_3^2} + C_3^3 + C_3^4 + C_3^5$$
$$0 \qquad 0 \qquad 0$$
$$= 0 + 0 + 0 + 1 + 4 + 10 = 15$$

$m=1 \quad n=4$

$$\sum_{i=0}^{4} C_1^i = \cancel{C_1^0} + C_1^1 + C_1^2 + C_1^3 + C_1^4$$
$$= 0 + 1 + 2 + 3 + 4$$

$m=0 \quad n=5$

$$\sum_{i=0}^{5} C_0^i = C_0^0 + C_0^1 + C_0^2 + C_0^3 + C_0^4 + C_0^5$$
$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$= 6$$

<u>Conjetura:</u>

"La suma desde la fila 0 hasta la fila n de la m-ésima entrada de la fila en el Δ de Pascal de la entrada de abajo a la derecha"

$$\sum_{i=0}^{n} C_m^i = C_{m+1}^{n+1}$$

(m está fijo)

<u>Prueba:</u> (inducción en n)

Paso base $n=0$: • $\sum_{i=0}^{0} C_m^i = C_m^0$ $\begin{cases} m=0 \text{ da } 1 \\ m\neq 0 \text{ da } 0 \end{cases}$

• C_{m+1}^1 $\begin{cases} m+1>1 \text{ da } 0 \\ m\neq 0 \text{ da } 0 \\ m=0 \text{ da } 1 \end{cases}$

$C_i^n = 0$ si $n<i$

Paso Inductivo:

H.I. $\sum_{i=0}^{k} C_m^i = C_{m+1}^{k+1}$

$\Downarrow$

T.I. $\sum_{i=0}^{k+1} C_m^i = C_{m+1}^{k+2}$

dem: $\sum_{i=0}^{k+1} C_m^i = \sum_{i=0}^{k} C_m^i + C_m^{k+1}$

$\overset{H.I.}{=} C_{m+1}^{k+1} + C_m^{k+1}$

$= C_{m+1}^{k+2}$ ∎

$\boxed{\text{Fórmula de Stiefel: } \quad C_n^m + C_{n+1}^m = C_{n+1}^{m+1}}$

$$C_m^{k+1} + C_{m+1}^{k+1} = C_{m+1}^{k+2}$$

Ejercicio 14. Usando que $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$, probar que:

$$\sum_{i=0}^{i=n}(C_i^n)^2 = C_n^{2n}.$$

Idea:

F. Binomio $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n a^i b^{n-i}$

- $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n \cdot x^{n-i}$
  $\quad \shortparallel$
  $(x+1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n x^i$

- $(1+x)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} C_i^{2n} x^i$

- C_n^{2n} es el coeficiente de x^n en el polinomio $(1+x)^{2n}$
  Entonces como $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ el coeficiente de x^n en el polinomio $(1+x)^n(1+x)^n$ es C_n^{2n}.

- Si vemos que el coef. n-ésimo de $(1+x)^n(1+x)^n$ da $\sum_{i=0}^{n}(C_i^n)^2$
  entonces queda probada la igualdad