

cchiesa01101101@gmail.com  
cchiesa@fing.edu.uy

Principio de Inducción Completa

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$P$ : propiedad sobre  $\mathbb{N}$ .

Ej:  $P$ : ser par

$P(0)$  es verdadera

$P(1)$  es falso

$P(2)$  es verdadera

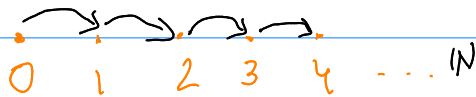
Ej:  $P$ : ser un cuadrado perfecto

P.I.C.: Sea  $P$  una p.p.d. sobre  $\mathbb{N}$  tal que

(1) Paso Base:  $P(n_0)$  es verdadero para  $n_0 \in \mathbb{N}$

(2) Paso Inductivo:  $P(k)$  es verdadero  $\Rightarrow$   $P(k+1)$  es verdadero  $\forall k \geq n_0$   
 $(n=k)$  H.I.  $(n=k+1)$  T.I.

Entonces todo natural  $n \geq n_0$  cumple la p.p.d.  $P$ .



**Ejercicio 1.** Probar de al menos dos formas distintas que para todo natural  $n$  se cumple:

$$P(n) : \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^n i = 0 + 1 + 2 + \dots + n$$

Paso base:  $\sum_{i=0}^0 i = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$  ✓

Paso Inductivo: Hipotesis Inductiva:  $\sum_{i=0}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$

Tesis Inductiva:  $\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Prueba de H.I.  $\Rightarrow$  T.I.:  $\sum_{i=0}^{k+1} i = \underbrace{0+1+\dots+k}_{\text{H.I.}} + k+1$

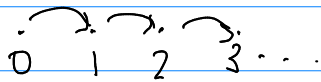
$\sum_{i=0}^k i = 0+1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$   
 $\sum_{i=0}^{k+1} i = (0+1+2+\dots+k) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k+1$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Tenemos Paso Base + Paso Inductivo  $\Rightarrow$  por el P.I.C. la propiedad se cumple  $\forall n \geq 0$ .



### Forma (Método de Gauss)

$$\sum_{i=0}^{100} i = 0+1+2+\dots+98+99+100$$

+ 101 sumandos

$$\sum_{i=0}^{100} i = 100+99+98+\dots+2+1+0$$

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{100} i = (0+100) + (1+99) + (2+98) + \dots + (99+1) + (100+0) = 101(100)$$

$$\sum_{i=0}^{100} i = \frac{101(100)}{2}$$

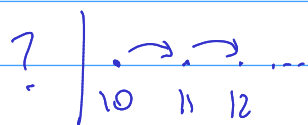
$$\sum_{i=0}^n i = 0+1+2+\dots+n-2 \quad n-1 \quad n$$

+

$$\sum_{i=0}^n i = n+n-1+n-2+\dots+2+1+0$$

$$2 \cdot \sum_{i=0}^n i = \underbrace{n+n+n+\dots+n}_{n+1 \text{ términos}} = n(n+1) \Rightarrow \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Ejercicio 4.** Probar que  $n^2 \geq n + 1$  para todo  $n \geq 10$ .



Paso Base:  $10^2 \geq 10 + 1$   
( $n=10$ )  $100 \geq 11$

Paso Inductivo: H.I.:  $k^2 \geq k+1$  ( $k \geq 10$ )  
T.I.:  $(k+1)^2 \geq k+2$

Prueba de la Tesis Inductiva asumiendo la H.I.:

$$\begin{aligned} (k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\ &\stackrel{\text{H.I.}}{\geq} k+1 + 2k + 1 \\ &= k+2 + 2k \quad k \geq 0 \\ &\geq k+2. \end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{l} a = b \\ b \geq c \\ c = d \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} a \geq d \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$  Por el P.I.C. la p.p.d. se cumple para  $n \geq 10$ .

$n=9: 9^2 \geq 9+1 \checkmark$

$n=8: 8^2 \geq 8+1 \checkmark$

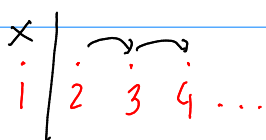
⋮

$n=2: 2^2 \geq 2+1 \checkmark$

$n=1: 1^2 \geq 1+1 \times$

Si ponemos  $n_0=2$  (paso base  $n=2$ ) entonces el P.B. se cumple. Además en el paso inductivo sólo vemos  $k \geq 0 \Rightarrow$  una prueba analoga muestra que la p.p.d. vale a partir de  $n=2$ .

Si ponemos paso base  $n=1 \Rightarrow$  no se cumple  $\times$  y por lo tanto no se deduce la p.p.d.



**Ejercicio 6.** Probar que  $7^n - 2^n$  es múltiplo de 5 para todo natural  $n$ .

$$\begin{aligned} \exists m \text{ tal que} \\ n = 5 \cdot m \\ 0 = 5 \cdot 0 \end{aligned}$$

Paso Base:  $7^0 - 2^0 = 0 \checkmark$   
( $n=0$ )

Paso inductivo: H.I. :  $7^k - 2^k$  es múltiplo de 5 //  $7^k - 2^k = 5m$   
T.I. :  $7^{k+1} - 2^{k+1}$  " " " "

Prueba de H.I.  $\Rightarrow$  T.I.:

$$\begin{aligned} 7^{k+1} - 2^{k+1} &= 7 \cdot 7^k - 2 \cdot 2^k \\ &= (5+2)7^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 5 \cdot 7^k + 2 \cdot 7^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 5 \cdot 7^k + 2 \underbrace{(7^k - 2^k)}_{\substack{5 \\ \text{por H.I.}}} \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} &= 5 \cdot 7^k + 25m \\ &= 5(7^k + 2m) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 7^{k+1} - 2^{k+1} &\text{ es múltiplo de } 5. \\ 7^{k+1} - 2^{k+1} &= 5 \cdot (7^k + 2m) \end{aligned}$$