Referencia: Grimaldi (§4.1: Inducción Completa).

Parcial 1 (40 pts) 24/9 (Tentativo)

Parcial 2 (60 pts) 26/11 "

Cuestionarios EVA (5 pts + 5 pts)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

P ppd. sobre $\mathbb{N}$.

P: ser par

$P(0)$ es verdadera

$P(1)$ es falsa

$P(2)$ es verdadera

$P(3)$ es falso

P: ser cuadrado perfecto $\quad P(n)$ es verdadera sii $n = k^2$

$P(1)$ ✓ $\quad P(2)$ ✗

Vamos a querer probar ppdes. sobre todos los naturales a partir de un n_0.

Principio de Inducción Completa. Sea P una ppd. sobre $\mathbb{N}$, tal que se cumple

(1) Paso base: $P(n_0)$ es verdadera,

(2) Paso inductivo: si $\underbrace{P(k) \text{ es cierta}}_{\text{H.I.}} \Rightarrow \underbrace{P(k+1) \text{ también}}_{\text{T.I.}}$, $\forall k \geq n_0$.

Entonces $P(n)$ se cumple $\forall n \geq n_0$

$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \cdots$

$2 \to 3 \to 4 \to 5 \to \cdots$

Ejercicio 1. Probar de al menos dos formas distintas que para todo natural n se cumple:

Suma de Gauss.

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Forma 1: Inducción Completa

Paso Base $(n=0)$: $\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$ ✓

Paso Inductivo:

Hipótesis inductiva: $\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$

$\Downarrow$

Tesis Inductiva: $\sum_{i=0}^{k+1} i = \boxed{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$

Prueba de H.I. $\Rightarrow$ T.I.:

$\sum_{i=0}^{k} i = 0+1+2+\dots+k$

$$\sum_{i=0}^{k+1} i = \underbrace{0+1+2+\dots+k}_{\frac{k(k+1)}{2}} + k+1$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$\Rightarrow$ P. Inducción Completa: P es cierta $\forall n \geq 0$

$P(n)$: $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Forma 2 (Método de Gauss)

$$\sum_{i=0}^{100} i = 0+1+2+\dots+100$$

$+$

$$\sum_{i=0}^{100} i = 100+99+98+\dots+2+1+0$$

$(100+0)+(99+1)+(98+2)+(97+3)+\dots+(0+100) = 101 \cdot 100$

$$\Rightarrow \quad 2\sum_{i=0}^{100} i = 101 \cdot 100$$

$$\sum_{i=0}^{n} i = 0 + 1 + 2 + \dots + n$$

$$+ \quad \sum_{i=0}^{n} i = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 0$$

$$2\sum_{i=0}^{n} i = (n+1)(n) \rightsquigarrow \boxed{\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Ejercicio 2. Probar que para todo natural n se cumple:

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$P(n): \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Paso Base: $(n=0)$ ✓ $\quad \sum_{i=0}^{0} i^2 = 0^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6}$ ✓

Paso inductivo: ✓ H.I.: $\sum_{i=0}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$\Downarrow$

T.I.: $\sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)\overbrace{(2(k+1)+1)}^{2k+3}}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Prueba de H.I. $\Rightarrow$ T.I.:

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \underbrace{0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + k^2}_{\text{H.I.}: \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left(k(2k+1) + 6(k+1)\right)}{6}$$

$(k+2)(2k+3) =$
$2k^2 + 4k + 3k + 6$

$$= \frac{(k+1)\left(2k^2 + k + 6k + 6\right)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left(2k^2 + 7k + 6\right)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \checkmark$$

Por P.I.C. P es verdadera $\forall n \geq 0$.

Ejercicio 4. Probar que $n^2 \geq n+1$ para todo $n \geq 10$.

? $\| \; 10 \quad 11 \quad 12 \quad \ldots$

Paso Base: $10^2 \geq 10 + 1$
$(n=10)$ $\quad 100 \geq 11$ $\checkmark$

Paso Inductivo: Hipótesis inductiva: $k^2 \geq k+1$ $\quad (k \geq 10)$

$\Downarrow$

Tesis Inductiva: $(k+1)^2 \geq k+2$

Prueba de H.I. $\Rightarrow$ T.I.

$$\begin{aligned}
(k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\
&\geq k+1 + 2k + 1 \\
&= k+2+2k \\
&\geq k+2 \quad \text{porque } k \geq 0
\end{aligned}$$

$\checkmark$

$\left(\begin{array}{l} a \geq b \\ \quad = c \end{array} \right\} \; a \geq c \Bigg)$

Entonces $P(n): n^2 \geq n+1$ es cierta $\forall n \geq 10$.

¿Qué pasa antes de $n=10$?

$n=9 \checkmark$

$n=8 \checkmark$

$n=2 \checkmark \; (4 \geq 3)$

$n=1 \times \; (1^2 \geq 1+1 \times)$

Obs: $P(2)$ es cierta y en el paso inductivo sólo usamos $k \geq 0$. Entonces la misma prueba con paso base $n=2$ nos dice que $P(n)$ es cierta $\forall n \geq 2$.