cchiesa@fing.edu.uy
cchiesa011011o1@gmail.com

Universidad de la República | **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística | **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 1: INDUCCIÓN COMPLETA

Ejercicio 1. Probar de al menos dos formas distintas que para todo natural n se cumple:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ejercicio 2. Probar que para todo natural n se cumple:

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ejercicio 3. Probar que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ existen exactamente 2^n listas binarias de largo n.

Ejercicio 4. Probar que $n^2 \geq n+1$ para todo $n \geq 10$.

Ejercicio 5. Probar que $2^n \geq n^2$ a partir de cierto natural n_0 que se debe encontrar.

Ejercicio 6. Probar que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 para todo natural n.

Ejercicio 7. Probar que $7^{2024} - 1$ es múltiplo de 6.

Ejercicio 8. Demostrar que, a partir de un segmento de longitud 1 en el plano, es posible construir con regla y compás un segmento de longitud $\sqrt{n}$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Ejercicio 9. Sea n un número natural tal que $n \geq 1$. Consideremos un tablero cuadrado compuesto por $2^n \times 2^n$ cuadraditos al cual le falta un cuadradito en algún lugar. Demostrar que es posible cubrir dicho tablero con piezas en forma de L formadas por 3 cuadraditos.

Ejercicio 10. Probar que si $a_1 = 3, a_2 = 10, a_3 = 30$ y $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n \, \forall n \geq 1$ entonces $a_n \geq 3^n, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Ejercicio 11. Probar que todo número natural $n > 1$ puede expresarse como producto de números primos.

Principio de Inducción Completa:

Queremos probar que una ppd. se cumple $\forall n \geq n_0$.

$$n_0 \rightarrow n_0+1 \rightarrow n_0+2 \rightarrow \dots \quad \mathbb{N}$$

P.I.C: Sea P una ppd. sobre $\mathbb{N}$ tal que

1) Paso Base: n_0 cumple la ppd P ($P(n_0)$ es verdadera)
$(n=n_0)$

2) Paso Inductivo:
si $\underbrace{P(k) \text{ es verdadera}}_{H.I.} \Rightarrow \underbrace{P(k+1) \text{ es verdadera}}_{T.I.}$ $k \geq n_0$

Entonces la ppd. P se satisface $\forall n \geq n_0$.

Ejercicio 4

$$n^2 \geq n+1$$

1) P.B. $(n=10)$ $\quad 10^2 \geq 10+1$

$100 \geq 11$ ✓

2) Paso Inductivo:

H.I. $\quad k^2 \geq k+1 \quad$ $(k \geq 10)$

T.I. $\quad (k+1)^2 \geq k+2$

Prueba de H.I. $\Rightarrow$ T.I. :

$k \geq 0$

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \underset{H.I.}{\geq} \underbrace{k+1 + 2k+1}_{k+2+2k} \geq k+2 \checkmark$$

Paréntesis/ cuentas

$$\boxed{\begin{array}{l} k+2+2k \geq k+2 \\ k=3 \\ 3+2+2\cdot 3 \geq 3+2 \checkmark \end{array}}$$

$a \geq b$

$a+c \geq b+c$

Entonces $(k+1)^2 \geq k+2$.

$$(k+1)^2 = (k+1)(k+1) = k^2 + k + k + 1$$
$$= k^2 + \underline{2k+1}$$

Entonces como P cumple 1) Paso Base
2) P. Inductivo

por el P.I.C. P(n) se cumple $\forall n \geq 10$.

Ej3: Probar que existen 2^n listas binarias de largo n $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

(0, 1, 1, 0, 1)

Paso Base: Hay dos listas de largo 1
(n=1)
(0) y (1)

=> se cumple el paso base:
hay 2^1 listas de largo 1

Paso Inductivo:

H.I.: Hay 2^k listas binarias de largo k, $k \geq 1$

$\Downarrow$

T.I.: Hay 2^{k+1} listas binarias de largo k+1. $k \geq 1$

Prueba de H.I. => T.I.:

$$\underbrace{\_\_ \ \_\_ \ \_\_ \ \_\_ \ \ldots \ \_\_}_{\text{largo } n} \ \_\_ \ (0 \text{ ó } 1)$$

Hay dos opciones

$\underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{\text{largo } k}$ 0

$\underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{\text{largo } k}$ 1

Sea $l = (a_1, a_2, \ldots, a_{k+1})$ una lista de largo $k+1$.

$\Rightarrow$ l es de la forma:

lista largo k + 0 — 2^k listas
concatenada

lista de largo $k+1$ — 2^k listas

En total hay $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ listas.

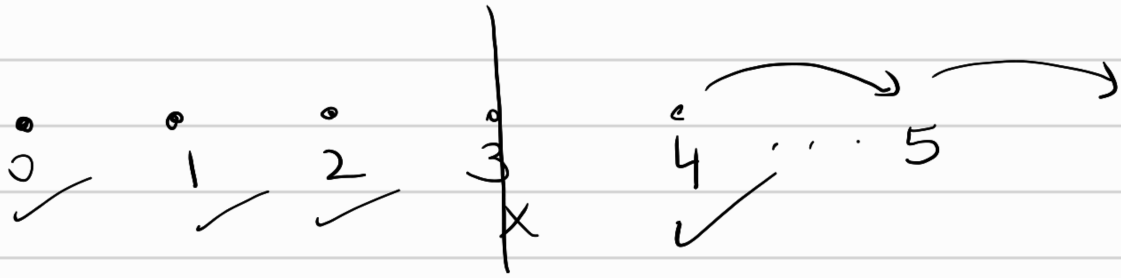
Separamos la lista en una de largo k y una de largo 1

$$\underbrace{0\,1\,0\,1\,0\,1 \ldots 1}_{H.I.\ 2^k}\ \underbrace{1}_{2}$$

En total hay $2 \cdot 2^k$ listas.

Probar que $2^n \geq n^2$ para cierto n_0, que tenemos que hallar.

$n=0$: $2^0 \geq 0^2$ ✓
$n=1$: $2^1 \geq 1^2$ ✓
$n=2$: $2^2 \geq 2^2$ ✓
$n=3$: $2^3 \geq 3^2$ X $\quad (8 \geq 9 \;\times)$
$n=4$: $2^4 \geq 4^2$ ✓



Paso Base: $2^4 \geq 4^2$ ✓
$(n=4)$

Paso Inductivo

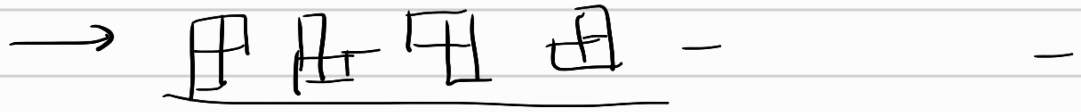
H.I. $2^k \geq k^2 \quad \forall k \geq 4$
T.I. $2^{k+1} \geq (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$

dem de H.I $\Rightarrow$ T.I:

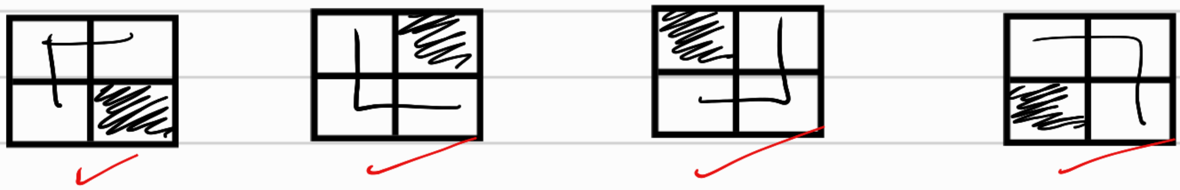
$$
\begin{aligned}
2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \rightarrow \text{H.I.} \\
&\geq 2 \cdot k^2 \\
&= k^2 + k^2 \\
&\geq k^2 + 4k \longrightarrow \quad k \geq 4 \Rightarrow k \cdot k \geq 4 \cdot k \\
&= k^2 + 2k + 2k \\
&\geq k^2 + 2k + 1
\end{aligned}
$$

∎

Ej 9

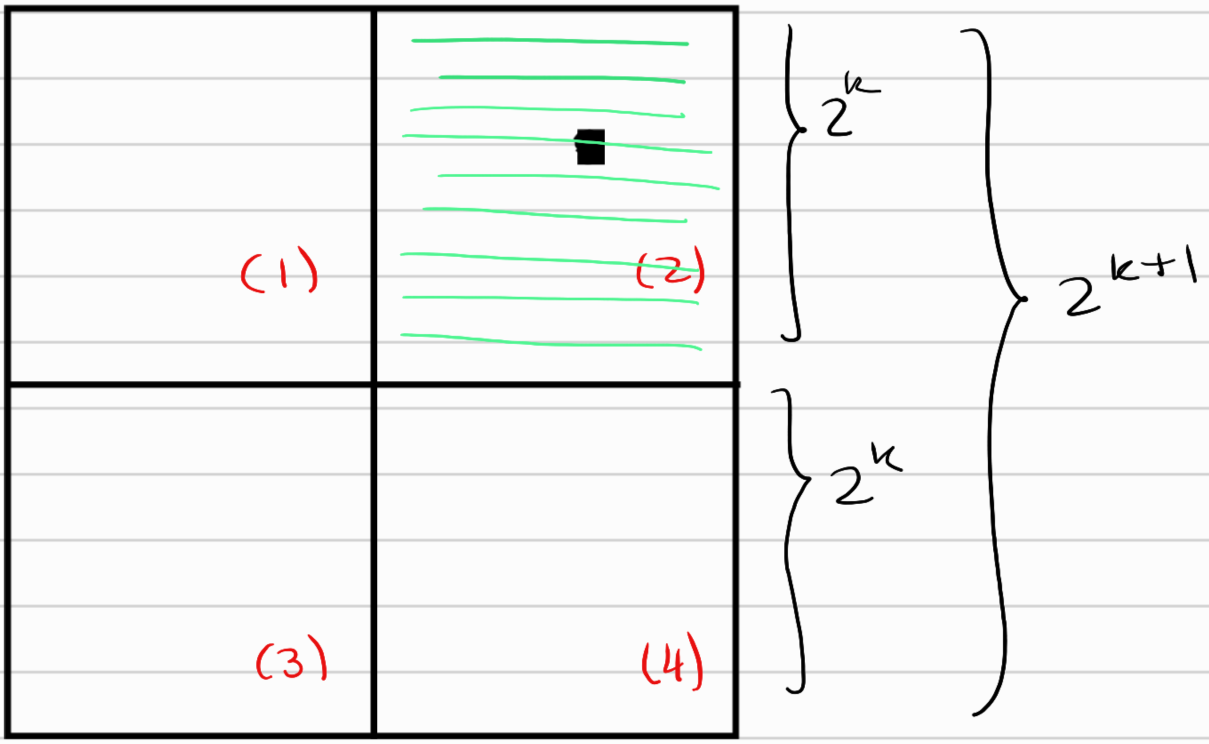


P.B:



Paso Inductivo: H.I.: Puedo cubrir un tablero de largo 2^k...

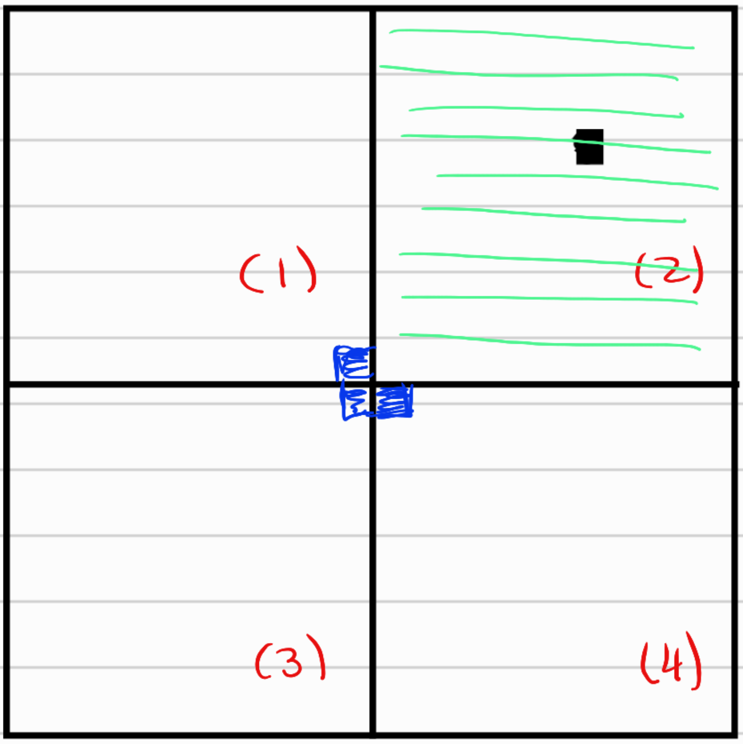
T.I.: Puedo cubrir un tablero de largo 2^{k+1}...



Puedo cubrir (2) con L por Hipótesis Inductiva. Pero no puedo cubrir (1) (2) y (3) pues no les faltan ■.

Si le sacamos un ■ a cada uno de los tres "subtableros" que faltan $\Rightarrow$ podemos usar H.I.

dem:



Suponemos s.p.g. que el cuadradito faltante está en (2) (subtablero sup-der)

- Por H.I. podemos cubrir (2).

También por H.I. podemos cubrir

- (1) sin el ▢ inf-der
- (3) sin el ▢ sup-der
- (4) sin el ▢ sup-izq

Finalmente cubrimos lo restante con una L.