cchiesa0110101@gmail.com
cchiesa@fing.edu.uy

Principio de Inducción Completa

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

P: propiedad sobre $\mathbb{N}$.

Ej: P: ser par

$P(0)$ es verdadera
$P(1)$ es falso
$P(2)$ es verdadera

Ej: P: ser un cuadrado perfecto

P.I.C: Sea P una ppd. sobre $\mathbb{N}$ tal que

(1) Paso Base: $P(n_0)$ es verdadero para $n_0 \in \mathbb{N}$
$(n = n_0)$

(2) Paso Inductivo: $\underbrace{P(k) \text{ es verdadero}}_{\text{H.I.}} \Rightarrow \underbrace{P(k+1) \text{ es verdadero}}_{\text{T.I.}}$ $\forall k \geq n_0$
$(n = k)$ $\quad (n = k+1)$

Entonces todo natural $n \geq n_0$ cumple la ppd. P.

$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \quad \ldots \quad \mathbb{N}$

Ejercicio 1. Probar de al menos dos formas distintas que para todo natural n se cumple:

$$P(n): \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\sum_{i=0}^{n} i = 0 + 1 + 2 + \ldots + n.$$

Paso base: $\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$ ✓
$(n=0)$

Paso Inductivo: Hipótesis Inductiva: $\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$

Tesis Inductiva: $\sum_{i=0}^{k+1} i = \boxed{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$

$$\sum_{i=0}^{k} i = 0+1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{k+1} i = (0+1+2+\dots+k)+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k+1$$

Prueba de H.I. $\Rightarrow$ T.I.: $\displaystyle\sum_{i=0}^{k+1} i = \underbrace{0+1+\dots+k}_{H.I.}+k+1$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Tenemos Paso Base + Paso Inductivo $\Rightarrow$ por el P.I.C. la propiedad se cumple $\forall n \geq 0$.

0 1 2 3 ...

Forma (Método de Gauss)

$$\sum_{i=0}^{100} i = 0+1+2+\dots+98+99+100$$

+ 101 sumandos

$$\sum_{i=0}^{100} i = 100+99+98+\dots+2+1+0$$

$$2\cdot\sum_{i=0}^{100} i = (0+100)+(1+99)+(2+98)+\dots+(99+1)+(100+0)$$

$$= 101\cdot(100)$$

$$\sum_{i=0}^{100} i = \frac{101(100)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i = 0+1+2+\dots+n-2\ \ n-1\ \ n$$

+

$$\sum_{i=0}^{n} i = n+n-1+n-2+\dots+2+1+0$$

$$2\cdot\sum_{i=0}^{n} i = \underbrace{n+n+n+\dots+n}_{n+1 \text{ términos}} = n(n+1) \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejercicio 4. Probar que $n^2 \geq n+1$ para todo $n \geq 10$.

$? \;|\; 10 \to 11 \to 12 \ldots$

Paso Base: $10^2 \geq 10+1$
($n=10$) $100 \geq 11$

Paso Inductivo: H.I.: $k^2 \geq k+1$ $\quad (k \geq 10)$
$\Downarrow$
T.I. $(k+1)^2 \geq k+2$

Prueba de la Tesis Inductiva asumiendo la H.I.:

$$
\begin{aligned}
(k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\
&\overset{\text{H.I.}}{\geq} k+1+2k+1 \\
&= k+2+2k \qquad k \geq 0 \\
&\geq k+2.
\end{aligned}
\qquad
\left(\left.\begin{array}{l} a=b \\ b\geq c \\ c=d \end{array}\right\} \; a \geq d \right)
$$

$\Rightarrow$ Por el P.I.C. la ppd se cumple para $n \geq 10$.

$n=9$: $9^2 \geq 9+1$ ✓
$n=8$: $8^2 \geq 8+1$ ✓
$\vdots$
$n=2$: $2^2 \geq 2+1$ ✓
$n=1$: $1^2 \geq 1+1$ ✗

Si ponemos $n_0 = 2$ (paso base $n=2$) entonces el P.B. se cumple. Además en el paso inductivo sólo usamos $k \geq 0 \Rightarrow$ una prueba analoga muestra que la ppd. vale a partir de $n=2$.

Si ponemos paso base $n=1 \Rightarrow$ no se cumple ✗ y por lo tanto no se deduce la ppd.

$\times \; 1 \;|\; 2 \to 3 \to 4 \ldots$

$\dot{5}$

Ejercicio 6. Probar que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 para todo natural n.

$\exists m$ tal que
$n = 5 \cdot m$
$0 = 5 \cdot 0$

Paso Base: $7^0 - 2^0 = 0$ ✓
$(n=0)$

Paso inductivo: H.I. : $7^k - 2^k$ es múltiplo de 5 || $7^k - 2^k = 5m$

T.I. : $7^{k+1} - 2^{k+1}$ " " " "

Prueba de H.I. $\Rightarrow$ T.I. :

$$
\begin{aligned}
7^{k+1} - 2^{k+1} &= 7 \cdot 7^k - 2 \cdot 2^k \\
&= (5+2)7^k - 2 \cdot 2^k \\
&= 5 \cdot 7^k + 2 7^k - 2 \cdot 2^k \\
&= \underbrace{5 \cdot 7^k}_{\dot{5}} + 2\big(\underbrace{7^k - 2^k}_{\dot{5} \text{ por H.I.}}\big)
\end{aligned}
$$

$= 5 \cdot 7^k + 2 5m$
$= 5(7^k + 2m)$

$\Rightarrow 7^{k+1} - 2^{k+1}$ es múltiplo de 5.

$7^{k+1} - 2^{k+1} = 5 \cdot (7^k + 2m)$