

Referencia: Grimaldi (84.1: Inducción Completa).

Parcial 1 (40 pts) 24/9 (Tentativo)

Parcial 2 (60 pts) 26/11

Cuestionarios EVA (5 pts + 5 pts)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

P p.d. sobre \mathbb{N} .

$P(0)$ es verdadera

P : ser par

$P(1)$ es falsa

$P(2)$ es verdadera

$P(3)$ es falso

P : ser cuadrado perfecto $P(n)$ es verdadera si: $n = k^2$

$P(1) \checkmark$ $P(2) \times$

Vamos a querer probar p.d.s. sobre todos los naturales a partir de un no.

Principio de Inducción Completa. Sea P una p.d. sobre \mathbb{N} , tal que se cumple

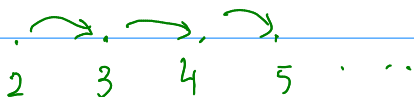
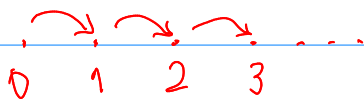
(1) Paso base: $P(n_0)$ es verdadera,

(2) Paso inductivo: si $P(k)$ es cierta \Rightarrow $P(k+1)$ también. $\forall k \geq n_0$.

H.I.

T.I.

Entonces $P(n)$ se cumple $\forall n \geq n_0$



Ejercicio 1. Probar de al menos dos formas distintas que para todo natural n se cumple:

Suma de Gauss.

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Forma 1: Inducción Completa

Paso Base $(n=0)$ $\sum_{i=0}^0 i = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$ ✓

Paso Inductivo:

Hipótesis inductiva: $\sum_{i=0}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$



Tesis Inductiva: $\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Prueba de H.I. \Rightarrow T.I.:

$$\sum_{i=0}^{k+1} i = \underbrace{0+1+2+\dots+k}_{\frac{k(k+1)}{2}} + k+1$$

$$\sum_{i=0}^k i = 0+1+2+\dots+k$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

\Rightarrow Inducción Completa: P es cierta $\forall n \geq 0$

$$P(n): \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Forma 2 (Método de Gauss)

$$\sum_{i=0}^{100} i = 0+1+2+\dots+100$$

+

$$\sum_{i=0}^{100} i = 100+99+98+\dots+2+1+0$$

$$(100+0) + (99+1) + (98+2) + (97+3) + \dots + (0+100) = 101 \cdot 100$$

$$\Rightarrow 2 \sum_{i=0}^{100} i = 101 \cdot 100$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n i &= 0 + 1 + 2 + \dots + n \\
 + \sum_{i=0}^n i &= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 0
 \end{aligned}$$

$$2 \sum_{i=0}^n i = (n+1)(n) \rightsquigarrow \left| \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \right|$$

Ejercicio 2. Probar que para todo natural n se cumple:

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$P(n): \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Paso Base: $(n=0) \checkmark \sum_{i=0}^0 i^2 = 0^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6} \checkmark$

Paso inductivo: H.I.: $\sum_{i=0}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$$\begin{aligned}
 \downarrow \\
 \text{T.I.: } \sum_{i=0}^{k+1} i^2 &= \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
 \end{aligned}$$

Prueba de H.I. \Rightarrow T.I.:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{k+1} i^2 &= 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 \\
 \text{H.I.: } &\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6}$$

$$(k+2)(2k+3) = 2k^2 + 4k + 3k + 6$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \checkmark$$

Por P.I.C. P es verdadera $\forall n \geq 0$.

Ejercicio 4. Probar que $n^2 \geq n + 1$ para todo $n \geq 10$.

? $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots$
10 11 12

Paso Base: $10^2 \geq 10 + 1$ \checkmark
($n=10$) $100 \geq 11$

Paso Inductivo: Hipótesis inductiva: $k^2 \geq k+1$ ($k \geq 10$)
Tesis Inductiva: $(k+1)^2 \geq k+2$

Prueba de H.I. \Rightarrow T.I.

$$\begin{aligned} (k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\ &\geq k+1 + 2k + 1 \\ &= k+2 + 2k \end{aligned}$$

$$\geq k+2 \quad \text{porque } k \geq 0$$

$$\left(\begin{array}{l} a \geq b \\ = c \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} a \geq c \end{array} \right.$$

Entonces $P(n): n^2 \geq n+1$ es cierta $\forall n \geq 10$.

¿Qué pasa antes de $n=10$?

$$n=9 \checkmark$$

$$n=8 \checkmark$$

$$n=4 \checkmark (4 \geq 3)$$

$$n=1 \times (1^2 \geq 1+1 \times)$$

Obs: $P(2)$ es cierta y en el paso inductivo sólo usamos $k \geq 0$. Entonces la misma prueba con paso base $n=2$ nos dice que $P(n)$ es cierta $\forall n \geq 2$.