Práctica 1 - clase 2

P.I.C: Sea P una ppd. sobre $\mathbb{N}$ tal que

1) Paso Base: $P(n_0)$ es verdadera
$(n=n_0)$

2) Paso inductivo: Si $\underbrace{P(k) \text{ es verdadero}}_{H.I.} \Rightarrow \underbrace{P(k+1) \text{ es verdadero}}_{T.I.}$ $\forall k \geq n_0$

Entonces P se cumple $\forall n \geq n_0$

Ejercicio 2. Probar que para todo natural n se cumple:

$$P(n): \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1) Paso Base: $(n=0)$ $\sum_{i=0}^{0} i^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6}$ ✓

2) Paso Inductivo: H.I.: $(n=k)$ $\sum_{i=0}^{k} i^2 = 0^2 + 1^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

⇓

T.I.: $(n=k+1)$ $\sum_{i=0}^{k+1} i^2 = 0^2 + 1^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2\overbrace{(k+1)+1}^{2k^2+7k+6})}{6}$

dem: $\sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \underbrace{0^2 + 1^2 + \ldots + k^2}_{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}} + (k+1)^2$ (Separamos la suma)

$\stackrel{H.I.}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6}$ (H.I. + denominador común)

$= \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6}$ (Factor común $(k+1)$)

$= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6}$ (Desarrollar)

$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$ ✓

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{(k+1)(2(k+1)+1)(k+2)}{6} \\ = \\ \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6} \\ \frac{(k+1)(2k^2+3k+4k+6)}{6} \end{array}}$$

Ejercicio 7. Probar que $7^{2024} - 1$ es múltiplo de 6.

Si probamos que $7^n - 1$ es múltiplo de 6 $\forall n \geq 0 \Rightarrow$ en particular si ponemos $n=2024$ es múltiplo de 6.

$P(n)$: $7^n - 1$ es múltiplo de 6 $\forall n \in \mathbb{N}$.

Paso Base: $7^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 6 \cdot 0$ ✓
(n=0)

Paso Inductivo: $\underbrace{7^k - 1 \text{ es múltiplo de } 6}_{H.I.} \Rightarrow \underbrace{7^{k+1} - 1 \text{ es múltiplo de } 6}_{T.I.}$

dem:

$$7^{k+1} - 1 = 7 \cdot 7^k - 1$$
$$= (6+1)7^k - 1$$
$$= \underbrace{6 \cdot 7^k}_{\dot{6}} + \underbrace{7^k - 1}_{\dot{6} \text{ por } H.I.}$$

suma de múltiplos de 6 es múltiplo de 6 ✓

$(\exists m \,/\, 7^k - 1 = 6m)$

Inducción Fuerte: Sea P una propiedad sobre $\mathbb{N}$ tal que

P.B) P es cierta para $n=0$.

P.I) Si $P(m)$ es cierta para $m \leq k \Rightarrow P(m)$ es cierta para $k+1$

Entonces la ppd. P la cumple todo $n \in \mathbb{N}$.

$a_n = 2a_{n-1} + 7a_{n-2} + a_{n-3} \quad \forall n \geq 4$

Ejercicio 10. Probar que si $a_1 = 3, a_2 = 10, a_3 = 30$ y $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n \, \forall n \geq 1$ entonces $a_n \geq 3^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

define $a_4, a_5, a_6, \ldots$

$P(n)$: $a_n \geq 3^n \quad \forall n \geq 1$

Paso Base: $a_1 = 3 \geq 3^1$ ✓
(n=1)

Paso Inductivo: H.I.: $a_m \geq 3^m \quad \forall m \leq k$

$\Downarrow$

T.I.: $a_{k+1} \geq 3^{k+1}$

$\boxed{\begin{array}{l} a_1 = 3 ✓ \quad a_2 = 10 ✓ \quad a_3 = 30 ✓ \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ a_4 = 2 \cdot a_3 + 7 \cdot a_2 + a_1 \\ \quad\;\; 2 \cdot 3^3 + 7 \cdot 3^2 + 3^1 \\ \text{no lo puedo asumir con I.C. pero si con I. Fuerte.} \end{array}}$

dem: a_1 ✓ a_2, a_3 cumplen la ppd. $(a_2 > 9, a_3 > 27)$

Si $k > 3$

$$a_{k+1} = 2\underbrace{a_k}_{\geq 3^k} + 7\underbrace{a_{k-1}}_{\geq 3^{k-1}} + \underbrace{a_{k-2}}_{\geq 3^{k-2}}$$

$$\geq 2 \cdot 3^k + 7 \cdot 3^{k-1} + 1 \cdot 3^{k-2}$$
$$= 2 \cdot 3^2 \cdot 3^{k-2} + 7 \cdot 3 \cdot 3^{k-2} + 1 \cdot 3^{k-2}$$
$$= 3^{k-2}(1 + 7 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2)$$
$$= 3^{k-2}(40)$$
$$\geq 3^{k-2} \cdot 3^3 \quad ✓$$

$$\left(3^{k+1} = 3^{k-2} \cdot 3^3 = 3^{k-2} \cdot 27\right)$$