Instituto de Matemáticas y Estadística “Prof. Rafael Laguardia”.
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República.
Montevideo, Uruguay, 11200.

Notas de Geometría y Álgebra Lineal 1.
Teórico-Práctico y Evaluaciones.

Josefina González y Rafael Parra.

Montevideo, 9 de septiembre de 2024.

ÍNDICE GENERAL

Prólogo

Estas notas de Geometría y Álgebra Lineal 1 surgieron a partir de las guías teórico-prácticas desarrolladas en el año 2023 durante nuestra participación en el dictado del curso en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República. Las notas siguen el plan de estudio del curso Geometría y Álgebra Lineal 1 aprobado por la comisión de enseñanza del IMERL. Nuestro enfoque es teórico-práctico, presentando un solo texto que busca además preservar todo el material de evaluación generado en el IMERL durante los últimos 17 años.

En este compendio, no solo hemos incorporado el desarrollo teórico y las principales demostraciones (basándonos en las referencias [5], [4], [2], [3], [1]), sino también numerosos ejemplos resueltos detalladamente. Este material se gestó durante el primer semestre del año 2023 y la edición especial del curso, denominada Gal1 interactiva, realizada en el segundo semestre de 2023. Estas ediciones de curso fueron dirigidas por Marco Pérez y Mauricio Guillermo respectivamente, a quienes expresamos nuestro agradecimiento. Los ejemplos que se incluyen en estas notas que corresponden a las evaluaciones del curso de GAL1 interactivo[1] fueron diseñados por el equipo docente del mismo curso y sus soluciones corresponden a Mauricio Guillermo.

La estructura de estas notas se divide en dos partes. La primera aborda temas fundamentales como sistemas de ecuaciones lineales, álgebra matricial, determinantes y geometría en el espacio. Como preámbulo a esta primera parte, se incluye un capítulo de preliminares con definiciones y resultados cruciales para la comprensión de los capítulos siguientes. La segunda parte del curso adopta un enfoque más teórico y abstracto, desarrollando los conceptos de espacios vectoriales y transformaciones lineales. Esta segunda parte se apoya en la base proporcionada por la primera, estableciendo así una progresión lógica en el aprendizaje.

El álgebra lineal, esencial para diversas ramas de las matemáticas, así como para disciplinas afines como la física, ingeniería y computación, es una herramienta básica en el desarrollo de conocimientos y aplicaciones. Su impulso histórico, desde el estudio de sistemas de ecuaciones lineales hasta las ecuaciones diferenciales, ha sido clave en el desarrollo matemático moderno. A lo largo del tiempo, el álgebra lineal ha evolucionado desde las contribuciones de Cardano en el siglo XVI hasta el desarrollo de conceptos fundamentales por parte de Hamilton, Cayley y Grassmann en el siglo XIX. La aparición del determinante, su formalización por Gauss y las contribuciones de Leibniz han consolidado el álgebra lineal como un pilar de las matemáticas modernas.

Estas notas buscan proporcionar a los estudiantes una comprensión sólida de los principios del álgebra lineal, desde sus fundamentos hasta aplicaciones más avanzadas. Esperamos que esta recopilación de conocimientos sea una herramienta valiosa en su camino académico y profesional. Agradecemos cualquier sugerencia o corrección a las mismas.

Josefina González
`jgonzalez@fing.edu.uy`
Rafael Parra
`rparra@fing.edu.uy`

[1] Este curso dictado en II semestre de 2023 trabajó sobre el mismo programa que el curso estándar GAL1. Se inspiró en la idea de motivar los temas más de lo que es posible en una clase expositiva y masiva, haciendo énfasis en la cultura matemática y en el gusto de pensar problemas colectivamente. Integrantes del curso: Mauricio Guillermo (Responsable), Rafael Parra, María Cecilia Barranguet,Patricia Cerizola, Carmen Gironella y Juan Piccini (Colaborador).

Parte I

Sistemas de ecuaciones lineales, matrices y geometría.

Descripción y objetivos.

En esta primera parte del curso, exploraremos conceptos fundamentales que establecerán la base para el estudio avanzado del álgebra lineal. Los capítulos abordados en esta sección son los siguientes: Preliminares, Sistemas de Ecuaciones Lineales, Álgebra Matricial, Determinantes y Geometría en $\mathbb{R}^3$.

Al concluir esta sección, encontrarán una base de datos con las evaluaciones correspondientes a estos temas (Primer Parcial), diseñadas por los diferentes equipos responsables de la asignatura desde el año 2007.

Los objetivos que se esperan alcanzar en esta primera parte son los siguientes:

- Modelar y resolver problemas aplicados utilizando sistemas de ecuaciones lineales.
- Utilizar la sustitución hacia atrás para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Determinar la compatibilidad o incompatibilidad de sistemas de ecuaciones lineales dependientes de parámetros.
- Deducir la matriz aumentada y la matriz de coeficientes a partir de un sistema de ecuaciones lineales.
- Identificar si una matriz está en forma escalonada por filas o en forma escalonada reducida por filas.
- Utilizar operaciones elementales en las filas con sustitución hacia atrás para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante eliminación de Gauss y eliminación de Gauss con sustitución hacia atrás.
- Encontrar la traspuesta de una matriz.
- Determinar si una matriz es invertible o no.
- Factorizar una matriz invertible en un producto de matrices elementales.
- Utilizar operaciones elementales de fila o columna para evaluar el determinante de una matriz.
- Encontrar el determinante de matrices elementales.
- Utilizar el determinante y propiedades del determinante para determinar si una matriz es invertible o no.
- Identificar y construir ecuaciones de rectas y planos en $\mathbb{R}^3$.
- Reconocer la posición relativa de rectas y planos en el espacio y calcular sus intersecciones en caso de que existan.
- Utilizar determinantes para encontrar la ecuación reducida de un plano.
- Interpretar geométricamente los conceptos de producto escalar y vectorial.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES.

En este capítulo, presentaremos algunas definiciones y notaciones básicas que suponemos que el lector está familiarizado. Por lo tanto, avanzaremos rápidamente usando nociones básicas de teoría de conjuntos que nos permitirán definir el concepto de relación, clases de equivalencia y funciones. Incluimos un práctico para este capítulo que, aunque no será tema de evaluación, consideramos que es de fundamental importancia para la comprensión de los temas que se desarrollarán a partir del siguiente capítulo.

1.1. Relaciones.

Comenzaremos el capítulo introduciendo la noción de relación. Dado un conjunto, podemos describir una relación entre pares de elementos de éste, dando una lista de los pares que verifican dicha relación. Para formalizar esta idea, recordamos la definición de producto cartesiano entre conjuntos.

Definición 1.1 *Dados dos conjuntos A y B, definimos el* ***producto cartesiano*** *entre ellos, y denotamos $A \times B$ al conjunto*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Decimos que los elementos de $A \times B$ son **pares ordenados** y tenemos que $(a, b) = (c, d)$ si y solo si $a = c$ y $b = d$. Se cumple además que si A y B son conjuntos finitos, $|A \times B| = |A|.|B| = |B \times A|$,[1] aunque generalemente no ocurre que $A \times B = B \times A$.

Podemos generalizar la definición anterior para más de dos conjuntos. Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces el producto cartesiano de $A_1, A_2, ..., A_n$ es el conjunto

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

A los elementos de $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ se le llaman **n-uplas ordenadas** y se cumple que $(a_1, a_2, ..., a_n) = (b_1, b_2, ..., b_n)$ si y solo si $a_i = b_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

[1]Dado un conjunto A, donotamos por $|A|$ el cardinal del conjunto A, es decir, la cantidad de elementos de A.

Definición 1.2 *Una **relación** en un conjunto A es un subconjunto $R \subset A \times A$. Si $(a,b) \in R$ decimos que a está relacionado con b y lo denotamos por aRb.*

Ejemplo 1.1 *En cualquier conjunto A, podemos definir la relación de igualdad, es decir $R = \{(a,a) : a \in A\}$.*

Si el conjunto A es finito, podemos también definir A listando cada uno de los elementos que pertenecen a la relación como se ve en el ejemplo siguiente

Ejemplo 1.2 *Sea $A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ y definimos la relación R como*

$$R = \{(\emptyset,\emptyset), (\emptyset,\{1\}), (\emptyset,\{2\}), (\emptyset,\{1,2\}), (\{1\},\{1\}), (\{1\},\{2\}), (\{1\},\{1,2\}), (\{2\},\{2\}), (\{2\},\{1,2\}), (\{1,2\},\{1,2\})\}$$

Observamos que R es la relación de inclusión, donde $(C,D) \in R$ si y solo si $C \subseteq D$.

Ejemplo 1.3 *Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros y R la relación definida de la siguiente forma*

$$R = \{(a,b) : a \text{ está relacionado con } b \text{ si y solo si } a-b \text{ es múltiplo de } 2\}.$$

Observamos que en este ejemplo, todos los números pares están relacionados entre sí y todos los ímpares entre sí.

Existen otras formas de representar relaciones que utilizan el concepto de matriz que definiremos en capítulos siguientes, o también con grafos. No ampliaremos sobre estos temas en estas notas.

1.1.1. Relaciones de equivalencia.

Definición 1.3 *Una relación R en un conjunto A se dice*

1. ***Reflexiva** si para todo $a \in A$ se tiene que aRa.*
2. ***Simétrica** si para todos $a, b \in A$, aRb implica que bRa.*
3. ***Transitiva** si para todos $a, b, c \in A$, si aRb y bRc, entonces aRc.*

*Cuando una relación R cumple las tres propiedades anteriores simultáneamente, decimos que es una **relación de equivalencia**. En este caso, si aRb, lo denotamos $a \sim b$. De esta forma, podemos reescribir las propiedades anteriores como*

1. $a \sim a \ \forall a \in A$.
2. $a \sim b \implies b \sim a$.
3. $a \sim b$ *y* $b \sim c \implies a \sim c$.

Las relaciones definidas en los ejemplos 1.1 y 1.2 son de equivalencia. Veamos que esto es cierto para la relación del ejemplo 1.3:

- Reflexividad: para todo $a \in \mathbb{Z}$, $a - a = 0 = 2{,}0$, por lo que el par (a,a) pertenece a la relación, es decir, aRa.
- Simetría: sean a, b tales que $aRb \implies a - b = 2.k \implies b - a = -2k = 2.(-k) \implies bRa$.
- Transitividad: sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que aRb y bRc, entonces $a - b = 2k$ y $b - c = 2k'$. Por lo tanto, $a - c = (a-b) + (b-c) = 2k + 2k' = 2(k+k')$ y tenemos que aRc.

Veamos otros ejemplos.

Ejemplo 1.4 *Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales. Podemos construir el conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$ definiendo la siguiente relación en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$*

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b.$$

Cada par representa al entero que surge de restar a la primera componente la segunda.

Ejemplo 1.5 *Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. De forma análoga al ejemplo anterior, podemos construir el conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$, a partir de ellos definiendo la siguiente relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, donde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,*

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow a.b' = a'.b$$

Ejemplo 1.6 *Podemos generalizar el ejemplo 1.5 de la siguiente forma. Dado $m \in \mathbb{Z}$ fijo, definimos una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$ como $a \sim b$ si y solo si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso se escribe $a \equiv b \ (mod\ m)$.*

Ejemplo 1.7 *Veamos un ejemplo de una relación que **no** es de equivalencia. Consideremos el conjunto de los números reales y la relación menor o igual, que notamos $\leq$. Esta relación es reflexiva y transitiva pero no necesariamente simétrica.*

- *Reflexividad: es claro que $x \leq x$ pues $x = x$.*
- *Simetría: si $x \leq y$, no necesariamente se cumple que $y \leq x$, claramente esto solo pasa si $x = y$.*
- *Transitividad: si $x \leq y$ e $y \leq z$ entonces, $x \leq z$ pues $x \leq y \leq z$.*

Definición 1.4 *Dada una relación de equivalencia en un conjunto A y $a \in A$, definimos la **clase de equivalencia de a**, que denotamos $[a]$, como el conjunto de los elementos de A que son equivalentes a a. Es decir,*

$$[a] = \{x \in A : a \sim x\}.$$

*Además, a todo elemento $x \in [a]$ se le llama **representante de esa clase**.*

Proposición 1.1 *Dado un conjunto A y una relación de equivalencia en él, sean $[a], [b]$ dos clases de equivalencia. Entonces $[a] = [b]$ o son disjuntas. Además, todos los elementos de A pertenecen a una clase de equivalencia.*

Demostración: Supongamos que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, entonces existe un elemento $c \in [a] \cap [b]$. Este elemento está relacionado tanto con a como con b, es decir

$$a \sim c, b \sim c \implies a \sim c, c \sim b \implies a \sim b.$$

Por lo que $[a] = [b]$. Aquí usamos las propiedades de simétria y transitividad. Por otro lado, usando la propiedad de reflexividad, es claro que para todo $a \in A$, $a \in [a]$.

Se dice que las clases de equivalencia forman una **partición del conjunto** A.

Proposición 1.2 *Recíprocamente, dado un conjunto de subconjuntos de A, no vacíos, disjuntos entre sí y cuya unión es todo A, existe una única relación de equivalencia cuyas clases de equivalencia son dichos subconjuntos.*

Demostración: Definimos la relación de equivalencia de forma que $a \sim b$ si y solo si a y b pertenecen al mismo subconjunto. Es claro que esta relación cumple las tres propiedades necesarias.

1.1.2. Conjunto cociente.

Definición 1.5 *Dada una relación de equivalencia en un conjunto A, definimos el* ***conjunto cociente,*** *que denotamos $A/\sim$ como el conjunto de todas las clases de equivalencia.*

Examinemos el conjunto cociente en diversos ejemplos previos, así como en nuevos ejemplos que se presentarán.

Ejemplo 1.8 *Si A es cualquier conjunto y $R = \{(a, a) : a \in A\}$, entonces es claro que cada clase de equivalencia tiene un único elemento, es decir $[a] = \{a\}$, luego el conjunto cociente es simplemente $A/R = \{[a] : a \in A\}$.*

Ejemplo 1.9 *En el ejemplo 1.4 tenemos que $[(a, b)] = \{(a', b') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + b' = a' + b\}$, por lo que en cada clase hay infinitos pares.*

Observar que $(a, b) \sim (a+1, b+1)$. Tenemos entonces que si $a = b$, $(a, b) \sim (0, 0)$. Si no, tenemos que existe un único $c \neq 0$ tal que $(a, b) \sim (0, c)$ o un único $c \neq 0$ tal que $(a, b) \sim (c, 0)$. Las clases correspondientes se denotan c y $-c$ y la clase de $(0, 0)$ se denota 0. Se definen los números enteros $\mathbb{Z}$ como el conjunto cociente $A/\sim$.

Ejemplo 1.10 *En el ejemplo 1.6, es claro que $[a] = \{a, a \pm m, a \pm 2m, ..., a \pm km, ...\}$, es decir, cada clase tiene infinitos elementos.*

Recordar que dado m fijo, todo $a \in \mathbb{Z}$ puede escribirse como $a = qm + r$, donde $0 \leq r < m$ por lo que $a \sim r$. Además, si tenemos r, r' tales que $0 \leq r < r' < m$, entonces r y r' no son equivalentes. Por lo tanto, el conjunto cociente es $A/\sim = \{[0], [1], ..., [m-1]\}$. Este conjunto se denota por $\mathbb{Z}_m$ y sus elementos se llaman ***enteros módulo m****. Tenemos que $|\mathbb{Z}_m| = m$.*

1.2. Funciones.

Definición 1.6 *Dados dos conjuntos A y B, definimos una* ***función, transformación*** *o* ***aplicación*** *f de A en B, y la denotamos $f : A \to B$, como un subconjunto de $A \times B$ tal que para cada $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. En este caso, escribimos $f(a) = b$ y decimos que b es la* ***imagen*** *de a por f. Llamamos* ***dominio*** *de la función al conjunto A y* ***codominio*** *al conjunto B.*

Definición 1.7 *La* ***imagen*** *de un conjunto $X \subseteq A$, que denotamos $f(X)$, es el conjunto formado por las imágenes de cada elemento de X, es decir, $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$. El conjunto* ***imagen*** *de la función f es $f(A)$ que también se conoce como* ***recorrido*** *de la función.*

Notar que $f(A) \subset B$ pero no necesariamente se cumple que $f(A) = B$.

Definición 1.8 *La* ***preimagen*** *de $Y \subseteq B$ es el conjunto $f^{-1}(Y) = \{a \in A : f(a) \in Y\} \subset A$.*

Definición 1.9 *Diremos que una función es*

1. ***Inyectiva*** *si para todo $b \in B$, el conjunto $f^{-1}(b)$ tiene un único elemento. Esto equivale a decir que si $a \neq a' \implies f(a) \neq f(a')$.*

2. ***Sobreyectiva*** *si $f(A) = B$. Esto equivale a decir que para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.*

3. ***Biyectiva*** *si es inyectiva y sobreyectiva.*

Ejemplo 1.11 *Sean $A = B = \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $(x, y) \in f$ si y solo si $y = x^2$. Esto es, la función f es tal que $f(x) = x^2$. En este caso, tenemos que la imagen de f es $\mathbb{R}_{\geq 0}$, es decir, los reales mayores o iguales que 0. Además, dado $y \in \mathbb{R}$, es claro que existen únicamente dos elementos $x, -x$ tales que $(x, y), (-x, y) \in f$ pues $x^2 = (-x)^2$.*

Concluimos que la función f no es inyectiva ni sobreyectiva.

Ejemplo 1.12 *Sea $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{Z}$. Definimos la **función parte entera** o **función suelo** como*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \text{ tal que } f(x) = \lfloor x \rfloor = max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

Es claro que la función es sobreyectiva pues para todo entero m, tenemos que $f(m) = m$, es decir, la imagen de f es todo el conjunto $\mathbb{Z}$. Además, f no es inyectiva pues para todos $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $m - 1 < x < y \leq m$ con $m \in \mathbb{Z}$, tenemos que $f(x) = f(y)$, es decir, m tiene al menos dos preimágenes.

Ejemplo 1.13 *Sea $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como $p(x, y) = x$. Es claro que la imagen de p es $\mathbb{R}$ por lo que p es sobreyectiva pero no es inyectiva pues $p(x, y) = p(x, y')$ para cualquier $y, y' \in \mathbb{R}$.*

Ejemplo 1.14 *Sean A y B dos conjuntos tales que $A \subseteq B$ e $i : A \to B$ la función definida como $i(a) = a$. Entonces esta función es inyectiva pero si $A \neq B$, no es sobreyectiva.*

Ejemplo 1.15 *Dada una función $f : A \to B$, definimos la relación de equivalencia $\sim_f$ como $a \sim_f b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$. Tenemos que $[a] = \{x \in A : f(x) = f(a)\}$, por lo tanto, la función $\hat{f} : A/\sim_f \to f(A)$ tal que $\hat{f}([a]) = f(a)$ es inyectiva pues representantes de clases de equivalencia distintas tienen imágenes distintas y es sobreyectiva trivialmente.*

Ejemplo 1.16 *Las funciones siguientes son todas biyectivas.*

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *definida por* $f(n) = n + 1$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x^3$
- $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}/f(x) = \log(x)$
- $id_A : A \to A/id_A(x) = x.$

Definición 1.10 *Dada una función $f : A \to B$ y un conjunto $C \subset A$, se llama **restricción de f a C** a la función $g : C \to B$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in C$. Decimos que f es una **extensión de g en A**. Denotamos $g = f|_C$.*

Definición 1.11 *Una función $a : \mathbb{N} \to A$ se llama **sucesión de elementos de A**. Llamamos **elemento de la sucesión** a cada $a(i)$. Generalmente denotamos $a_i = a(i)$ y le llamamos sucesión al conjunto $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.*

Definición 1.12 *Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$, llamaremos **composición de f y g** a la función $h : A \to C$ tal que para todo $a \in A$ $h(a) = g(f(a))$. Notamos a esta función $g \circ f$.*

Es necesario que el codominio de f esté contenido en el dominio de g para poder defnir $g \circ f$ por lo que puede estar definida esta última pero no $f \circ g$. Si tenemos que $f : A \to A, g : A \to A$, entonces están defnindas $f \circ g$ y $g \circ f$ pero no necesariamente son iguales.

Observar que para toda función $f : A \to B$, se cumple que $id_B \circ f = f \circ id_A = f$, donde id_A e id_B son las funciones identidad en los conjuntos A y B respectivamente.

Proposición 1.3 *Se cumple que si f y g son inyectivas (sobreyectivas), entonces $g \circ f$ es inyectiva (sobreyectiva).*

Teorema 1.1 *Una función $f : A \to B$ con dominio A no vacío es inyectiva si y solo si existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$*

Demostración: ($\Longrightarrow$) Sea $f : A \to B$ una función inyectiva, entonces para todo $b \in B$, se tiene que $\#f^{-1}(b) \leq 1$, es decir, b tiene a lo sumo una preimagen. Definimos la función $g : B \to A$ de la siguiente forma

- Si $f^{-1}(b) \neq \emptyset$, entonces $g(b) = a$ donde a es la única preimagen de b por f.
- Si $f^{-1}(b) = \emptyset$, consideramos $x \in A$ cualquiera, que sabemos que existe pues A no es vacío y definimos $g(b) = x$.

Se cumple entonces que $g \circ f = id_A$.

($\Longleftarrow$) Sea $f : A \to B$ tal que existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$. Sean $a, a' \in A$ tales que $f(a) = f(a')$. Aplicando g a ambos lados, obtenemos $g(f(a)) = g(f(a'))$, lo que implica $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$. Dado que $g \circ f$ es la identidad en A, esto se simplifica a $\mathrm{id}_A(a) = \mathrm{id}_A(a')$, concluyendo en $a = a'$. Por lo tanto, hemos demostrado que f es una función inyectiva.

Llamamos **inversa izquierda de** f a la función g definida en el teorema anterior.

Proposición 1.4 *Sean $h, h' : C \to A$ dos funciones. Si $f : A \to B$ es inyectiva y $f \circ h = f \circ h'$, entonces $h = h'$*

Demostración: Si A no es vacío, sabemos que existe la inversa izquierda de f que llamamos g, entonces

$$f \circ h = f \circ h' \implies g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ h') \implies (g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ h' \implies id_A \circ h = id_A \circ h' \implies h = h'$$

Además, si $A = \emptyset$, como $h : C \to A$, se tiene que $C = \emptyset$

Proposición 1.5 *Si $f : A \to B$ cumple que para todas h, h' $f \circ h = f \circ h'$ implica $h = h'$, entonces f es inyectiva.*

Demostración: Supongamos que f no es inyectiva y sean $x, x' \in A, x \neq x'$ tales que $f(x) = f(x')$. Sea $C = \{c\}$ y definimos las funciones $h, h' : C \to A$ tal que $h(c) = x$ y $h'(c) = x'$. Entonces es claro que $h \neq h'$. Sin embargo, $(f \circ h)(c) = f(h(c)) = f(x) = f(x') = f(h'(c)) = (f \circ h')(c)$, es decir $f \circ h = f \circ h'$, lo que contradice la hipótesis. Luego, f es inyectiva.

Teorema 1.2 *Una función $f : A \to B$ es sobreyectiva si y solo si existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$.*

Demostración: ($\Longrightarrow$) Sea $f : A \to A$ una función sobreyectiva, entonces, para todo $b \in B$, tenemos que $f^{-1}(b) \neq \emptyset$. Definimos la función $g : B \to A$ como $g(b) = a$ donde $a \in f^{-1}(b)$. Claramente, esto implica que $(f \circ g)(b) = b$ para todo $b \in B$, es decir, $f \circ g = id_B$.

($\Longleftarrow$) Sea $f : A \to B$ tal que existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$ y sea $b \in B$, entonces $b = id_B(b) = (f \circ g)(b) = f(g(b))$. Esto implica que existe un elemento $a = g(b) \in A$ tal que $f(a) = b$. Por lo tanto, f es sobreyectiva.

Llamamos **inversa derecha de** f a la función g definida en el teorema anterior.

Proposición 1.6 *Si $f : A \to B$ es sobreyectiva, se cumple que para todo par de funciones $h, h' : B \to C$ $h \circ f = h' \circ f$ implica que $h = h'$.*

La demostración es similar a la de la propiedad análoga para funciones inyectivas

Corolario 1.1 *Una función $f : A \to B$ es biyectiva si y solo si existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$. En este caso, decimos que g es la inversa de f y notamos $g = f^{-1}$.*

1.3. Polinomios.

Definición 1.13 *Un polinomio es una función de la forma*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

El grado de un polinomio es la potencia más grande de x en esta expresión, es decir, si $a_n \neq 0$, entonces el grado de p es n y notamos $gr(p) = n$.

En nuestro curso, consideraremos $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 0, ..., n$.

Ejemplo 1.17 *Los polinomios $p(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$ y $q(x) = 2x - 5$ tienen grados 3 y 1 respectivamente.*
Además, las funciones constantes $f(x) = k$, $\forall x$ son polinomios de grado 0 pues el único coeficiente no nulo es a_0.

Ejemplo 1.18 *El polinomio nulo es el polinomio cuyos coeficientes son todos nulos. A éste se le asigna por convención grado igual a $-\infty$.*

Ejemplo 1.19 *Las funciones $f(x) = x^2 + x^{1/2}$ y $g(x) = 2x^3 + x + 1/x$ **no** son polinomios pues las potencias de x deben ser naturales.*

Definimos la suma y el producto de polinomios de la siguiente manera:

$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n,$$

En notación compacta:

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i x^i) + \sum_{i=0}^{n}(b_i x^i) = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i,$$

Es decir, la suma de polinomios se obtiene sumando los términos del mismo grado.

$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) \cdot (b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m) = (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \ldots$$

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i x^i) \cdot \sum_{i=0}^{m}(b_i x^i) = \sum_{i=0}^{m+n} \sum_{j+k=i}(a_j b_k)x^i.$$

Se verifican además las siguientes propiedades para todo polinomio con coeficientes reales p y q:

1. $\mathrm{gr}(p + q) \leq \max(\mathrm{gr}(p), \mathrm{gr}(q))$.
2. $\mathrm{gr}(p \cdot q) = \mathrm{gr}(p) + \mathrm{gr}(q)$.

Definición 1.14 *Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Decimos que α es una raíz del polinomio p si*

$$p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

Gráficamente, las raíces de un polinomio identifican las intersecciones de la gráfica del polinomio con el eje x.

Teorema 1.3 *Si p es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces p tiene a lo sumo n raíces en $\mathbb{R}$.*

Proposición 1.7 *Si p es un polinomio de grado $n \geq 1$ y α es un raíz de p, entonces existe un único polinomio q de grado $n-1$ tal que*

$$p(x) = (x - \alpha)q(x)$$

Ejemplo 1.20 *Sea $p(x) = x^2 - 5x + 6$, entonces tenemos que $gr(p) = 2$. Las raíces de este polinomio son las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ que sabemos que son*

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4{,}6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Por lo tanto, las raíces del polinomio son $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$ y el polinomio p puede escribirse como $p(x) = (x-2)(x-3)$.

Ejemplo 1.21 *Sea $p(x) = x^3 - 8$, entonces p es un polinomio de grado 3. Además, $p(2) = 2^3 - 8 = 0$, por lo que 2 es raíz de p. Utilizando la proposición, sabemos que existe un único polinomio q tal que $p(x) = (x-2)q(x)$. Este polinomio es $q(x) = x^2 + 2x + 4$ que no tiene raíces reales. Por lo tanto, no podemos descomponer más a p y tenemos*

$$p(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

1.4. Práctico 0.

Práctico 0.

Conjuntos, Relaciones de equivalencia, funciones y polinomios.

Ejercicios recomendados: Todos los ejercicios del práctico.

1.4.1. Conjuntos.

1. Sean los conjuntos

    - $A = \{e, s, t, d, i, a, r\}$.
    - $B = \{m, a, t, e, m, a, t, i, c, a, s\}$.
    - $C = \{e, s\}$.
    - $D = \{f, a, s, c, i, n, a, n, t, e\}$.

    1.1 Describa los conjuntos $A \cup B$, $A \cup D$, $A \cap B$, $A \cap D$.

    1.2 Compruebe que C es subconjunto de A, B y D.

    1.3 Demuestre que $A \cap D \subset B \cap D$.

    1.4 Compruebe que $A \setminus D = A \setminus B$.

    1.5 Demuestre que $\{f, r, a, n, c, e, s\} \subset A \cup D$.

    1.6 Compruebe que $\{t, i, a\}$ es subconjunto de A, B y D.

2. Sean los conjuntos $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 0\}$, $C = \{0, \{1\}\}$, $D = \{\{0\}, 1\}$, $E = \{\{0\}, \{0, 1\}\}$ y $F = \{\{0\}, \{1, 0\}\}$. Manifieste y justifique si las siguientes expresiones son correctas.

2.1 $A \subset B$.

2.2 $A = B$.

2.3 $A \subset C$.

2.4 $A \subset D$.

2.5 $A = D$.

2.6 $E \subset F$.

2.7 $F \subset E$.

2.8 $A \in E$.

2.9 $A \subset E$.

2.10 $A \cap B = A$.

2.11 $E \cap F = \{1, 0\}$.

2.12 $E \cup F = \{0\} \cup A$.

2.13 $B \subset F$.

3. Sea $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ($\emptyset$ es el conjunto vacío). Manifieste y justifique si las siguientes expresiones son correctas.

2.1 A es el conjunto vacío.

2.2 $\emptyset \subset A$.

2.3 $\emptyset \in A$.

2.4 $\{\emptyset\} \in A$.

2.5 $\{\emptyset\} \subset A$.

2.6 $A \cap \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$.

2.7 $A \cap \emptyset = \emptyset$.

2.8 $A \cup \{\emptyset\} = A$.

2.9 $A \cap \{\emptyset\} = \emptyset$.

4. Sea $A = \{xy \mid \ x, y \in \mathbb{N}\}$. Demuestre que $A = \mathbb{N}$.

5. Sean A, B y C tres conjuntos tales que $A \subset B \subset C \subset A$. Demuestre que $A = B = C$. Más aún, si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ son n conjuntos tales que

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_1$$

pruebe que $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$.

6. Sean A, B, C tres conjuntos cualesquiera. Demuestre las leyes de Morgan

6.1 $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

6.2 $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.

7. Dé una interpretación geométrica de los conjuntos $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$.

8. En el plano $\mathbb{R}^2$ describa geométricamente el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Haga lo mismo con el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

1.4.2. Relaciones de Equivalencia.

9. Considere la relación $\sim$ en el conjunto $\mathbb{Z}$ definida por

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x - y = 3k.$$

Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia y que el conjunto cociente $\mathbb{Z}/\sim$ está formado por las clases de equivalencia $[0], [1], [2]$.

10. Sea X el conjunto de todas las rectas en el plano. En X defina la relación $\sim$ como

    a) $x \sim y$ si x es paralela a y.
    b) $x \sim y$ si x es perpendicular a y.

Asuma que toda recta es paralela a sí misma. Demuestre entonces que la relación en (a) es una relación de equivalencia. Describa las clases de equivalencia generadas. ¿Es la relación definida en (b) una relación de equivalencia?

1.4.3. Funciones.

11. Se dice que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lineal si $f(cx_1 + x_2) = cf(x_1) + f(x_2)$, en donde $c_1, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Determine cuáles de las siguientes funciones son lineales:

    a) $f(x) = x$.
    b) $f(x) = 3x^2$.
    c) $f(x) = x + 1$
    d) $f(x) = 2x^3 + 1$.
    e) $f(x) = mx$ donde m es una constante.
    f) $f(x) = mx + k$ donde m y k son constantes.

12. Demuestre que la función $f : A \to B$ es una biyección si, y sólo si cumple la siguiente propiedad: dado $b \in B$ el conjunto $f^{-1}(b) \subset A$ consta de un solo elemento.

13. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones. Demuestre que

    a) Si f y g son inyectivas entonces $g \circ f$ es inyectiva.
    b) Si f y g son sobreyectivas entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
    c) Si f y g son biyectivas entonces $g \circ f$ es biyectiva.

14. Hallar $(f \circ f \circ f)(x)$, si $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f = \dfrac{1}{1-x}$.

15. Sea $f : A \to B$ una función de A en B y sean X_1 y X_2 subconjutnos de A. Demuestre que

    a) Si $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.
    b) Si $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f_(X_2)$
    c) Compruebe que $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$ si, y sólo si f es inyectiva.

1.4.4. Polinomios.

16. Hallar $p(-1), p(0), p(2)$ y $p(1-t)$, si $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.
17. Dados los polinomios $p(x) = x^3 + 6x^2 - x + 1$ y $q(x) = x^2 - 3x - 4$, deteminar el polinomio $(p(x) + q(x))(p(x) - q(x))$.
18. Determinar el polinomio de tercer grado que verifica $p(-1) = p(2) = p(-3)$ y $p(-2) = 16$.
19. Sea $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}$. Dado que $p\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, determinar las restantes raíces.
20. Encontrar los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que el polinomio $p(x) = (a+b)x^2 + (a-b)x + c$ satisface las condiciones:
    - $p(x) = p(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
    - $p(0) = 0$.
    - $p(1) = 2$

20. Demuestre que si $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ satisface la condición $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $a_2 = a_1 = a_0 = 0$.
21. Demuestre que si $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ satisface la condición $p(x_i) = 0$ para $x_i \in \{-1, 1, 0\}$,entonces $a_2 = a_1 = a_0 = 0$. Generalizar este resultado para un polinomio de grado n.

1.4.5. Solución Práctico 0.

Conjuntos.

1. Recordar las siguientes definiciones:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B.$$

   a. $A \cup B = \{e, s, t, u, d, i, a, r, m, c\}$.
      $A \cup D = \{e, s, t, u, d, i, a, r, f, c, n\}$.
      $A \cap B = \{e, s, t, i, a\}$.
      $A \cap D = \{e, s, t, i, a\}$.
   b. Es claro pues los elementos e, s pertenecen a los conjuntos A, B y D.
   c. Tenemos que $B \cap D = \{a, t, e, i, c, s\} = \{e, s, t, i, a\} \cup \{c\} = (A \cap D) \cup \{c\}$. Por lo tanto, $A \cap D \subset B \cap D$.
   d. $A \setminus D = \{d, r\} = A \setminus B$.
   e. Por la parte 1. tenemos que $\{f, r, a, n, c, e, s\} \subset \{f, r, a, n, c, e, s, u, d, n\} = A \cup D$.

2. a. Verdadero. Ambos elementos de A pertenecen al conjunto B.
   b. Verdadero. Los conjuntos tienen los mismos elementos.
   c. Falso. El elemento 1 está en el conjunto A pero no en C.

d. Falso. El elemento 0 pertenece al conjunto A pero no al conjunto D.
e. Falso. Por la parte anterior, tenemos que A no está contenido en D, en particular, no pueden ser iguales.
f. Verdadero. Ambos elementos de E, $\{0\}$ y $\{0,1\}$, pertenecen al conjunto F.
g. Verdadero.
h. Verdadero.
i. Falso. El elemento 1 pertenece al conjunto A pero no al conjunto E.
j. Verdadero. Los conjuntos son iguales así que su intersección es el mismo conjunto.
k. Falso. $E = F$ por lo tanto $E \cap F = E$.
l. Falso. El conjunto $\{0\} \cup A = \{0\} \cup \{0,1\} = \{0,1\}$.
m. Falso. Por la misma razón que la parte i.

3. a. Falso. A contiene dos elementos: el conjunto vacío y un conjunto que contiene al conjunto vacío.
b. Verdadero. El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.
c. Verdadero. El conjunto vacío es un elemento de A.
d. Verdadero. $\{\emptyset\}$ es uno de los elementos de A.
e. Verdadero. El conjunto $\{\emptyset\}$ contiene a uno de los elementos de A.
f. Verdadero.
g. Verdadero. Esto es cierto para cualquier conjunto A.
h. Verdadero. El conjunto vacío ya está en A.
i. Falso.

4. Para demostrar esta igualdad, demostremos ambas inclusiones, es decir, $A \subset \mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \subset A$.

- $A \subset \mathbb{N}$: Sea $a \in A$, entonces existen $x, y \in \mathbb{N}$ tales que $a = xy$. Sabemos que el producto de números naturales es natural, por lo que $a \in \mathbb{N}$. Como el elemento a era genérico, tenemos que $\forall a \in A \Rightarrow a \in \mathbb{N}$ y concluimos que $A \subset \mathbb{N}$.
- $\mathbb{N} \subset A$: Sea $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $n = n{,}1$. Es decir, encontramos dos naturales $x = n, y = 1$ tales que $n = xy$ y por lo tanto $n \in A$.

5. Sean A, B, C conjuntos tales que $A \subseteq B \subseteq C$. Como $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, para probar las igualdades solo falta probar las otras inclusiones. Es decir, alcanza probar que $B \subseteq A$ y $C \subseteq B$.

Consideramos un elemento $x \in B$. Como $B \subseteq C$, sabemos que $x \in C$. Además, $C \subseteq A$ y por lo tanto $x \in A$. Como x es un elemento genérico, tenemos que todo elemento de B pertenece a A y concluimos que $B \subseteq A \implies A = B$.

Por otro lado, sea $y \in C$. Como $C \subseteq A$, sabemos que $y \in A$. Además, $A \subseteq B$, por lo que $y \in B$ y tenemos que $C \subseteq B \implies B = C$ y conseguimos la triple igualdad.

La generalización de esto se muestra de forma análoga.

6. a. Sea $x \in C \setminus (A \cup B)$. Tenemos, por definición de diferencia de conjuntos, que $x \in C$ y $x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \in C, x \notin A$ y $x \notin B \Leftrightarrow x \in C \setminus A$ y $x \in C \setminus B \Leftrightarrow x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. Donde utilizamos la definición de unión e intersección de conjuntos. Probamos entonces que $C \setminus (A \cup B) \subset (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$. La otra inclusión es análoga.
b. Sea $x \in C \setminus (A \cap B)$. Nuevamente, por definición de diferencia de conjuntos, se cumple que $x \in C$ y $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \in C$ y $x \notin A$ o $x \notin B \Leftrightarrow x \in (C \setminus A)$ o $x \in (C \setminus B) \Leftrightarrow x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. Probamos entonces que $C \setminus (A \cap B) \subset (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. La otra inclusión es análoga.

Relaciones de Equivalencia.

9. Recordar que una relación R sobre un conjunto X es de equivalencia si verifica las siguientes propiedades

   i. Reflexiva: para todo $x \in X$, se cumple que xRx.
   ii. Simétrica: para todos $x, y \in X$, si xRy entonces yRx.
   iii. Transitiva: para todos $x, y, z \in X$, si xRy e yRz entonces xRz

   Supongamos ahora que $X = \mathbb{Z}$ y $x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = 3k$. Veamos que la relación es de equivalencia.

   Reflexiva: sea $x \in \mathbb{Z}$, entonces $x - x = 0 = 3{,}0$ y por lo tanto $x \sim x$.

   Simétrica: sean $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $x \sim y$, esto significa que $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = 3k$. Entonces $y - x = -3k = 3(-k) = 3k'$, donde $k' = -k \in \mathbb{Z}$, y concluimos que $y \sim x$.

   Transitiva: sean $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tales que $x \sim y$ e $y \sim z$, esto significa que existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $x - y = 3k_1$ e $y - z = 3k_2$. Entonces $x - z = x - y + y - z = 3k_1 - 3k_2 = 3(k_1 + k_2) = 3k$ donde $k = k_1 + k_2$. Por lo tanto, $x \sim z$.

   Finalmente, observamos que cualquier múltiplo de 3 estará en la clase de equivalencia del 0, cualquier número de la forma $3n + 1$ estará en la clase de 1 y cualquier número de la forma $3n + 2$ estará en la clase de 2. Es decir, las clases de equivalencia son los posibles restos de dividir entre 3.

10. a. Recordar que dos rectas en el plano son paralelas si tienen la misma pendiente. Veamos que la relación cumple las tres propiedades.
      - Reflexiva: es claro que una recta es paralela a sí misma, por lo que esta propiedad se verifica trivialmente.
      - Simétrica: dadas dos rectas r y s, si r es paralela a s entonces s es paralela a r.
      - Transitiva: sean r, s, t tres rectas tales que r es paralela a s y s es paralela a t. Entonces r es paralela a t.

      Observar que para cada pendiente, tenemos una recta que pasa por el origen y tiene esa pendiente. Por lo que podemos pensar al conjunto cociente como el de todas las rectas por el origen.

    b. No es una relación de equivalencia. Es claro que una recta no es perpendicular a sí misma por lo que no se cumple la propiedad reflexiva. Además si consideramos r, s, t tres rectas tales que r es perpendicular a s y s perpendicular a t, tenemos que r es paralela a t.

Funciones.

11. a) $f(x) = x$ es una función lineal. Para probar esto consideremos $c_1, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y calculemos $f(c_1x_1 + x_2)$:

$$f(c_1x_1 + x_2) = c_1x_1 + x_2 = c_1f(x_1) + f(x_2)$$

    b) $f(x) = 3x^2$ no es una función lineal. Sean $c_1, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, entonces

$$f(c_1x_1 + x_2) = 3(c_1x_1 + x_2)^2 = 3(c_1^2x_1^2 + 2c_1x_1x_2 + x_2^2) \neq$$

$$c_13x_1^2 + 2x_2^2 = c_1f(x_1) + f(x_2)$$

c) $f(x) = x + 1$ no es una función lineal. Sean $c_1, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, entonces

$$f(c_1 x_1 + x_2) = c_1 x_1 + x_2 + 1 \neq c_1(x_1 + 1) + (x_2 + 1) = c_1 f(x_1) + f(x_2)$$

d) $f(x) = 2x^3 + 1$ no es lineal.

e) $f(x) = mx$ donde m es una constante es una función lineal. Sean $c_1, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, entonces

$$f(c_1 x_1 + x_2) = m(c_1 x_1 + x_2) = c_1 m x_1 + m x_2 = c_1 f(x_1) + f(x_2)$$

f) $f(x) = mx + k$ donde m y k son constantes no es una función lineal si $k \neq 0$.

12. Sea $f : A \to B$ una función biyectiva y sea $b \in B$. Como f es sobreyectiva, sabemos que el elemento b tiene al menos una preimagen, es decir, el conjunto $f^{-1}(b) = \{a \in A : f(a) = b\}$ es no vacío. Además, por ser f inyectiva, este conjunto tiene un solo elemento.

    Recíprocamente, si $f^{-1}(b)$ tiene un solo elemento, sabemos que b tiene preimagen, para cualquier $b \in B$ por lo que f es sobreyectiva y además esta preimagen es única por lo que es inyectiva.

13. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones.

    a) Sean $x, y \in A$ tales que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, entonces $g(f(x)) = g(f(y))$. Como g es una función inyectiva, tenemos que $f(x) = f(y)$. Además, como f es inyectiva, concluimos que $x = y$ y por lo tanto $g \circ f$ es una función inyectiva.

    b) Sea $z \in C$ cualquiera. Como $g : B \to C$ es sobrectiva, sabemos que existe un elemento $y \in B$ tal que $g(y) = z$. Además, como f es sobreyectiva, sabemos que existe un elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Por lo tanto, tenemos que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ y concluimos que $g \circ f$ es una función sobreyectiva.

    c) Juntando las partes anteriores, se desprende esta.

14. Sea $f : A \to B$ una función de A en B y sean X_1 y X_2 subconjutnos de A.

    a) Para probar que $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$ podemos probar ambas inclusiones.

       Consideremos un elemento $y \in f(X_1 \cup X_2)$. Tenemos que existe $x \in X_1 \cup X_2$ tal que $f(x) = y$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x \in X_1$ y en este caso, tenemos que $y = f(x) \in f(X_1) \subset f(X_1) \cup f(X_2)$. Es decir, $f(X_1 \cup X_2) \subset f(X_1) \cup f(X_2)$.

       Sea ahora $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $y \in f(X_1)$. En este caso, sabemos que existe $x \in X_1$ tal que $f(x) = y$. Como $x \in X_1 \subset X_1 \cup X_2$, tenemos que $y \in f(X_1 \cup X_2)$ y por lo tanto, $f(X_1) \cup f(X_2) \subset f(X_1 \cup X_2)$.

    b) Sea $y \in f(X_1 \cap X_2)$, entonces existe $x \in X_1 \cap X_2$ tal que $f(x) = y$. Como $x \in X_1 \cap X_2$, entonces $x \in X_1$ y $x \in X_2$. Por lo tanto, $y \in f(X_1)$ e $y \in f(X_2)$, es decir, $y \in f(X_1) \cap f(X_2)$.

    c) Supongamos que f es una función inyectiva. Tenemos que probar que $f(X_1) \cap f(X_2) \subset f(X_1 \cap X_2)$. Sea $y \in f(X_1) \cap f(X_2)$. Entonces existen $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$ tales que $f(x_1) = y$ y $f(x_2) = y$. Como f es inyectiva, tenemos que $x_1 = x_2$, en particular $x_1 \in X_1 \cap X_2$ y por lo tanto $y = f(x_1) \in f(X_1 \cap X_1)$.

       Recíprocamente, sea f una función que cumple $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$ y sean x_1, x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces, tenemos que $f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) \subseteq f(\{x_1\} \cap \{x_2\})$ y concluimos que $x_1 = x_2$ pues en otro caso, la última intersección sería vacía.

Polinomios.

16.
- $p(-1) =$
$$\begin{aligned} p(-1) &= (-1)^3 - 6(-1)^2 + 11(-1) - 6 \\ &= -1 - 6 - 11 - 6 \\ &= -24. \end{aligned}$$
- $p(0) =$
$$\begin{aligned} p(0) &= 0^3 - 6(0)^2 + 11(0) - 6 \\ &= 0 - 0 + 0 - 6 \\ &= -6. \end{aligned}$$
- $p(2) =$
$$\begin{aligned} p(2) &= 2^3 - 6(2)^2 + 11(2) - 6 \\ &= 8 - 24 + 22 - 6 \\ &= 0. \end{aligned}$$
- $p(1-t) =$
$$\begin{aligned} p(1-t) &= (1-t)^3 - 6(1-t)^2 + 11(1-t) - 6 \\ &= (1 - 3t + 3t^2 - t^3) - 6(1 - 2t + t^2) + 11(1-t) - 6 \\ &= 1 - 3t + 3t^2 - t^3 - 6 + 12t - 6t^2 + 11 - 11t - 6 \\ &= -t^3 - 3t^2 - 2t. \end{aligned}$$

17. Comencemos encontrando $p(x) + q(x)$ y $p(x) - q(x)$:
$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (x^3 + 6x^2 - x + 1) + (x^2 - 3x - 4) \\ &= x^3 + 6x^2 - x + 1 + x^2 - 3x - 4 \\ &= x^3 + 7x^2 - 4x - 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= (x^3 + 6x^2 - x + 1) - (x^2 - 3x - 4) \\ &= x^3 + 6x^2 - x + 1 - x^2 + 3x + 4 \\ &= x^3 + 5x^2 + 2x + 5. \end{aligned}$$

Ahora, multipliquemos estos dos polinomios para obtener $(p(x) + q(x))(p(x) - q(x))$:
$$\begin{aligned} &(p(x) + q(x))(p(x) - q(x)) \\ &= (x^3 + 7x^2 - 4x - 3)(x^3 + 5x^2 + 2x + 5) \\ &= x^6 + 12x^5 + 33x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 26x - 15. \end{aligned}$$

18. $p(x) = 4(x+1)(x-2)(x+3)$.

19. Notamos que $p\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ implica que $x = \frac{1}{2}$ es una raíz de $p(x)$. Utilizando la división sintética o el método de factorización, podemos factorizar $p(x)$ en la forma $(x - \frac{1}{2})(\ldots)$ para encontrar las raíces restantes.

    Realicemos la factorización:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2} \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 2x - 1). \end{aligned}$$

    Ahora, igualamos el segundo factor a cero para encontrar las restantes raíces:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x - 1 &= 0 \\ x^2 - x - \frac{1}{2} &= 0. \end{aligned}$$

    Resolvemos esta ecuación cuadrática utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

    En este caso, $a = 1$, $b = -1$, y $c = -\frac{1}{2}$. Sustituimos estos valores en la fórmula:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-\frac{1}{2})}}{2}.$$

    Simplificamos:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

    Por lo tanto, las raíces restantes son $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ y $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

20. $a = b = 1$ y $c = 0$.

CAPÍTULO 2

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Las ecuaciones lineales son fundamentales en muchas áreas de la ingeniería, desde la mecánica hasta la electrónica y la programación. Estas ecuaciones describen relaciones lineales entre variables, lo que significa que el valor de una variable es una combinación lineal de otras variables. Por ejemplo, en una ecuación lineal simple como $3x + 6y = 10$, el valor de x es una combinación lineal de y.

Sin embargo, en muchos casos, una sola ecuación lineal no es suficiente para describir una situación real. En cambio, se necesitan múltiples ecuaciones lineales para describir un problema con precisión. Cuando se tienen varias ecuaciones lineales con múltiples variables, se utilizan los sistemas de ecuaciones lineales para resolver el problema.

Los sistemas de ecuaciones lineales son conjuntos de ecuaciones lineales que se utilizan para describir una situación real. Los estudiantes de ingeniería deben estar familiarizados con el proceso de solución de sistemas de ecuaciones lineales para poder resolver problemas en sus respectivos campos. Por ejemplo, en la ingeniería eléctrica, los sistemas de ecuaciones lineales se utilizan para modelar circuitos complejos. En la ingeniería mecánica, los sistemas de ecuaciones lineales se utilizan para resolver problemas de movimiento y vibración en estructuras.

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales, se utilizan técnicas y herramientas matemáticas, como la eliminación Gaussiana y la matriz de coeficientes. El objetivo de este capítulo es tener una comprensión sólida de estas técnicas y herramientas.

Definición 2.1 *Se llama* ***ecuación lineal*** *en las incógnitas (o indetermindas)* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *a una ecuación de la forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde $a_1, a_2, \cdots a_n, b$ *son números reales dados.*

- El número a_j que multiplica a la incógnita x_j $(j = 1, \cdots, n)$ se llama **coeficiente** de la incógnita correspondiente.

- El número b se llama **término independiente** de la ecuación. Si $b = 0$ se dice que la ecuación es **homogénea**. En caso contrario, se dice que no es homogénea.

- Existe una notación más compacta para representar la misma ecuación lineal

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b.$$

- En el caso de una ecuación lineal con dos incógnitas, se usan tradicionalmente las letras x e y para denotar éstas. En el caso de tres incógnitas, se usan también x, y, z.

- Las potencias de las incógnitas son siempre menores o iguales que uno.

Ejemplo 2.1 *Las ecuaciones $3x_1 + 2x_2 = 0$ y $\sqrt{2}x_1 + 2x_2 = \frac{2}{3}$ son ecuaciones lineales en las incógnitas x_1, x_2. La primera de ellas homogénea y la segunda no homogénea. Mientras que la ecuación $3x_1^2 + 2x_2 = 1$ no es una ecuación lineal.*

Definición 2.2 *Se dice que $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n = \alpha_n$ (donde $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ son números reales determinados) es **solución de la ecuación** $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, si estos valores de la incógnitas satisfacen la ecuación, en el sentido de que sustituyendo estos valores en ella, la misma se reduce a una identidad, es decir, si*

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \cdots a_n\alpha_n = b.$$

A la solución $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n = \alpha_n$ de la ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, la representaremos con la n-upla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$. Al conjunto de todas las soluciones de la ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ le llamaremos **conjunto solución**.

Por ejemplo, para la ecuación $3x_1 = 6$ se tiene que $x = 2$ es solución, ya que $3(2) = 6$. Así como para la ecuación $x_1 + 3x_2 = 4$ se tiene que $x_1 = 1, x_2 = 1$ y $x_1 = 4, x_2 = 0$ son soluciones. En este caso diremos que la 2-upla $(1, 1)$ y la 2-upla $(4, 0)$ son soluciones de la ecuación $x_1 + 3x_2 = 4$. El conjunto solución de dicha ecuación viene dado por

$$\{(4 - 3x, x) : \ x \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo 2.2 *Ecuación lineal con una incógnita.*

Para la ecuación lineal $ax = b$, donde a y b son números reales y x es la incógnita, se presentan los siguientes casos:

1. *Si a es diferente de cero ($a \neq 0$), entonces la única solución de la ecuación es $x = b/a$.*

2. *Si a es igual a cero ($a = 0$), se distinguen dos casos adicionales según los valores de b:*

   - *Si b es igual a cero ($b = 0$), cualquier número real satisface la ecuación $0x = 0$. En este caso, el conjunto solución de la ecuación es $\mathbb{R}$ (el conjunto de todos los números reales).*

   - *Si b es diferente de cero ($b \neq 0$), no hay números reales que satisfagan la ecuación $0x = b$. En este caso, el conjunto solución de la ecuación es vacío.*

Definición 2.3 *Un* ***sistema*** *S de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_n$, se define como un conjunto de ecuaciones de la forma:*

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

los coeficientes a_{ij} y los términos independientes b_i con $0 \leq i \leq m$ y $0 \leq j \leq n$, son números reales conocidos.

El sistema anterior también puede escribirse en forma compacta como

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1, \cdots, m.$$

Definición 2.4 *Un sistema S de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_n$, se denomina* ***homogéneo*** *si tiene la forma:*

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

donde los coeficientes a_{ij}, con $0 \leq i \leq m$ y $0 \leq j \leq n$ son números reales conocidos.

Una **solución del sistema** S es una n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ de números reales tales que si se sustituye $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n = \alpha_n$, se verifican simultáneamente las m ecuaciones. Al **conjunto solución** del sistema S se le denota $Sol(S)$, y se refiere al conjunto de todas las soluciones de S. Resolver un sistema es determinar su conjunto solución. Si el sistema S es homogeneo, siempre posee al menos la solución trivial o nula $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$.

Ejemplo 2.3 *Consideremos el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 & = & 4 \end{cases}$$

Para determinar si la 3-upla $(3, -2, 2)$ es una solución de este sistema, sustituimos $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ y $x_3 = 2$ en las ecuaciones:

$$\begin{cases} 3 + 4(-2) + 3(2) & = & 1 \\ 3 - 3(-2) - 2(2) & = & 5 \\ 2(3) + 5(-2) + 4(2) & = & 4 \end{cases}.$$

Al realizar las operaciones, vemos que se cumplen simultáneamente las tres ecuaciones, por lo que la 3-upla $(3, -2, 2)$ es una solución del sistema.

Sin embargo, al evaluar la 3-upla $(3, 2, -2)$ *en las ecuaciones del sistema, obtenemos:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3+4(2)+3(-2) & = & 5 \neq 1 \\ 3-3(2)-2(-2) & = & 1 \neq 5 \\ 2(3)+5(2)+4(-2) & = & 8 \neq 4 \end{array}\right. .$$

Claramente, la 3-upla $(3, 2, -2)$ *no es una solución del sistema.*

Es importante destacar que las 3-uplas $(3, -2, 2)$ *y* $(3, 2, -2)$ *están formadas por los mismos números, pero la primera pertenece al conjunto solución del sistema mientras que la segunda no. Esto ilustra que las 3-uplas mencionadas en la definición del conjunto solución de un sistema son uplas ordenadas. Por lo tanto, al describir una 3-upla solución, convenimos que su primera entrada corresponde al valor que debe tomar la incógnita* x_1*, la segunda entrada corresponde al valor que debe tomar la incógnita* x_2*, y así sucesivamente.*

2.1. Clasificación de sistemas lineales.

I. Según el número de ecuaciones e incógnitas del sistema, se clasifica en sistema **cuadrado** si $m = n$, es decir, si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. Si $m \neq n$, se clasifica como sistema **rectangular**. En este último caso, si el sistema tiene más ecuaciones que incógnitas $(m > n)$ se denomina **sobredeterminado**. Si por el contrario, si tiene menos ecuaciones que incógnitas $(m < n)$, se denomina **subdeterminado**.

Ejemplo 2.4 *El sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+4x_2+3x_3 & = & 1 \\ x_1-3x_2-2x_3 & = & 5 \\ 2x_1+5x_2+4x_3 & = & 4 \end{array}\right.$$

es un sistema cuadrado de 3 *ecuaciones y* 3 *incógnitas. En cambio, el sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+3x_3 & = & 0 \\ x_1-3x_2-x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

es un sistema rectangular subdeterminado de 2 *ecuaciones y* 3 *incógnitas. Por último, el sistema*

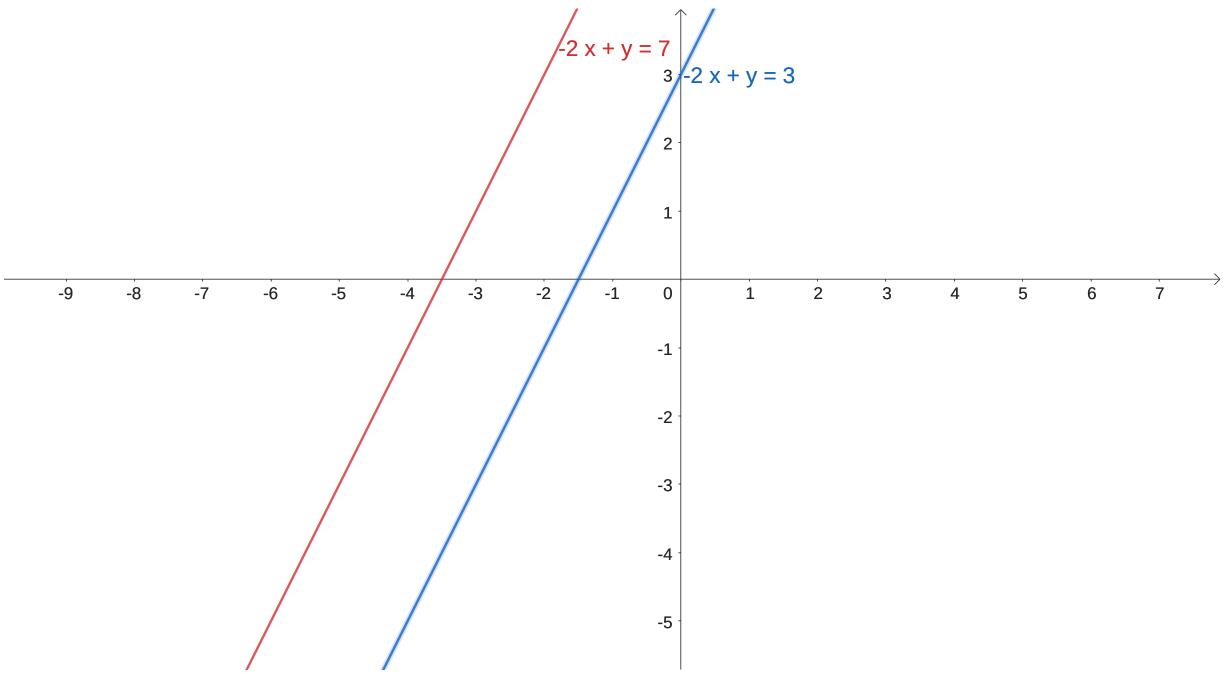
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+5x_2 & = & 2 \\ 9x_1-3x_2 & = & 6 \\ x_1+5x_2 & = & 5 \end{array}\right.$$

es un sistema rectangular sobredeterminado.

II. Según la cardinalidad del conjunto solución. Un sistema con al menos una solución se denomina sistema **compatible o consistente**. Si la solución es única, se lo denomina sistema **compatible determinado**. Si existe más de una solución se lo llama sistema **compatible indeterminado**. Un sistema sin solución se llama sistema **incompatible o inconsistente**.

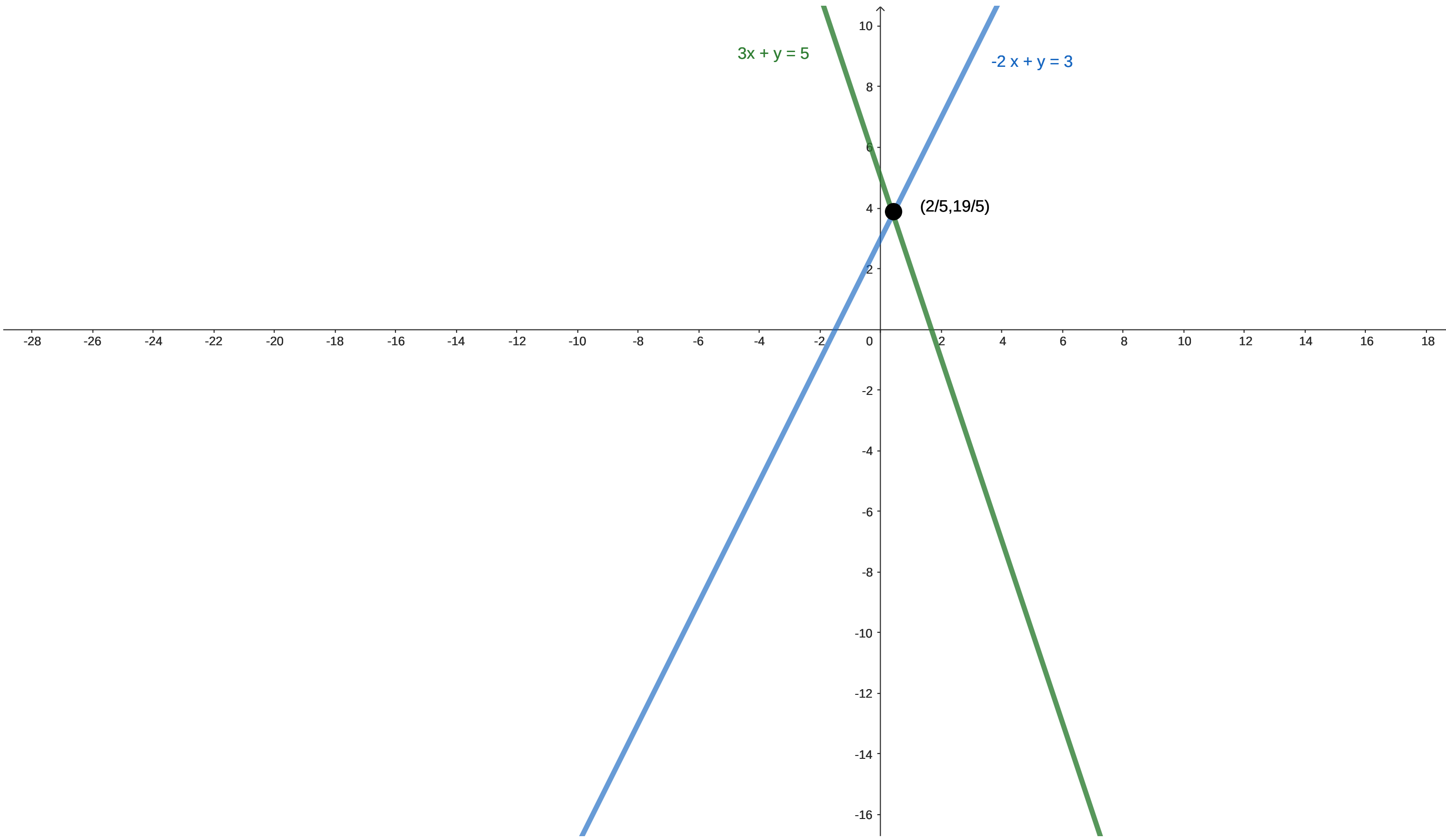
Ejemplo 2.5 *Una ecuación lineal* $ax+by = c$*, con dos incógnitas* x *e* y*, es posible interpretarla geométricamente como la ecuación cartesiana de una recta en el plano* $(\mathbb{R}^2)$ *(los valores de* a *y* b *se suponen no simultaneamente nulos). Entonces resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, es equivalente a considerar la posición relativa entre dos rectas en el plano. Para ello consideremos los siguientes casos:*

1. *Si dos rectas tienen la misma pendiente, entonces son paralelas. Por ejemplo, las rectas* $-2x + y = 3$ *y* $-2x + y = 7$ *son paralelas porque ambas tienen una pendiente igual a 2, en este caso el sistema formado por las mismas es incompatible, pues la cardinalidad del conjunto solución es cero.*



$$S = \begin{cases} -2x + y & = & 3 \\ -2x + y & = & 7 \end{cases}.$$

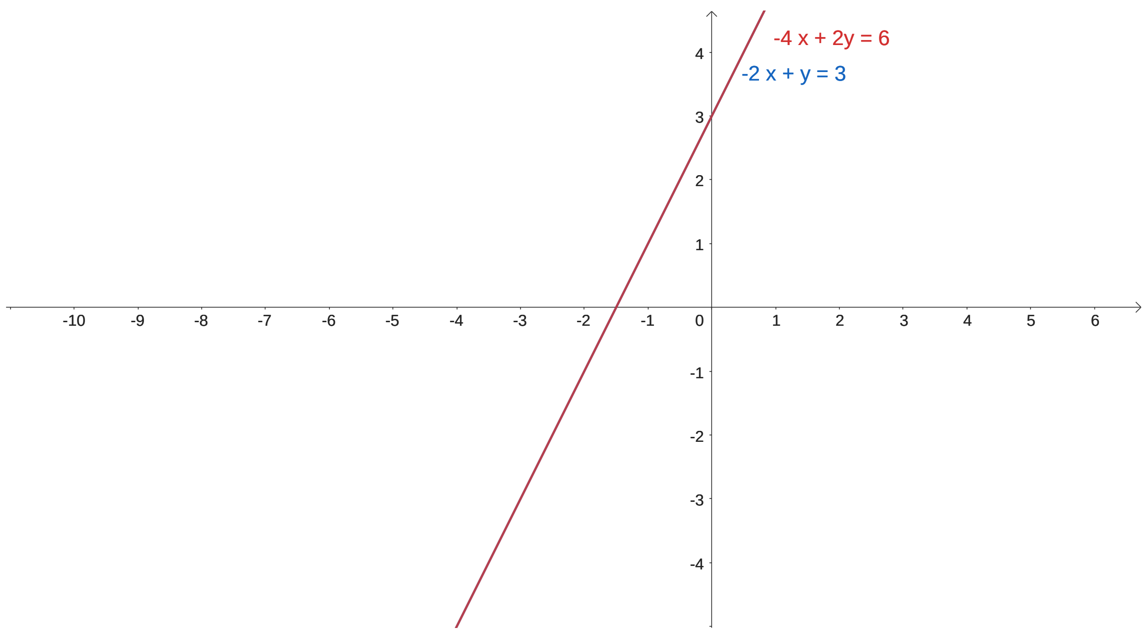
2. *Si dos rectas tienen pendientes diferentes, entonces son secantes. Por ejemplo, las rectas* $-2x + y = 3$ *y* $3x + y = 5$ *son secantes, en este caso el sistema determinado por las mismas es compatible determinado, la intersección de las mismas es* $(\frac{2}{5}, \frac{19}{5})$.



$$S = \begin{cases} -2x + y & = & 3 \\ 3x + y & = & 5 \end{cases}.$$

3. *Si dos rectas tienen la misma ecuación, entonces son coincidentes. Por ejemplo las rectas* $-2x + y = 3$ *y* $-4x + 2y = 6$ *son coincidentes, en este caso el sistema determinado por las misma es compatible indeterminado. El conjunto solución se puede describir por*

$$\{(x, 2x + 3) : \ x \in \mathbb{R}\}.$$



$$S = \begin{cases} -2x + y &= 3 \\ -4x + 2y &= 6 \end{cases}.$$

Observación 2.1 *Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo siempre es compatible. Puede ser: compatible determinado (la solución trivial es la única solución) o compatible indeterminado (el conjunto solución está formado por la solución trivial y al menos una solución no trivial).*

2.2. Sistemas equivalentes y transformaciones elementales.

Al estudiar sistemas de ecuaciones lineales, a menudo buscamos simplificarlos mediante transformaciones, manteniendo así su conjunto solución pero presentándolos de forma más sencilla. Para ello, introducimos el concepto de sistemas equivalentes.

Definición 2.5 *Dos sistemas de ecuaciones lineales con el mismo conjunto de incógnitas se denominan* ***equivalentes*** *si tienen el mismo conjunto solución.*

Dado un sistema de ecuaciones lineales por resolver, nuestro objetivo es transformarlo mediante operaciones algebraicas en las ecuaciones que lo componen, con dos propósitos fundamentales en mente: obtener un sistema más simple que el dado inicialmente y asegurar que el sistema transformado tenga el mismo conjunto solución que el original, es decir, que ambos sistemas sean equivalentes. Consideremos los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$S_1 = \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 18 \\ -x_1 & +3x_2 & & = -4 \\ 2x_1 & -5x_2 & +5x_3 & = 17 \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 18 \\ & x_2 & +3x_3 & = 14 \\ & & 2x_3 & = -5 \end{cases}$$

A simple vista, el sistema S_2 presenta una estructura notablemente más simple, lo que facilita un cálculo rápido de su conjunto solución. En contraste, el sistema S_1 no revela de manera inmediata cuál es su conjunto solución. No obstante, demostraremos más adelante que estos dos sistemas son, en realidad, equivalentes. La estructura peculiar de S_2, donde cada ecuación tiene exactamente una incógnita más que la siguiente, se asemeja a una escalera. Por esta razón, diremos que S_2 está en una **forma escalonada o escalerizado**. Además, mediante un proceso de **sustitución hacia atrás**, podemos determinar completamente el valor de todas las incógnitas en este caso. Al resolver la última ecuación, obtenemos $x_3 = -5/2$; luego sustituimos este valor en la segunda ecuación y encontramos que $x_2 = 43/2$. Finalmente, con los valores de x_3 y x_2 encontrados, regresamos a la primera ecuación y obtenemos $x_1 = 137/2$. Por lo tanto, el conjunto solución de S_2 consta de una única 3-upla, es decir,

$$Sol(S_2) = \{(\tfrac{-5}{2}, \tfrac{43}{2}, \tfrac{137}{2})\}.$$

Ahora, nuestro propósito es definir operaciones algebraicas o transformaciones que nos permitan modificar el sistema S_1 y llevarlo a la forma escalonada del sistema S_2.

Definición 2.6 *Llamaremos* ***transformaciones elementales*** *a cualquiera de las siguientes operaciones efectuadas en las ecuaciones de un sistema lineal con m ecuaciones y n incógnitas:*

1. *Cambiar el orden de dos ecuaciones (permutar dos ecuaciones).*
2. *Multiplicar una o más ecuaciones por una constante distinta de cero (cambio de escala de los coeficientes de las ecuaciones).*
3. *Sumar (o restar) a una ecuación particular el múltiplo de otra ecuación del sistema.*

Para representar cada ecuación en un sistema de ecuaciones lineales, utilizaremos (de manera conveniente) la letra E. De esta forma, para el sistema:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Tendremos la siguiente correspondencia para $1 \leq i \leq m$:

$$S = \begin{cases} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_m \end{cases} \qquad E_i := a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

Por lo tanto, la notación que emplearemos para describir cada operación es la siguiente:

1. Intercambiar el orden de dos ecuaciones. ($E_i \leftrightharpoons E_j$)
2. Multiplicar una o más ecuaciones por una constante $\alpha \neq 0$. ($E_i \leftharpoondown \alpha E_i$). No se permite multiplicar una ecuación por 0, ya que esto podría alterar el conjunto solución.
3. Sumar (o restar) a una ecuación particular el múltiplo de otra ecuación del sistema. ($E_i \leftharpoondown E_i + \alpha E_j$). Sumar un múltiplo de una ecuación a sí misma es, obviamente, equivalente a multiplicarla por una constante.

Proposición 2.1 *Si se aplica una transformación elemental a un sistema S de ecuaciones lineales, el sistema resultante S' es equivalente al sistema original.*

Demostración: Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

Demostraremos que al realizar cualquiera de las tres operaciones elementales mencionadas, el conjunto solución no cambia. Por lo tanto, dividiremos la prueba en tres partes:

1. **Intercambiar el orden de dos ecuaciones.** Es evidente que si se intercambia la posición de dos ecuaciones en S, el nuevo sistema tendrá las mismas soluciones que el sistema original.

2. **Multiplicar una ecuación por una constante** $\alpha \neq 0$. Supongamos que la i-ésima ecuación se multiplica por $\alpha \neq 0$, quedando entonces el sistema

$$S' = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{(i-1)1}x_1 + a_{(i-1)2}x_2 + \cdots + a_{(i-1)n}x_n = b_{i-1} \\ \alpha a_{i1}x_1 + \alpha a_{i2}x_2 + \cdots + \alpha a_{in}x_n = \alpha b_i \\ a_{(i+1)1}x_1 + a_{(i+1)2}x_2 + \cdots + a_{(i+1)n}x_n = b_{i+1} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Para comprobar la equivalencia entre los sistemas S y S', es necesario demostrar que comparten el mismo conjunto solución. Es decir, debemos probar que $Sol(S) = Sol(S')$. Para establecer esta igualdad, llevaremos a cabo un enfoque de doble contención. En otras palabras, demostraremos tanto $Sol(S) \subseteq Sol(S')$ como $Sol(S') \subseteq Sol(S)$.

- $Sol(S) \subseteq Sol(S')$: Supongamos que la n-upla $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ es solución del sistema S. Esto es

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = b_m \end{cases}$$

  Es importante notar que los sistemas S y S' únicamente difieren en su i-ésima ecuación. Por lo tanto, al multiplicar la ecuación $a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n = b_i$ por la constante α, obtenemos $\alpha a_{i1}c_1 + \alpha a_{i2}c_2 + \cdots + \alpha a_{in}c_n = \alpha b_i$. Esto significa que $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ es una solución del sistema S'.
- $Sol(S') \subseteq Sol(S)$: Queda a cargo del lector.

3. **Sumar a una ecuación el múltiplo de otra ecuación del sistema.** Supongamos que sustituimos la i-ésima ecuación del sistema S por ella misma más α veces la la j-ésima ecuación del sistema, quedando entonces el sistema

$$S' = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{(i-1)1}x_1 + a_{(i-1)2}x_2 + \cdots + a_{(i-1)n}x_n = b_{i-1} \\ (a_{i1} + \alpha a_{j1})x_1 + (a_{i2} + \alpha a_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in} + \alpha a_{jn})x_n = b_i + \alpha b_j \\ a_{(i+1)1}x_1 + a_{(i+1)2}x_2 + \cdots + a_{(i+1)n}x_n = b_{i+1} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Notemos que los sistemas S y S' difieren solamente al tener en el lugar i-ésimo diferentes ecuaciones. Al igual que en el caso anterior, debemos probar que $Sol(S) = Sol(S')$.

- $Sol(S) \subseteq Sol(S')$: Supongamos que la n-upla $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ es solución del sistema S. Esto es

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n & = & b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n & = & b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n & = & b_m \end{cases}$$

  En particular, al verificarse la i-ésima y la j-ésima ecuación se tiene que

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n = b_i \text{ y } a_{j1}c_1 + a_{j2}c_2 + \cdots + a_{jn}c_n = b_j$$

  Por lo tanto,

$$(a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n) + (\alpha a_{j1}c_1 + \alpha a_{j2}c_2 + \cdots + \alpha a_{jn}c_n) = b_i + \alpha b_j$$

$$(a_{i1} + \alpha a_{j1})c_1 + (a_{i2} + \alpha a_{j2})c_2 + \cdots + (a_{in} + \alpha a_{jn})c_n = b_i + \alpha b_j$$

  de donde concluimos que $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ es una solución del sistema S'.

- $Sol(S') \subseteq Sol(S)$: Queda a cargo del lector.

Ejemplo 2.6 *Retomando el análisis de los sistemas de ecuaciones lineales S_1 y S_2, demostraremos ahora su equivalencia. A continuación, presentamos ambos sistemas:*

$$S_1 = \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 18 \\ -x_1 & +3x_2 & & = -4 \\ 2x_1 & -5x_2 & +5x_3 & = 17 \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 18 \\ & x_2 & +3x_3 & = 14 \\ & & 2x_3 & = -5 \end{cases}$$

Es suficiente hallar una secuencia finita de transformaciones elementales que convierta el sistema S_1 en S_2. Entonces, de acuerdo con la proposición previa, ambos sistemas serán equivalentes.

$$S_1 = \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 18 \\ -x_1 & +3x_2 & & = -4 \\ 2x_1 & -5x_2 & +5x_3 & = 17 \end{cases} \quad (E_2 \leftharpoondown E_2 + E_1) \Rightarrow \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 18 \\ & x_2 & +3x_3 & = 14 \\ 2x_1 & -5x_2 & +5x_3 & = 17 \end{cases} \quad (E_3 \leftharpoondown E_3 + (-2)E_1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 18 \\ & x_2 & +3x_3 & = 14 \\ & -x_2 & -x_3 & = -19 \end{cases} \quad (E_3 \leftharpoondown E_3 + E_2) \Rightarrow S_2 = \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 18 \\ & x_2 & +3x_3 & = 14 \\ & & 2x_3 & = -5 \end{cases}.$$

2.2.1. Aplicación: Ajuste polinomial.

El ajuste de curvas polinómicas es una técnica utilizada en estadística y análisis numérico para encontrar una función polinómica que se ajuste a un conjunto de datos. La idea es encontrar una curva (gráfica de un función polinómica) que pase cerca de los puntos de datos, y que pueda ser utilizada para hacer predicciones sobre los valores de la variable dependiente para valores de la variable independiente que no están presentes en los datos originales.

Supongamos que tenemos un conjunto de datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, donde cada y_i es el valor de la variable dependiente correspondiente al valor de la variable independiente x_i. Queremos encontrar una función polinómica $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ de grado $n-1$ (o menor) que se ajuste a los datos dados.

Para resolver el problema y encontrar el valor de los coeficientes del polinomio $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$, consideremos el sistema de n ecuaciones y n incógnitas $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$.

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_{n-1}x_1^{n-1} & = & y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_{n-1}x_2^{n-1} & = & y_2 \\ \vdots & & \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_{n-1}x_n^{n-1} & = & y_n \end{cases}$$

Ejemplo 2.7 *1. Deseamos determinar el polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ cuya gráfica pasa por los puntos $A = (1, 5)$, $B = (3, 2)$ y $C = (4, 6)$. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas a_0, a_1 y a_2 (obtenido al evaluar las coordenadas de x dadas en el polinomio $a_0 + a_1x + a_2x^2$):*

$$\begin{cases} a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 & = 5 \\ a_0 + a_1(3) + a_2(3)^2 & = 2 \\ a_0 + a_1(4) + a_2(4)^2 & = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 & = 5 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 & = 2 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 & = 6 \end{cases}$$

Al aplicar transformaciones elementales al sistema anterior, obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{cases} a_0 & & & = 12 \\ & a_1 & & = -\frac{53}{6} \\ & & a_2 & = \frac{11}{6} \end{cases}.$$

Por lo tanto, el polinomio buscado es:

$$p(x) = 12 - \frac{53}{6}x + \frac{11}{6}x^2.$$

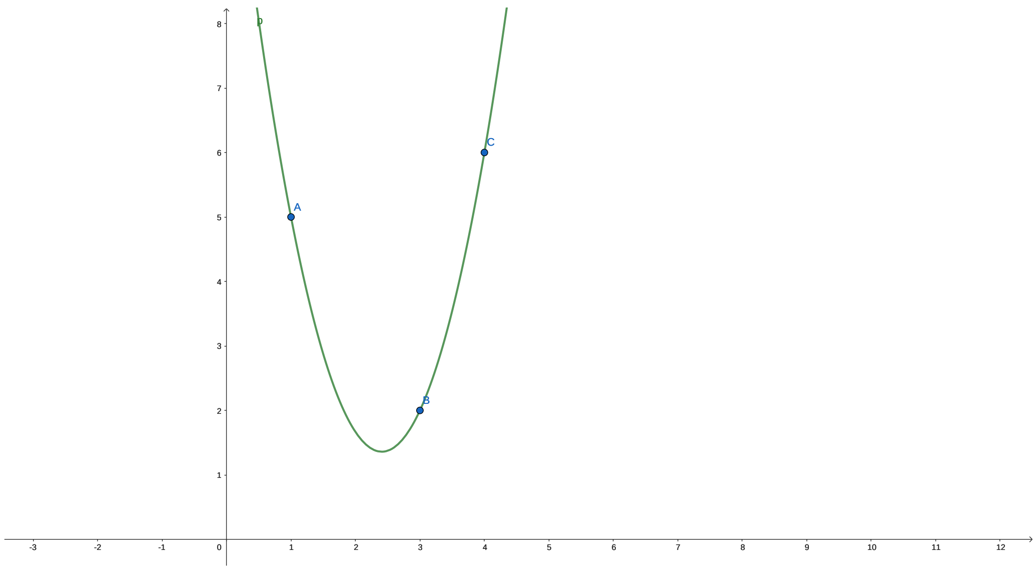
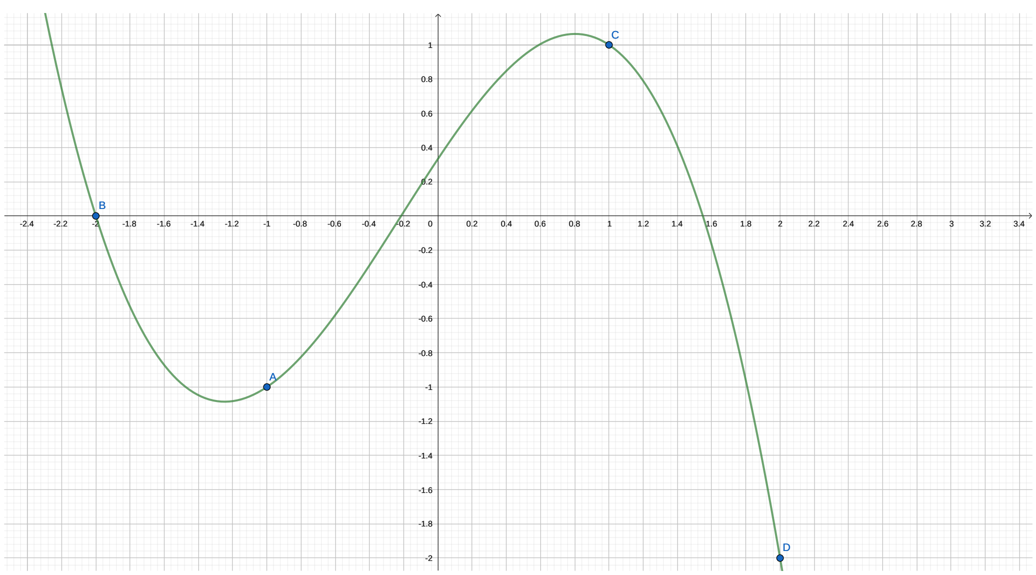


Figura 2.1: $p(x) = 12 - \frac{53}{6}x + \frac{11}{6}x^2$.

2. ***Ejercicio 8 múltiple opción. Examen GAL1. Julio 2019.*** *La gráfica del polinomio* $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *(*$a, b, c, d \in \mathbb{R}$*) está dada por*



Después de haber determinado los coeficientes a*,* b*,* c*, y* d*, indica la opción correcta:*

(A) $a+b-c-d=\frac{8}{3}$.
(B) $a+b-c-d=-\frac{8}{3}$.
(C) $a+b-c-d=\frac{4}{3}$.
(D) $a+b-c-d=-\frac{4}{3}$.

Solución: *A partir de la gráfica del polinomio, obtenemos las condiciones* $p(-1)=-1$, $p(-2)=0$, $p(1)=1$ *y* $p(2)=-2$ *para el polinomio buscado, lo que nos permite plantear el siguiente sistema:*

$$\left\{\begin{array}{ccccc} -a & +b & -c & +d & =-1 \\ -8a & +4b & -2c & +d & =0 \\ a & +b & +c & +d & =1 \\ 8a & +4b & +2c & +d & =-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} -a & +b & -c & +d & =-1 \\ & -4b & +6c & -7d & =8 \\ & & 3c & -\frac{3}{2}d & =4 \\ & & & -6d & =-2 \end{array}\right.$$

De donde obtenemos:

$$a=-\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{3}, c=\frac{3}{2}, d=\frac{1}{3}$$

Por lo tanto,

$$a+b-c-d=-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}=-\frac{8}{3}.$$

La opción correcta es la B.

2.3. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices.

Con el fin de facilitar los cálculos involucrados en los procedimientos previamente expuestos, resulta conveniente introducir el concepto de matriz. En esencia, una matriz se puede visualizar como una tabla bidimensional con filas y columnas en la cual es posible organizar objetos matemáticos. En el contexto de nuestro enfoque, presentamos la siguiente definición.

Una **matriz** de m filas y n columnas es una disposición rectangular de números reales, representada de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Se denota a las matrices con letras mayúsculas y a sus elementos con letras minúsculas. Por ejemplo, la matriz A[1] se escribe como:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Otra notación frecuentemente utilizada para denotar matrices es

$$A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m, \\ j=1,\dots,n}}.$$

[1]Es importante destacar que la disposición rectangular presentada no es en sí misma una matriz, sino más bien una representación visual de una matriz. De manera precisa, una matriz A sobre los números reales es una función que opera en el conjunto de pares ordenados (i,j), donde $1\leq i\leq m$ y $1\leq j\leq n$, y asigna valores en el conjunto de números reales.

Esta notación presenta la ventaja de permitirnos identificar claramente la ubicación de cada elemento en la matriz. De esta manera, el elemento a_{ij} se sitúa en la fila i y la columna j de la matriz A.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|cc} & & a_{1j} & & \\ & & \vdots & & \\ \hline a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \hline & & \vdots & & \\ & & a_{mj} & & \end{array}\right) \quad i-\text{ésima fila.}$$

$$j-\text{ésima columna.}$$

Decimos que A es una matriz de tamaño m por n, o bien es un matriz de $m \times n$. Esta matriz cuenta con m filas y n columnas. Por ejemplo, la primera columna se representa como:

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Asimismo, la tercera fila se denota como $A_3 = (a_{31}, a_{32}, \cdots, a_{3n})$. Es importante observar que empleamos un superíndice para referirnos a las columnas de la matriz y un subíndice para indicar las filas respectivas. Por consiguiente, en ciertas ocasiones, haremos referencia a la matriz A utilizando la siguiente notación:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \text{ en función de sus filas, o en función de sus columnas por } A = (A^1, A^2, \cdots, A^n).$$

En este contexto, las filas de una matriz se pueden considerar como n-uplas, mientras que las columnas como m-uplas verticales. Una m-upla vertical también es conocida como un vector columna[2]. Notamos que una n-upla $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ es una matriz de $1 \times n$. Por otro lado, un vector columna

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

es una matriz de $m \times 1$.

Ejemplo 2.8 *La siguiente es una matriz de* 2×3*:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tiene dos filas y tres columnas. Las filas son $A_1 = (1, 3, 4)$ *y* $A_2 = (0, -1, 2)$*. Las columnas son*

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

[2] Profundizaremos sobre el tema de vectores en el capítulo de Geometría.

Definición 2.7 *Diremos que dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son **iguales** si satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Tienen el mismo tamaño.*
2. *Cumplen la igualdad $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.*

Finalmente, denotaremos al conjunto de todas las matrices de tamaño $m \times n$ y coeficientes reales por $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$.

2.3.1. Matriz de coeficientes asociada a sistemas de ecuaciones lineales.

A cada sistema de m ecuaciones lineales con n-incógnitas

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

le podemos asociar una matriz A, conocida como la **matriz asociada del sistema** S, de tamaño $m \times n$. Esta matriz se construye de manera que sus coeficientes sean precisamente los mismos que los del sistema S. Es decir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Es importante notar que la matriz anterior contiene únicamente los coeficientes que acompañan a cada una de las variables o incógnitas en el sistema de ecuaciones. Sin embargo, para incorporar también la información de los términos independientes, se construye lo que se conoce como la **matriz ampliada del sistema** S, denotada como $(A \mid b)$. Esta matriz tiene un tamaño de $m \times (n+1)$, a diferencia de la matriz anterior que era de tamaño $m \times n$. La nueva columna que se agrega corresponde precisamente a los términos independientes del sistema.

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Ahora, considerando que las matrices son representaciones de sistemas de ecuaciones lineales, podemos hacer una correspondencia directa entre las operaciones elementales definidas previamente para las ecuaciones del sistema y operaciones elementales aplicadas a las filas de la matriz, que denotaremos como F_i para $0 \leq i \leq m$. Estas operaciones se expresan de la siguiente manera:

1. Intercambiar dos filas de la matriz. $(F_i \leftrightharpoons F_j)$
2. Multiplicar una fila por una constante α distinta de cero. $(F_i \leftharpoondown \alpha F_i)$.
3. Sustituir una fila por la misma fila sumada a α veces otra fila de la matriz. $(F_i \leftharpoondown F_i + \alpha F_j)$.

De esta manera, las operaciones realizadas en las ecuaciones del sistema se corresponden de manera directa con operaciones aplicadas a las filas de la matriz asociada. Si deseamos establecer una formulación más rigurosa, una operación elemental de filas se define como un tipo particular de función o regla ε que asocia a cada matriz de tamaño $m \times n$, denotada como A, otra matriz del mismo tamaño, $\varepsilon(A)$.

$$\begin{gathered}\varepsilon : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n} \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}. \\ A \to \varepsilon(A)\end{gathered}$$

De manera específica, podemos describir esta función ε para cada uno de los tres casos anteriores del siguiente modo:

1. Intercambiar las filas r-ésima y s-ésima de A:

$$\varepsilon(A)_{ij} = a_{ij} \text{ si } i \neq r \text{ y } s,\ \varepsilon(A)_{rj} = a_{sj},\ \varepsilon(A)_{sj} = a_{rj}.$$

2. Multilplicar la fila r-ésima de A por una constante α distinta de cero:

$$\varepsilon(A)_{ij} = a_{ij} \text{ si } i \neq r,\ \varepsilon(A)_{rj} = \alpha a_{rj}.$$

3. Sustituir la r-ésima fila de A por la misma fila sumada a α veces la s-ésima fila de la matriz.

$$\varepsilon(A)_{ij} = a_{ij} \text{ si } i \neq r,\ \varepsilon(A)_{rj} = a_{rj} + \alpha a_{sj}.$$

Cada vez que realizamos una operación elemental en una matriz A, podemos revertirla aplicando una operación del mismo tipo. En otras palabras, para cada operación elemental de filas realizada en una matriz A, existe una operación elemental inversa del mismo tipo que nos permite restaurar la matriz original.

Definición 2.8 *Dos matrices con coeficientes reales de tamaño $m \times n$, A y B, se dicen* ***equivalentes por filas*** *si es posible transformar A en B mediante una sucesión finita de operaciones elementales de filas.*

Dejamos al lector interesado verificar lo siguiente: cada matriz es equivalente por filas a sí misma; si B es equivalente por filas a A, entonces A es equivalente por filas a B; si B es equivalente por filas a A y C es equivalente por filas a B, entonces C es equivalente por filas a A. En otras palabras, la equivalencia por filas es una relación de equivalencia pues cumple con las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad (Ver capítulo 1. Preliminares).

Ejemplo 2.9 *Para ilustrar este concepto, consideremos la siguiente matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si aplicamos la operación elemental de sustituir la segunda fila por ella misma más 3 veces su primera fila, obtenemos la siguiente matriz:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso, la matriz B_1 es equivalente a la matriz A. Ahora, si multiplicamos la segunda fila de B_1 por -1, obtenemos otra matriz equivalente:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -10 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz B_2 es equivalente a la matriz B_1 y por lo tanto equivalente a A.

A continuación, presentaremos un algoritmo que permite resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando la notación matricial para representar dicho sistema. El objetivo es realizar operaciones elementales sobre la matriz ampliada del sistema con el propósito de simplificarla, de manera similar a como se realiza la eliminación de incógnitas en el sistema de ecuaciones lineales. Con este fin, proporcionaremos una definición formal del tipo de matriz al que aspiramos llegar en el proceso.

Definición 2.9 *Se define como* ***matriz escalonada*** *a aquella que satisface las siguientes condiciones:*

1. *Todas las filas, excepto posiblemente la primera, comienzan con una secuencia de ceros.*
2. *Cada fila contiene al menos un cero más al principio que la fila inmediatamente superior.*

También llamremos a una matriz ***escalonada reducida*** *si, además de satisfacer las dos condiciones previamente mencionadas, cumple con lo siguiente:*

1. *El primer elemento no nulo de cada fila es igual a 1.*
2. *En la columna correspondiente al primer elemento no nulo de cada fila, todas las demás entradas son nulas.*

Ejemplo 2.10 *Las siguientes matrices se encuentra en la forma escalonada:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mientras que las siguientes matrices se encuentran en forma escalonada reducida:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 2.10 *Un sistema de ecuaciones lineales se considera* ***escalonado*** *si su matriz de coeficientes tiene forma escalonada. Del mismo modo, se establece la definición de* ***sistema escalonado reducido****.*

2.3.2. El método de eliminación Gaussiana.

El procedimiento que emplea operaciones elementales sobre las filas para transformar cualquier sistema lineal en un sistema escalonado por filas se conoce como el **Método de Eliminación Gaussiana** o **Método de Reducción por Filas**[3].

Las ideas fundamentales de este método ya han sido discutidas en secciones anteriores; ahora solo resta organizarlas de manera coherente. Cuando nos encontramos con un sistema de ecuaciones lineales del cual deseamos determinar las soluciones, el primer paso consiste en escribir la matriz aumentada del sistema y, a continuación, aplicar operaciones elementales sobre sus filas para llevarla a su forma escalonada reducida. En este punto, es relevante justificar la validez de este procedimiento. Así, el sistema representado por esta nueva matriz tendrá las mismas soluciones que el sistema original, pero con una estructura más manejable para su resolución.

[3]También conocido como el método de eliminación de Gauss-Jordan, denominado en honor a Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan. Algunos casos especiales de este método, presentados sin demostración, fueron utilizados por los chinos tres siglos antes de Cristo. Gauss lo incorporó en el marco del método de mínimos cuadrados, siendo de gran utilidad en la resolución de diversos problemas prácticos, como la determinación de órbitas astronómicas.

Ahora procederemos a demostrar, en primer lugar, que cualquier matriz dada puede ser transformada a su forma escalonada por filas mediante un número finito de operaciones elementales de filas. Este resultado establecerá las bases para un algoritmo efectivo en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Proposición 2.2 *Toda matriz de tamaño $m \times n$ con coeficientes reales es equivalente por filas a una matriz escalonada por filas después de aplicarle un número finito de operaciones elementales por fila.*

Demostración: Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de tamaño $m \times n$ con coeficientes reales. Sin perder generalidad, podemos asumir que la primera columna tiene al menos una entrada no nula. Además, podemos reorganizar las filas de la matriz A de tal manera que $a_{11} \neq 0$.

Consideremos los índices r tales que $2 \leq r \leq m$ y $a_{r1} \neq 0$. Nuestro objetivo es convertir todos los elementos no nulos de la primera columna (excepto el primero) en ceros. Para lograr esto, restamos a la fila r-ésima la fila 1 multiplicada por el escalar a_{r1}/a_{11}.

Obteniendo la matriz con la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^* & \dots & a_{2n}^* \\ 0 & a_{32}^* & \dots & a_{3n}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^* & \dots & a_{mn}^* \end{pmatrix}.$$

En el siguiente paso, nuestro objetivo es obtener una nueva matriz con las entradas de la segunda columna, salvo quizás las dos primeras, reducidas a ceros. Para lograr esto, repetimos el procedimiento descrito anteriormente en la matriz resultante de eliminar la primera fila y la primera columna.

Es importante notar que la matriz obtenida al eliminar la primera fila y la primera columna tiene dimensiones $(m-1) \times (n-1)$. Denotaremos esta matriz como A^*.

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{22}^* & \dots & a_{2n}^* \\ a_{32}^* & \dots & a_{3n}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m2}^* & \dots & a_{mn}^* \end{pmatrix}.$$

Si todos los elementos de la primera columna de la matriz A^* son ceros, podemos omitir esta columna y proceder a considerar la siguiente. Sin embargo, si algún elemento en la primera columna de A^* es distinto de cero, podemos suponer que es a_{22}^* después de reorganizar las filas correspondientemente. Esto nos asegura que, siguiendo el procedimiento ya descrito, podemos transformar todos los elementos no nulos que se encuentran debajo de a_{22}^* en ceros.

Finalmente, es evidente que después de un número finito de pasos se obtendrá una matriz escalonada por filas equivalente a A.

Observación 2.2 *La transformación de una matriz en una matriz escalonada a través de operaciones elementales por fila se conoce como el Método de Gauss. Por otro lado, la conversión de una matriz en una matriz escalonada reducida se denomina Método de Gauss-Jordan.*

Definición 2.11 *Si E es una matriz escalonada el **número de escalones** de E es la cantidad de filas no nulas.*

Ejemplo 2.11 *Encontraremos la forma escalonada de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}.$$

Para ello realizamos las siguientes operaciones por filas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix} F_2 \leftharpoondown F_2 - (6)F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix} F_3 \leftharpoondown F_3 - (11)F_1 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & -10 & -20 & -30 & -40 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix} F_4 \leftharpoondown F_4 - (16)F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & -10 & -20 & -30 & -40 \\ 0 & -15 & -30 & -45 & -60 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix} F_5 \leftharpoondown F_5 - (21)F_1 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & -10 & -20 & -30 & -40 \\ 0 & -15 & -30 & -45 & -60 \\ 0 & -20 & -40 & -60 & -80 \end{pmatrix}.$$

Procedemos ahora sobre los elementos de la segunda columna

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & -10 & -20 & -30 & -40 \\ 0 & -15 & -30 & -45 & -60 \\ 0 & -20 & -40 & -60 & -80 \end{pmatrix} F_3 \leftharpoondown F_3 + (-2)F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & -30 & -45 & -60 \\ 0 & -20 & -40 & -60 & -80 \end{pmatrix} F_4 \leftharpoondown F_4 + (-3)F_2 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & -40 & -60 & -80 \end{pmatrix} F_5 \leftharpoondown F_5 + (-4)F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hemos encontrado una forma escalonada para la matriz del ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Continuando con las operaciones elementales sobre las filas de esta matriz, como por ejemplo multiplicar la segunda fila por $-\dfrac{1}{5}$, obtenemos la siguiente forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta también representa una forma escalonada de la matriz original. Por lo tanto, podemos concluir que la forma escalonada de una matriz no es única. Sin embargo la forma escalonada reducida de ambas matrices es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto se resume y expone de un modo más general en la siguiente observación.

- Si E es una matriz escalonada y E' es una matriz reducida equivalente el número de escalones de ambas es el mismo.
- La forma escalonada de una matriz no es única sin embargo su forma reducida sí lo es. Por lo tanto, la cantidad de escalones de todas las formas escalonadas de una misma matriz coinciden.

La matriz del ejemplo previo puede ser considerada como un caso particular del siguiente

Ejemplo 2.12 *Para $n \geq 3$, busquemos la forma escalonada y determinemos el número de escalones de la siguiente matriz de tamaño $n \times n$:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & n^2 \end{pmatrix}.$$

Notemos que para el caso $n = 5$ obtenemos la matriz del ejemplo anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}.$$

Comenzaremos el proceso de obtener la forma escalonada al transformar en cero las entradas de la primera columna. Para lograr esto, multiplicaremos la primera fila de la matriz por $(i-1)n+1$ y restarla a la i-ésima fila para cada $2 \leq i \leq n$.

$$\textit{Por ejemplo para } i = 2 \textit{ hacemos } F_2 \leftharpoondown F_2 - (n+1)F_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & \cdots & n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & -n & -2n & \dots & -(n-1)n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & \cdots & n^2 \end{pmatrix}.$$

Procedemos con las restantes filas y obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & -n & -2n & \dots & -1(n-1)n \\ 0 & -2n & -4n & \dots & -2(n-1)n \\ 0 & -3n & -6n & \dots & -3(n-1)n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -(n-1)n & -2(n-1)n & \cdots & -(n-1)(n-1)n \end{pmatrix}.$$

Continuaremos realizando operaciones elementales en la matriz anterior para lograr obtener ceros en la segunda columna. Para lograr esto, podemos multiplicar la segunda fila de la matriz por $(i-1)$ y restarla a la i-ésima fila para cada $3 \leq i \leq n$.

Por ejemplo para $i = 3$ hacemos $F_2 \leftharpoondown F_2 - (n+1)F_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & -n & -2n & \dots & -1(n-1)n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -3n & -6n & \dots & -3(n-1)n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -(n-1)n & -2(n-1)n & \cdots & -(n-1)(n-1)n \end{pmatrix}.$$

Procedemos con las restantes filas y obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & -n & -2n & \dots & -1(n-1)n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Concluimos el proceso, ya que podemos observar que la matriz resultante está en su forma escalonada. Siendo 2 su número de escalones.

Definición 2.12 *Para una matriz M con coeficientes reales, definimos el* ***rango*** *de M como la cantidad de escalones presentes en su forma escalonada, y lo denotamos como $Rg(M)$.*

Observación 2.3 *Podemos resumir y enumerar algunas observaciones relevantes hasta el momento.*

1. *Todas las formas escalonadas que se obtienen a aplicar el Método de Gauss a una matriz A tienen el mismo rango.*

2. Para cualquier sistema de ecuaciones lineales

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

- *Siempre es posible encontrar un sistema equivalente en forma escalonado. Además, existe una forma escalonada reducida equivalente para dicho sistema.*
- *En caso de que la forma escalonada por filas de la matriz ampliada incluya una fila de la forma* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \mid & b \end{pmatrix}$ *se pueden considerar las siguientes situaciones:*
  a) *Si $b = 0$, esta fila carece de relevancia en el sistema y, por lo tanto, puede ser omitida.*
  b) *Si $b \neq 0$, el sistema S es incompatible, ya que no existe conjunto de números reales que satisfaga la ecuación*
  $$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$$
- *Si el sistema S es subdeterminado, lo que significa que el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas ($m < n$), existen dos posibilidades: el sistema puede ser compatible indeterminado o incompatible.*
- *Vamos a aplicar lo mencionado previamente al caso de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, es decir, un sistema en el que los términos independientes b_i son todos iguales a 0 para $1 \leq i \leq m$. En tal situación, el sistema S siempre es compatible, ya que tiene la solución trivial $(0, 0, \ldots, 0)$.*

  Supongamos, además, que el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas, es decir, $m < n$. En este caso, el sistema S no solo tendrá la solución trivial, sino que también tendrá soluciones no triviales, en las cuales al menos una de las incógnitas (y posiblemente más) tomará valores diferentes de cero. Esto implica que el sistema tiene una infinidad de soluciones distintas a la trivial. En otras palabras, el sistema será compatible indeterminado.

Ejemplo 2.13 ***Sistemas de ecuaciones lineales dependientes de uno o más parámetros.*** *Otro tipo de problema que puede resolverse de manera efectiva utilizando el método de escalerización es el siguiente.*

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones en el cual existen parámetros indeterminados en los coeficientes o en los términos independientes del sistema. En esta situación, es posible investigar cómo se comportan las soluciones del sistema en función de estos parámetros.

1. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Hagamos un ánalisis de las soluciones del sistema S_λ un función del parámetro λ.

$$S_\lambda = \begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ x + \lambda y = 1. \end{cases}$$

Consideremos la matriz ampliada $(A_\lambda \mid b)$ asociada al sistema S_λ y buscamos la forma escalonada de dicha matriz

$$(A_\lambda \mid b) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \end{array}\right) (F_2 \rightleftharpoons F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{array}\right) (F_2 \leftharpoondown F_2 - \lambda F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & -\lambda \end{array}\right).$$

Consideremos dos casos según el valor de $1 - \lambda^2$:

- *Cuando* $1-\lambda^2 \neq 0$ *(es decir, para* $\lambda \neq \pm 1$*): En esta situación, podemos encontrar el valor de* y *a partir de la primera ecuación:*
$$y = \frac{-\lambda}{1-\lambda^2}.$$
Sustituyendo este valor de y *en la primera ecuación, podemos hallar el valor de la variable* x*:*
$$x = 1-\lambda y = 1-\lambda\frac{-\lambda}{1-\lambda^2} = 1+\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} = \frac{1}{1-\lambda^2}.$$
Concluimos que el sistema S_λ *es compatible y determinado para cada valor de* λ *que no sea* ± 1*. En este caso, el conjunto solución está formado por un único elemento:*
$$Sol(S_\lambda) = \{(\frac{1}{1-\lambda^2}, \frac{-\lambda}{1-\lambda^2})\}.$$
- *Cuando* $1-\lambda^2 = 0$ *(es decir, para* $\lambda = \pm 1$*), el sistema se transforma en:*
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{array}\right) \Rightarrow S_\lambda = \begin{cases} x+\lambda y &= 0 \\ 0 &= -\lambda. \end{cases}$$
En este caso, el sistema es evidentemente incompatible y no tiene solución.

2. *Ahora, vamos a analizar un sistema de* 3 *ecuaciones lineales con* 3 *incógnitas que depende de un parámetro* $\lambda \in \mathbb{R}$*:*
$$S_\lambda = \begin{cases} x-y+2z &= 0 \\ -x+y-z &= 0 \\ x+\lambda y+z &= 0. \end{cases}$$
Consideremos la matriz ampliada $(A_\lambda \mid b)$ *asociada al sistema* S_λ *y buscamos la forma escalonada de dicha matriz*
$$(A_\lambda \mid b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \end{array}\right) (F_2 \leftharpoondown F_2+F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \end{array}\right) (F_3 \leftharpoondown F_3-\lambda F_1) \Rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{lrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & -1 & 0 \end{array}\right) (F_3 \rightleftharpoons F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{lrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} x & -y & +2z & =0 \\ & (\lambda+1)y & -z & =0 \\ & & z & =0 \end{array}\right. .$$
De la última ecuación del sistema, podemos deducir el valor de la incógnita z*, que resulta ser* $z=0$*. Ahora, consideremos dos casos en función del valor de* $\lambda+1$*:*

- *Cuando* $\lambda+1 \neq 0$ *(es decir, para* $\lambda \neq -1$*), de la segunda ecuación obtenemos el valor de la incógnita* y*, que es* $y=0$*. Finalmente, de la primera ecuación podemos determinar el valor de la incógnita* x*, que es* $x=0$*. En consecuencia, para cualquier* $\lambda \neq -1$*, el sistema* S_λ *es compatible determinado y su conjunto solución es:*
$$Sol(S_\lambda) = \{(0,0,0)\}.$$

- *Cuando $\lambda+1=0$ (es decir, para $\lambda=-1$), el sistema se trasnforma en:*

$$S_\lambda = \begin{cases} x \quad -y \quad +2z &= 0 \\ \qquad\qquad\quad z &= 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación, deducimos que $x=y$. Por lo tanto, para $\lambda=-1$, el sistema S_λ es compatible indeterminado y su conjunto solución es:

$$Sol(S_\lambda) = \{(x,x,0) : x \in \mathbb{R}\}.$$

2.3.3. Teorema de Rouché-Frobenius.

Determinar si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución (si es compatible) y cuántas soluciones posee (si es determinado o indeterminado) se simplifica en todos los tipos de sistemas al análisis de los rangos. Por ende, estableceremos un criterio para examinar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales basándonos en el rango de la matriz del sistema y la matriz ampliada. El resultado es conocido como el **Teorema de Rouché-Frobenius**.[4]

La importancia del teorema se debe a que permite clasificar un sistema de ecuaciones lineales a partir de los rangos de la matriz ampliada y de la matriz de coeficientes del sistema, sin necesidad de resolverlo.

Teorema 2.1 *Sea S un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas con matriz ampliada $(A|b)$. Entonces:*

1. *El sistema S es compatible si y solo si $Rg(A) = Rg(A|b)$.*
2. *Si el sistema S es compatible, entonces:*
   a) *El sistema S es determinado si y solo si $Rg(A) = n$.*
   b) *El sistema S es indeterminado si y solo si $Rg(A) < n$.*

Es importante notar que $Rg(A) \leq Rg(A|b)$, ya que la matriz de coeficientes está incluida en la matriz ampliada. En otras palabras, el rango de la matriz A no puede ser mayor que el rango de la matriz ampliada $(A|b)$.

A pesar de su relevancia, este teorema presenta una limitación: no proporciona un método para calcular la solución de un sistema de ecuaciones. Su utilidad se centra en determinar la existencia de solución, ya sea su unicidad o multiplicidad.

Ejemplo 2.14 *Mostremos la utilidad del Teorema de Rouché-Frobenius en la clasificacón de sistemas de ecuaciones lineales dependientes de parámetros.*

1. ***Ejercicio 1. Examen GAL1 interactiva. Diciembre 2023.*** *Considerar el sistema $S_{a,b}$ que depende de los parámetros $a,b \in \mathbb{R}$:*

$$S_{a,b} = \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ ax+y+z &= 2 \\ x+ay+2az &= b+2 \end{cases}$$

   Entonces:

[4] El teorema apareció, primero, en un artículo de dos páginas en 1875 (Sur la discussion des equations du premier degré) y después, en 1890, fue publicada una versión más extensa en el Journal de l'École Polytechnique.

Sin embargo, el matemático Georges Fontené (1848-1923) reclamó la autoría de la demostración. Más tarde, en 1905, el matemático Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) acreditó la autoría tanto a Rouché como a Fontené.

Actualmente, el teorema se conoce como Teorema de Rouché-Frobenius. En Rusia se conoce como Teorema de Kronecker-Capelli; en Italia, como Teorema de Rouché-Frobenius; y, en Francia, como Teorema de Rouché-Fontené.

(A) No existen valores de a y b para los cuales $S_{a,b}$ es incompatible.

(E) Existe un único valor de a para el que existen infinitos valores de b tales que $S_{a,b}$ es incompatible.

(I) Existen exactamente dos valores de a para los que existen infinitos valores de b tales que $S_{a,b}$ es incompatible.

(O) Existe un único valor de a y un único valor de b tal que $S_{a,b}$ es incompatible.

(U) Existen infinitos valores de a e infinitos valores de b tales que $S_{a,b}$ es incompatible.

(Y) Existen finitos valores de a y finitos valores de b para los cuales $S_{a,b}$ es incompatible.

Solución: *Escalerizamos el sistema en su representación matricial:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 2a & b+2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 2-a \\ 0 & a-1 & 2a-1 & b+1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 2-a \\ 0 & 0 & a & 3+b-a \end{array}\right).$$

Este sistema tiene una matriz de rango 3 si $a \neq 0, 1$; por lo cual es compatible y determinado para todo $a \neq 0, 1$, independientemente de los valores de b. Cuando $a = 1$, la segunda fila representa la ecuación $0 = 1$. En este caso, el sistema es incompatible para todo valor del parámetro b. Cuando $a = 0$, la tercera fila representa la ecuación $0 = 3 + b$, que es incompatible para todo valor de b excepto para $b = -3$.

La respuesta correcta es la opción (I): Existen exactamente dos valores de a para los que existen infinitos valores de b tales que $S_{a,b}$ es incompatible.

2. ***Ejercicio 2. Primer parcial GAL1 interactiva. Septiembre 2023.*** *Sea el siguiente sistema de ecuaciones con parámetro $k \in \mathbb{R}$:*

$$S = \begin{cases} x + 2y + kz & = 6 \\ 3x + 6y + 8z & = 4 \end{cases}$$

Entonces:

(A) S es compatible determinado para todo k.

(E) S es incompatible para infinitos valores de k.

(I) S es incompatible para un único valor de k.

(O) S es compatible indeterminado para $k = \frac{8}{3}$.

(U) S es compatible determinado para $k = \frac{8}{3}$.

(Y) S es incompatible para todo k.

Solución: *El sistema tiene parámetro k y aplicando el método de Gauss obtenemos:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 6 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 6 \\ 0 & 0 & 8-3k & -14 \end{array}\right)$$

Por el teorema de Rouché-Frobenius, este sistema es compatible si y solo si $8 - 3k \neq 0$, por lo que es compatible para todo valor de k, excepto para uno, que es $k = \frac{8}{3}$.

La opción correcta es (I): S es incompatible para un único valor de k.

3. ***Ejercicio 3. Examen GAL1. Diciembre 2023***. *Considere el sistema S dependiente de los parámetros reales m y n*[5]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ n \end{pmatrix}$$

Indicar la opción verdadera:

(A) S es compatible determinado para todo valor real de m y n.

(B) Si $m = -n$, entonces S es compatible indeterminado.

(C) Si $m = 0$ y $n = -2$, entonces S es compatible indeterminado.

(D) Si $m = 1$ y $n = 1$, entonces S es compatible determinado.

(E) Si $m = n$, entonces S es compatible indeterminado.

Solución: *Escalerizamos el sistema en su representación matricial:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & m \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & n \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & m \\ 0 & 2 & -2 & -m \\ 0 & 2 & -2 & n \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & m \\ 0 & 2 & -2 & -m \\ 0 & 0 & 0 & m+n \end{array}\right).$$

Si $m = -n$ el sistema es compatible indeterminado. Por lo tanto, la opción correcta es la B.

4. ***Ejercicio 1. Examen GAL1 (interactiva). Febrero 2024***. *Resolver el siguiente sistema dependiente del parámetro k, discutiendo su compatibilidad y hallando los conjuntos solución para los valores de k para los que sea compatible:*

$$S_k = \begin{cases} x + y + z = k \\ kx + y + 2z = 2 \\ x + ky + z = 4 \end{cases}$$

Solución: *Escalerizamos el sistema en su representación matricial:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ k & 1 & 2 & 2 \\ 1 & k & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & 1-k & 2-k & 2-k^2 \\ 0 & k-1 & 0 & 4-k \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & 1-k & 2-k & 2-k^2 \\ 0 & 0 & 2-k & 6-k-k^2 \end{array}\right).$$

Este sistema tiene una matriz de rango 3 si $k \neq 1$ y $k \neq 2$, y el conjunto solución en este caso se obtiene (por ejemplo) despejando y sustituyendo:

$$\begin{cases} x + y + z = k \\ (1-k)y + (2-k)z = 2-k^2 \\ (2-k)z = 6-k-k^2 \end{cases}$$

La ecuación $6-k-k^2$ admite raíces -3 y 2, y se factoriza como $(-1)(k+3)(k-2)$, por lo que la tercera ecuación equivale a $z = k+3$. Sustituyendo en la segunda ecuación, obtenemos $(1-k)y + (2-k)(k+3) =$

[5] El sistema se encuentra expresado en notación de ecuación matricial, donde hace uso del producto matricial para definirlo (Ver capítulo 3) el sistema en cuestión es $S = \begin{cases} x + z = m \\ x + 2y - z = 0 \\ 2y - 2z = n \end{cases}$

$2-k^2$, que desarrollando nos da $(1-k)y-k^2-k+6=2-k^2$. De donde $(1-k)y=k-4$ y $y=\frac{k-4}{1-k}$. Finalmente, sustituyendo z e y hallados en la primera ecuación, tenemos $x=\frac{k-4}{1-k}-k-3$, que equivale $\frac{2k+1}{1-k}$.

Entonces, para $k\neq 1$ y $k\neq 2$, el conjunto solución es $\{(\frac{2k+1}{1-k},\frac{k-4}{1-k},k+3)\}$.

Cuando $k=1$, la segunda ecuación equivale a $z=1$ y la tercera a $z=4$, lo que es absurdo, por lo que para $k=1$ el sistema es incompatible.

Cuando $k=2$, el sistema equivale a:

$$\begin{cases} x \quad +y \quad +z \quad = 2 \\ \qquad -y \qquad\quad = -2 \\ \qquad\qquad 0 \quad\; = 0 \end{cases}$$

El sistema es entonces compatible e indeterminado con un grado de libertad (la matriz del sistema tiene rango 2). El conjunto solución se obtiene despejando, por ejemplo, todo en función de z: $\{(-z,2,z)\mid z\in\mathbb{R}\}$.

5. ***Ejercicio 2. Primer Parcial GAL1. 16 Septiembre 2024.***

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+ay+z=1 \\ x+2(a-1)y+2z=4 \\ (a-2)y+az=5 \end{cases}$$

en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$.

El sistema es:

(A) Compatible indeterminado para $a=0$ y $a=1$, incompatible para $a=2$, y compatible determinado para los otros a.

(B) Incompatible para $a=1$ y $a=2$, y compatible determinado para los otros a.

(C) Incompatible para $a=0$, compatible indeterminado para $a=1$ y $a=2$, y compatible determinado para los otros a.

(D) Compatible indeterminado para $a=1$, y compatible determinado para los otros a.

(E) Incompatible para $a=1$, compatible indeterminado para $a=2$, y compatible determinado para los otros a.

Solución: *Escalerizamos el sistema en su representación matricial:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 2(a-1) & 2 & 4 \\ 0 & a-2 & a & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & a-2 & 1 & 3 \\ 0 & a-2 & a & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & a-2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-1 & 2 \end{array}\right).$$

Podemos considerar entonces los siguientes casos:

- *Si $a=1$, obtenemos la ecuación $0z=2$, lo que hace que el sistema sea incompatible.*
- *Para $a=2$, tenemos $z=3$ y $z=2$ simultáneamente, lo que lleva a un sistema incompatible.*
- *Cuando a no es igual a 2 ni 1, el sistema resulta ser compatible determinado.*

En consecuencia, la opción correcta es la letra B: Incompatible para $a=1$ y $a=2$, y compatible determinado para los otros valores de a.

2.3.4. Relación entre rango y grados de libertad.

Como vimos en la sección anterior la caracterización de los sistemas de ecuaciones lineales y el número de parámetros de los que dependen sus soluciones nos los proporciona el Teorema de Rouché-Frobenius que establece que si S es un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas y matriz ampliada $(A|B)$, entonces:

1. S es un sistema compatible si y solo si $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A|B)$.

2. Si S es compatible, entonces S es determinado si y solo si $\text{Rg}(A) = n$.

3. Si S es compatible indeterminado, el conjunto de soluciones puede expresarse en función de $n - \text{Rg}(A) > 0$ parámetros **(grados de libertad)**.

Entonces en un sistema compatible indeterminado, la diferencia entre el número de incógnitas y el rango de la matriz se denomina **grados de libertad del sistema**. Si tenemos un sistema de ecuaciones lineales S compatible indeterminado

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

después de aplicar el método de Gauss-Jordan obtenemos un sistema escalonado reducido en el que podemos reordenar sus incógnitas de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x_1 = h_1 - (c_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n) \\ x_2 = h_2 - (c_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_r = h_r - (c_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n) \end{cases}$$

En otras palabras, obtenemos la solución de las incógnitas $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ en términos de las incógnitas $(x_{r+1}, x_{r+2}, , \ldots, x_n)$. Esto significa que al elegir valores para cada una de las variables $(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n)$, obtendremos soluciones diferentes de $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$. En consecuencia, el sistema de ecuaciones se dice que tiene $n - r$ grados de libertad. Es importante destacar que el valor de r, que representa el número de ecuaciones efectivas, y es lo que hemos denominado como el rango del sistema.

Ejemplo 2.15 *Consideremos el sistema*

$$S = \begin{cases} x + 3z - v = 3 \\ y + 5z = 7 \\ u + 2v = -1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right).$$

Como $Rg(A \mid b) = 3 < 5 = n$, el sistema (S) es compatible indeterminado, con dos grados de libertad. Si reordenamos el sistema, obtenemos:

$$\begin{cases} x = 3 - 3z + v \\ y = 7 - 5z \\ u = -1 - 2v \end{cases},$$

si ahora hacemos, $z = \lambda_1$ y $v = \lambda_2$ obtenemos que :

$$\begin{cases} x = 3 - 3\lambda_1 + \lambda_2 \\ y = 7 - 5\lambda_1 \\ z = \lambda_1 \\ u = -1 - 2\lambda_2 \\ v = \lambda_2 \end{cases}$$

Es decir, para cada valor de λ_1 y λ_2 obtenemos una solución distinta del sistema.

Ejemplo 2.16 ***Sistemas de ecuaciones con restricciones enteras.*** *En el siguiente ejemplo se busca expresar un problema en términos de un sistema de ecuaciones lineales, para luego resolverlo e imponer restricciones dentro del conjunto solución.*

1. ***Ejercicio 1. Primer parcial GAL1 interactiva. Septiembre 2023.*** *Una mueblería elabora juegos de comedor, sala, dormitorio y oficina. El trabajo se divide en 3 etapas: corte, ensamblado y terminación:*

   - *Cada juego de comedor requiere de 3 horas de corte, 3 horas de ensamblado y 3 horas de terminación.*
   - *Cada juego de sala requiere de 2 horas de corte, 3 horas de ensamblado y 3 horas de terminación.*
   - *Cada juego de dormitorio requiere de 4 horas de corte, 2 horas de ensamblado y 2 horas de terminación.*
   - *Cada juego de oficina requiere de 2 horas de corte, 3 horas de ensamblado y 2 horas de terminación.*

   La mueblería puede pagar 70 horas de corte, 90 horas de ensamblado y 80 horas de terminación. Hallar cuál es la mayor cantidad de juegos que pueden fabricarse usando todas las horas. Decir cuántos juegos de cada tipo se obtienen para esa solución.

   Este problema tiene 3 partes: modelar el problema con un sistema lineal, resolver el sistema lineal y interpretar la solución a la luz del problema que se está resolviendo.

   - *Modelado del problema: Los diferentes tipos de muebles consumen de los 3 tipos de horas de trabajo. Denotemos respectivamente como c, s, d, o las cantidades de juegos de comedor, sala, dormitorio y oficina. De acuerdo a la cantidad de horas de cada tipo que consume cada juego de muebles, las ecuaciones de balance de los 3 tipos de horas dan el siguiente sistema de ecuaciones:*

   $$\begin{cases} 3c + 2s + 4d + 2o = 70 \\ 3c + 3s + 2d + 3o = 90 \\ 3c + 3s + 2d + 2o = 80 \end{cases}$$

   - *Resolución del sistema: Mediante el método de escalerización de Gauss:*

   $$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 2 & 70 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 90 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 80 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 2 & 70 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 2 & 70 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -10 \end{array}\right).$$

   El conjunto solución de este sistema es:

   $$\{(10 - \frac{8}{3}d, 10 + 2d, d, 10) \mid d \in \mathbb{R}\}.$$

   El sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad y entonces admite infinitas soluciones en $\mathbb{R}^4$.

- *Interpretación de la solución: Si bien el sistema admite infinitas soluciones, este es un modelo algebraico para un problema en el que los valores de c, s, d y o deben ser números naturales, ya que son cantidades de un producto que no se puede fraccionar. Entonces los valores del parámetro d de la solución deben ser naturales, pero además* $10-\frac{8}{3}d$ *también debe ser un natural. Como* $10-\frac{8}{3}d \geq 0$ *que equivale a* $0 \leq d \leq \frac{30}{8} = 3{,}75$*, a priori tenemos 4 valores posibles para* $d = 0, 1, 2, 3$*. Pero solamente con* $d = 0$ *o* $d = 3$ *el valor de* $10 - \frac{8}{3}d$ *es un natural.*

  De las infinitas soluciones que tiene el sistema, sólo dos son pertinentes al problema: $(10, 10, 0, 10)$*, que corresponde a* $d = 0$*, y* $(2, 16, 3, 10)$*, que corresponde a* $d = 3$*. En el primer caso se producen* $10 + 10 + 0 + 10 = 30$ *juegos y en el segundo* $2 + 16 + 3 + 10 = 31$ *juegos. La solución buscada es entonces con* $d = 3$.

  Concluimos que la opción que maximiza la cantidad de juegos produce: 2 juegos de comedor, 16 juegos de sala, 3 juegos de dormitorio y 10 juegos de oficina.

2.4. Práctico 1.

Práctico 1 – Sistemas de ecuaciones lineales

2.4.1. Sistemas de ecuaciones lineales.

1. Determinar el conjunto solución de los siguientes sistemas

$$a)\ \left\{\begin{array}{r} -x+y-z=-1\\ 4x+2y-z=5\\ x+z=2 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{r} x+z=1\\ y+z=0\\ x+y+z=0 \end{array}\right. \qquad c)\ \left\{\begin{array}{r} x-y+5z=-2\\ 2x+y+4z=2\\ 2x+4y-2z=8 \end{array}\right.$$

$$d)\ \left\{\begin{array}{r} x-2y-z=1\\ -x+3y+3z=4\\ 2x-3y+z=10 \end{array}\right. \qquad e)\ \left\{\begin{array}{r} x-y+5z=-2\\ 2x+y+4z=2\\ 2x+4y-2z=8 \end{array}\right. \qquad f)\ \left\{\begin{array}{r} x+2y-2z=1\\ 2x+2y-z=6\\ 3x+4y-3z=5 \end{array}\right.$$

2. Determinar el conjunto solución de los siguientes sistemas

$$a)\ \left\{\begin{array}{r} 2w+x+z=6\\ y-2z=-3\\ x+2y-z=-2\\ -2w+2x+y+3z=0 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{r} x+y+z+w=0\\ x+y+2z+2w=0\\ 2x+2y+3z+4w=1\\ 2x+3y+4z+5w=2 \end{array}\right. \qquad c)\ \left\{\begin{array}{r} w+2x+z=5\\ -w+y=-1\\ -w+3x-z=0\\ w+4x+y+2z=9 \end{array}\right.$$

3. Determinar el conjunto solución de los siguientes sistemas

$$a)\ \left\{\begin{array}{r} x+2y-z=0\\ -x-2y+z=1 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{r} x+2y-z=0\\ 2x+4y-2z=1 \end{array}\right.$$

$$c)\ \left\{\begin{array}{r} w+x-y=0\\ 2w+3x-z=0\\ 2w+x-4y+z=0 \end{array}\right. \qquad d)\ \left\{\begin{array}{r} x-y+z=2\\ 4x-2y-z=2\\ x+y+5z=2\\ -x-y-z=2 \end{array}\right.$$

4. Las siguiente son matrices de sistemas homogéneos. Para cada parte determinar el conjunto solución.

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Determinar el conjunto solución de los siguientes sistemas en función de λ.

$$a)\ \begin{cases} x+y=2 \\ x+\lambda y=4 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} \lambda x+y=-2 \\ 2x-2y=4 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} \lambda x+y=0 \\ x+\lambda y=0 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} x+y-z=2 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+(\lambda-5)z=\lambda \end{cases}$$

6. Resolver y discutir según α y β reales.

$$a)\ \begin{cases} x+y+z=\alpha \\ x+y+\beta z=1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} \alpha x+2y+3z=4 \\ 4x+5y+\beta z=3 \\ 14x+16y+3\beta z=0 \end{cases}$$

7. Consideremos un sistema lineal homogéneo con m ecuaciones y n incógnitas.

   a) Probar que si $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es solución entonces $(c\alpha_1, c\alpha_2, \ldots, c\alpha_n)$ también es solución $\forall\ c \in \mathbb{R}$.

   b) Probar que si $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ son soluciones entonces $(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_n+\beta_n)$ también es solución.

   c) Mostrar que si $m < n$ entonces el sistema tiene soluciones no triviales.

   d) Mostrar que si el sistema es determinado y admite como única solución la trivial (solución en que todas las incógnitas toman el valor 0), entonces $m \geq n$.

   e) Dar ejemplos de sistemas homogéneos indeterminados en los que m sea mayor que n.

8. Consideremos sistemas lineales cualesquiera, con m ecuaciones y n incógnitas.

   a) Para el caso $m > n$, en que el sistema tiene más ecuaciones que incógnitas,

      1) dar ejemplos de sistemas incompatibles;
      2) dar ejemplos de sistemas compatibles y determinados;
      3) dar ejemplos de sistemas compatibles e indeterminados.

   b) Repetir la parte anterior para el caso $m = n$, en que el sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

   c) Para el caso $m < n$, en que el sistema tiene menos ecuaciones que incógnitas,

      1) dar ejemplos de sistemas incompatibles;
      2) dar ejemplos de sistemas compatibles e indeterminados;
      3) mostrar que el sistema nunca puede ser compatible y determinado.

2.4.2. Sistemas de ecuaciones lineales con restricciones enteras.

En el siguiente ejercicio se busca expresar un problema en términos de un sistema lineal de ecuaciones, para luego resolverlo e imponer restricciones dentro del conjunto solución. Para ser preciso, en el caso del reparto de tablas de sushi, no es posible hacer media tabla de algún tipo. Las cantidades de cada tabla deben ser enteras no negativas puesto que son cantidades discretas.

Reparto de cantidades.

9. Para un almuerzo de trabajo en un Departamento de Matemática la dirección del mismo compró diferentes piezas de sushi: 32 de *Philadelphia*, 22 de *New York* y 50 de *California*. Se repartirán en diferentes tablas de 8, 12 y 24 unidades como se describe a continuación:

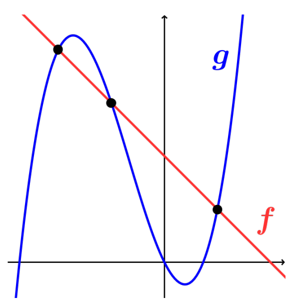
   - La tabla Lagrange tiene 4 piezas de *Philadelphia*, 3 de *New York* y 5 de *California*.
   - La tabla Hausdorff tiene 2 piezas de *Philadelphia*, 1 de *New York* y 5 de *California*.
   - La tabla Gauss contiene 6 piezas de *Philadelphia*, 3 de *New York* y 15 de *California*.
   - La tabla Kolmogorov tiene 8 piezas de *Philadelphia*, 6 de *New York* y 10 de *California*.

   Encontrar todas las formas en las que se pueden armar las tablas sabiendo que se usarán todas las piezas y garantizando que haya al menos una tabla de cada tipo.

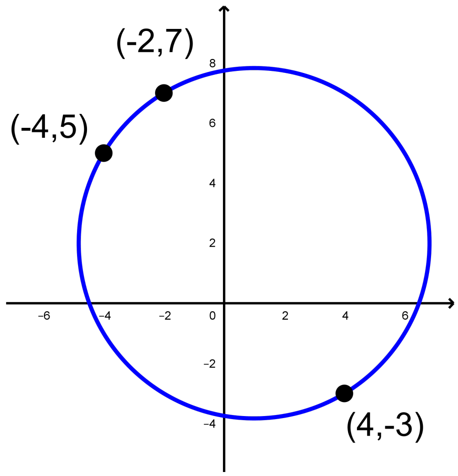
2.4.3. Geometría.

En esta sección veremos como algunos problemas geométricos se pueden modelar mediante ecuaciones y/o sistemas de ecuaciones.

10. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones con expresión $f(x) = a_1x + b_1$ y $g(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x$. Determinar f y g a partir del gráfico, donde los puntos marcados son $(-2, 4)$, $(-1, 3)$ y $(1, 1)$.



11. Tres puntos no alineados en el plano determinan una única círcunferencia. Encontrar los coeficientes a,b y c de la circunferencia $x^2 + ax + y^2 + by = c$ dada en la figura. Determinar radio y centro de la misma.



12. Los puntos del espacio pueden representarse como una 3-upla (x, y, z), donde x, y y z representan las coordenadas en un sistema coordenado.

    Un plano dentro de este espacio puede representarse por una ecuación del tipo $ax + by + cz = d$, donde a,b y c no son todos nulos. Así, por ejemplo, el plano del suelo esta dada por la ecuación $z = 0$

    Tomando $d = 10$, determinar la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1, 1, -1)$, $(3, -2, -2)$, $(5, 5, 3)$.

2.4.4. Aplicaciones.

Sistema masa resorte.: Supongamos que tenemos un resorte colgado desde el techo, con una longitud natural L. Si se agrega un bloque de masa m en el vértice libre y el resorte se estira una longitud Δx entonces este ejercerá una fuerza "hacia arriba" sobre el bloque. El módulo de esta fuerza es $k\Delta x$ donde k es la constante elástica del resorte.

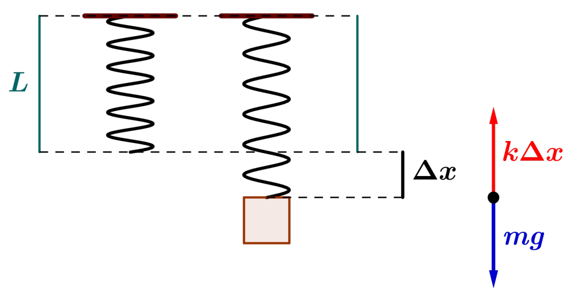


Figura 2.2: representación gráfica de los elementos del problema

Si el bloque queda en equilibrio entonces la suma de fuerzas es 0 (es decir $mg = k\Delta x$).

11. Se tienen 3 bloques unidos por resortes, en un primer momento los resortes están en su longitud natural. El sistema se deja hasta que se estabiliza. Notemos x_i es desplazamiento del bloque i desde la postura inicial.

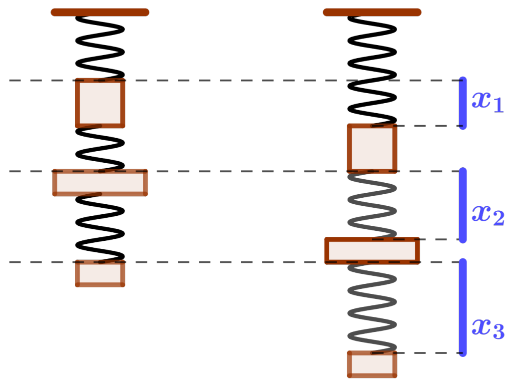


Figura 2.3: representación gráfica de los elementos del problema (los valores x_i no están a escala)

a) Sabiendo que $m_1 = 10$kg, $m_2 = 2$kg, $m_3 = 2$kg, $k_1 = 10$ kg/sec^2, $k_2 = 20$ kg/sec^2, $k_3 = 10$ kg/sec^2 Calcular los valores de x_i.

b) Sabiendo que $m_1 = 2$kg, $m_2 = 3$kg, $m_3 = 2{,}5$kg, $x_1 = 7$ cm, $x_2 = 10$ cm, $x_3 = 12$ cm. Calcular los valores de k_i.

2.4.5. Solución a ejercicios seleccionados del Práctico 1.

Sistemas de ecuaciones lineales.

1. a. El sistema es compatible determinado. Para hallar el conjunto solución podemos plantear la matriz correspondiente y escalerizar o razonar de la siguiente forma.

   Considerando la última ecuación del sistema, vemos que podemos despejar la variable z en función de x y obtenemos $z = 2 - x$. Aplicamos esta condición en las primeras dos ecuaciones y obtenemos el siguiente sistema que es equivalente al inicial

$$\begin{cases} y = 1 \\ 5x + 2y = 7 \end{cases} .$$

   Observamos que la primera ecuación de este nuevo sistema ya nos dice cuánto debe valer la variable y. Sustituimos este valor en la segunda ecuación para despejar el valor de x y lleggamos a que $x = 1$.

   Volviendo a la condición original sobre z y conociendo el valor de x, concluímos que $z = 1$ y por lo tanto, el conjunto solución del sistema es $Sol(S) = \{(1, 1, 1)\}$.

   c. El sistema es compatible indeterminado y $Sol(S) = \{(-3z, 2 + 2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Consideramos la matriz ampliada $(A|b)$ correspondiente al sistema y escalerizamos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -12 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

   Dado que la matriz A tiene la misma cantidad de escalones que la matriz ampliada, el sistema es compatible. Además, como tenemos dos escalones y tres incógnitas, sabemos que es indeterminado.

De la segunda fila obtenemos la siguiente ecuación

$$3y - 6z = 6$$

Por lo que podemos expresar a y en función de z como $y = 2 + 2z$ y sustituir en la primera ecuación para obtener $x = -3z$.

2. a. El sistema es compatible determinado. Hallemos el conjunto solución utilizando matrices.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4+F_1} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{F_4-3F_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_4+5F_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right).$$

Llegamos entonces a una matriz escalerizada con 4 escalones. Por el teorema de Rouché-Frobenius, sabemos que el sistema es compatible determinado y despejando de las ecuaciones concluimos que el conjunto solución es

$$Sol(S) = \{(2, 1, -1, 1)\}.$$

c. El sistema es compatible indeterminado. Hallemos el conjunto solución. Como en las partes anteriores, planteamos la matriz ampliada y escalerizamos.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2+F_1} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4-F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

De la fila 3 concluimos que $X = 1$ y de las filas 1 y 2 despejamos a las variables w, y en función de x, z. Por lo tanto,

$$Sol(S) = \{(3 - z, 1, 2 - z, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

3. a. El sistema es incompatible y por lo tanto $Sol(S) = \emptyset$. Para ver esto, alcanza sumar ambas ecuaciones y observar que esto implica que $0 = 1$ lo cual es una contradicción.

c. El sistema es compatible indeterminado. Observar que dado que es un sistema homogéneo, $w = x = y = z = 0$ es una solución, por lo que el sistema es compatible. Además, tenemos menos ecuaciones que incógnitas por lo que no puede ser determinado. Para hallar el conjunto solución, planteamos la matriz correspondiente y escalerizamos, llegando a

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

De la segunda fila podemos despejar z en función de x e y y tenemos que $z = x + 2y$ y de la primera despejamos w también en función de x e y para obtener $w = -x+y$. Por lo tanto, el conjunto solución es

$$Sol(S) = \{(-x + y, x, y, x + 2y) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

4. a. El sistema es compatible indeterminado. Para determinar el conjunto solución, observamos primero que la matriz ya está escalerizada por lo que podemos despejar las variables de la siguiente forma.

De la última fila obtenemos que $x_4 = -9x_5$. De la segunda fila, $x_2 = 4x_5$ y de la primera $x_1 = 3x_2 + x_4 = 12x_5 - 9x_5 = 3x_5$. Dado que en las ecuaciones no aparece la variable x_3, esta puede tomar cualquier valor real y por lo tanto, el conjunto solución es $Sol(S) = \{(3x_5, 4x_5, x_3, -9x_5, x_5) : x_3, x_5 \in \mathbb{R}\}$.

c. El sistema es compatible indeterminado. Igual que en la parte anterior, la matriz ya está escalerizada por lo que alcanza despejar las variables para concluir que

$$Sol(S) = \{(10x_5, 2x_5, 0, -2x_5, x_5)\}.$$

5. a. Para resolver este sistema podemos plantear la matriz correspondiente escalerizar y luego discutir según el valor de λ.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & 2 \end{array}\right).$$

Observamos que si $\lambda = 1$ la matriz tiene menos escalones que la ampliada y por lo tanto, el sistema es incompatible. En este caso $Sol(S) = \emptyset$.

si $\lambda \neq 1$ el sistema es compatible determinado y $Sol(S) = \{(\frac{2\lambda-4}{\lambda-1}, \frac{2}{\lambda-1})\}$.

d. Razonando análogamente a la parte anterior, tenemos lo sigueinte

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \lambda-5 & \lambda \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-4 & \lambda-2 \end{array}\right)$$

Observamos que si $\lambda = 4$, el sistema es incompatible y por lo tanto el conjunto solución es vacío.

Por otro lado, si $\lambda \neq 4$ el sistema es compatible determinado y $Sol(S) = \{(\frac{4\lambda-10}{\lambda-4}, \frac{-\lambda}{\lambda-4}, \frac{\lambda-2}{\lambda-4})\}$

6. b. Para resolver este sistema podemos plantear la matriz correspondiente escalerizar y luego discutir según los valores de α y β.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & \beta & 3 \\ 14 & 16 & 3\beta & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & \beta & 3 \\ \alpha & 2 & 3 & 4 \\ 14 & 16 & 3\beta & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & \beta & 3 \\ 0 & 8-5\alpha & 12-\alpha\beta & 16-3\alpha \\ 0 & -3 & -\beta & -21 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & \beta & 3 \\ 0 & -3 & -\beta & -21 \\ 0 & 8-5\alpha & 12-\alpha\beta & 16-3\alpha \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & \beta & 3 \\ 0 & -3 & -\beta & -21 \\ 0 & 0 & 2\beta(\alpha-4)+36 & 96\alpha-120 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, observar que sí $2\beta(\alpha-4)+36 = 0$, es decir $\beta = \frac{-18}{\alpha-4}$, y $96\alpha - 120 \neq 0$, es decir $\alpha \neq 5/4$, el sistema es incompatible, ya que tendríamos 0 igual a algo distinto de cero y el conjunto solución es vacío.

Sí $2\beta(\alpha-4)+36 = 0$ y $\alpha = 5/4$, lo que implica que $\beta = 72/11$, el sistema es un sistema compatible indeterminado, cuya matriz tiene la siguiente forma

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 72/11 & 3 \\ 0 & -3 & -72/11 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Por lo tanto, la solución del sistema es

$$Sol(S) = \left\{ \left(\frac{36}{11}z - 8, 7 - \frac{24}{11}z, z \right) \ : \ z \in \mathbb{R} \right\}$$

Sí $2\beta(\alpha - 4) + 36 \neq 0$, el sistema es compatible determinado y su conjunto solución es

$$Sol(S) = \left\{ \left(\frac{9\alpha\beta + 52\beta + 216}{4(\beta(\alpha-4)+18)}, \frac{-9\alpha\beta - 8\beta}{\beta(\alpha-4)+18}, \frac{48\alpha - 60}{\beta(\alpha-4)+18} \right) \right\}$$

7. Consideremos un sistema de la forma

   a. Si $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ es solución del sistema, entonces verifica cada una de las m ecuaciones. Es decir, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, tenemos que
   $$a_{i1}\alpha_1 + ... + a_{in}\alpha_n = 0$$
   Multiplicando ambos lados de la ecuación por $c \in \mathbb{R}$, obtenemos
   $$c(a_{i1}\alpha_1 + ... + a_{in}\alpha_n) = c{,}0 = 0$$
   Usando la propiedad distributiva resulta que para todo $i \in \{1, ..., m\}$
   $$a_{i1}(c\alpha_1) + ... + a_{in}(c\alpha_n) = 0$$
   Concluimos entonces que $(c\alpha_1, ..., c\alpha_n)$ es solución del sistema.

   b. En esta parte razonamos de forma análoga a la anterior. Supongamos que $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ y $(\beta_1, ..., \beta_n)$ son soluciones del sistema. Entonces si consideramos la ecuación i-ésima tenemos que
   $$a_{i1}\alpha_1 + ... + a_{in}\alpha_n = 0$$
   $$a_{i1}\beta_1 + ... + a_{in}\beta_n = 0$$
   Sumando ambas ecuaciones
   $$a_{i1}(\alpha_1 + \beta_1) + ... + a_{in}(\alpha_n + \beta_n) = 0$$
   Como esto vale para cada una de las m ecuaciones, concluimos que $(\alpha_1 + \beta 1, ..., \alpha_n + \beta_n)$ es solución del sistema.

   c. La idea de esta prueba es observar la cantidad máxima de escalones que puede tener esta matriz y usar el teorema de Rouché-Frobenius. La siguiente parte es simplemente el contrarrecíproco de ésta.

   d. Esto es simplemente el contrarrecíproco de la parte anterior.

   e. Para construir contraejemplos alcanza tomar sistemas con varias ecuaciones que sean equivalentes.

8 a. i. Un ejemplo con $m = 3$ y $n = 2$ es $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

   Las ecuaciones son contradictorias, por lo tanto es un sistema incompatible.

   ii. Un ejemplo con $m = 2$ y $n = 1$ es $\begin{cases} x = 1 \\ 2x = 2 \end{cases}$

   Ambas ecuaciones nos dan la misma información, por lo tanto tenemos un sistema compatible determinado.

iii. Un ejemplo con $m = 3$ y $n = 2$ es $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$ Claramente todas las ecuaciones son equivalentes, por lo que armando la matriz y escalerizando, obtenemos una matriz de 3×2 donde las últimas dos filas son nulas. Usando Rouché-Frobenius, concluimos que el sistema es compatible indeterminado.

c. iii. Observar que $m < n$ da una restricción sobre la cantidad máxima de escalones que puede tener la matriz escalerizada. Usar con esto el Teorema de Rouché-Frobenius.

Sistemas de ecuaciones lineales con restricciones enteras.

9. El ejercicio consiste en hallar la cantidad de tablas de cada tipo que podemos armar con las piezas de sushi disponibles. Llamemos entonces w a la cantidad de tablas Lagrange, x a la cantidad de tablas Hausdorff, y a la cantidad de tablas Gauss y z a la cantidad de tablas Kolmogorov. Disponemos de 32 piezas Philadelphia que debemos repartir entre las diferentes tablas. Por cada tabla Lagrange que armemos, usamos 4 de ellas, por cada tabla Hausdorff usamos 2 de ellas, por cada tabla Gauss usamos 6 y por cada tabla Kolmogorov usamos 8 de ellas. Razonando análogamente con el resto de las piezas, podemos representar el problema con el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4w + 2x + 6y + 8z = 32 \\ 3w + x + 3y + 6z = 22 \\ 5w + 5x + 15y + 10z = 50 \end{cases}$$

Escalerizando, obtenemos que el sistema es compatible indeterminado y las soluciones son de la forma $(6-2z, 4-3y, y, z)$. Dado que solamente podemos tener cantidades enteras de tablas y además debe haber al menos una de cada una, tenemos que

$$w = 6 - 2z \geq 1$$
$$x = 4 - 3y \geq 1$$

Despejando de las inecuaciones anteriores, obtenemos que $y = 1$, $1 \leq z \leq \frac{5}{2}$. Por lo tanto, el conjunto de soluciones del sistema es

$$\{(4, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 2)\}.$$

Geometría.

10. La información que nos dan los puntos marcados es que $f(-2) = g(-2) = 4$, $f(-1) = g(-1) = 3$ y $f(1) = g(1) = 1$. A partir de esto, podemos armar un sistema de ecuaciones y obtenemos que $f(x) = -x+2$, $g(x) = x^3 + 2x^2 - 2x$

12. La ecuación genérica del plano asumiendo que $d = 10$ es

$$ax + by + cz = 10.$$

Basta sustitir en ella los puntos $(1, 1, -1)$, $(3, -2, -2)$, $(5, 5, 3)$ y encontrar a, b, c para que estos la verifiquen. La ecuación del plano es entonces $2x + 3y - 5z = 10$.

Aplicaciones.

13. a. Los valores son $x_1 = 14$, $x_2 = 16$, $x_3 = 18$.
    b. Los valores son $k_1 = 10,7$, $k_2 = 18,3$, $k_3 = 12,5$.

CAPÍTULO 3

ÁLGEBRA DE MATRICES.

Enfoquemos nuestra atención en el conjunto de todas las matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes reales, denotado como $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$. En el capítulo anterior, utilizamos matrices como herramientas para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Ahora, nuestro objetivo es definir operaciones algebraicas entre los elementos de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$, aprovechando los conocimientos previos y las operaciones algebraicas que empleamos de manera natural con los números reales. Comenzamos definiendo dos operaciones básicas: la multiplicación de una matriz por un escalar y la suma de dos matrices.

1. **Multiplicación por escalares:** La multiplicación de una matriz A por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ implica multiplicar cada entrada de A por λ.

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n} \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}.$$
$$(\lambda, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}) \to \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. **Suma de matrices:** la suma de dos matrices del mismo tamaño implica la suma de sus correspondientes entradas

$$+ : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n} \times \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n} \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$$

$$(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}) \to \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3.1 *Consideremos las matrices* $A = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *y el escalar* $\lambda = -2$. *La matriz resultante* $A + \lambda B$ *es:*

$$\begin{pmatrix}2 & -9 & 6\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 6 & 0\end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 6\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -9 & 6\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 6 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 2 & -6\\ 0 & 0 & -12\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -7 & 0\\ 0 & 0 & -11\\ -1 & 6 & 0\end{pmatrix}.$$

Estas dos operaciones proporcionan al conjunto $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$ una estructura algebraica. En los próximos capítulos, demostraremos que este conjunto con estas dos operaciones, constituye un espacio vectorial real. Podemos destacar que estas operaciones de multiplicación por escalares y suma poseen buenas propiedades y son compatibles entre sí. Estas propiedades se pueden enumerar de la siguiente manera:

1. Conmutatividad de la suma: $A + B = B + A$ para todas las matrices $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$.

2. Asociatividad de la suma: Para todas las matrices A, B, y C en $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$, se cumple $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3. Distributividad de la multiplicación por escalar respecto a la suma de matrices: $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ para todas las matrices $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$ y escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Distributividad respecto de la suma de escalares: Si λ_1 y λ_2 son escalares, para toda matriz A en $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$, se cumple $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$.

5. Asociatividad de la multiplicación por escalar: $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$ para toda matriz $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$ y escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

6. Existencia del elemento neutro (matriz nula): Existe una matriz llamada matriz nula $\mathbf{O}_{m\times n}$ tal que, para cualquier matriz $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$, se cumple $A + \mathbf{O}_{m\times n} = A$. Donde

$$\mathbf{O}_{m\times n} = \begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}.$$

7. Existencia del inverso aditivo: Para cada matriz $A \in \mathbf{Mat}_(\mathbb{R})_{m\times n}$, existe una matriz $B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$ tal que $A + B = \mathbf{O}_{m\times n}$. Denotaremos a dicha matriz B por $-A$. Entonces, si $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$, su inverso aditivo $-A$ es $\begin{pmatrix}-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n}\\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn}\end{pmatrix}$.

Ejemplo 3.2 *Una cadena de venta de autos tiene dos sucursales, una en Montevideo y otra en Punta del Este. La gama de autos que ofrecen se pueden agrupar en: autos eléctricos, autos híbridos (eléctricos y nafta), autos clásicos (solamente nafta). Las ventas mensuales de autos en las dos tiendas durante dos meses se dan en las siguientes tablas:*

Enero	*Montevideo*	*Punta del Este*
Autos eléctricos	20	15
Autos híbridos	10	12
Autos clásicos	8	4

Febrero	*Montevideo*	*Punta del Este*
Autos eléctricos	23	12
Autos híbridos	8	12
Autos clásicos	12	6

Las tablas sugieren dos matrices:

$$E = \begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 10 & 12 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad F = \begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 8 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Para calcular, el cambio en las ventas de cada auto en ambas sucursales, restamos las entradas correspondientes en estas dos matrices. En otras palabras, queremos calcular la diferencia de las dos matrices:

$$F - E = \begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 8 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 10 & 12 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el cambio en las ventas de cada auto es el siguiente:

Sucursal	*Montevideo*	*Punta del Este*
Autos eléctricos	3	−3
Autos híbridos	−2	0
Autos clásicos	4	2

3.0.1. Matrices especiales I:

A continuación mencionaremos algunas matrices de particular importancia.

1. **Matriz diagonal**. Una matriz A de tamaño $n \times n$ es llamada una matriz diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$; esto es, si todos los elementos que están fuera de la diagonal principal son cero.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. **Matriz identidad**. Es una matriz diagonal de tamaño $n \times n$, con la condición adicional, $a_{ii} = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$. Son denotadas por I_n.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo,

$$I_1 = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, I_4 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

3. **Matriz triangular superior**. Una matriz A de tamaño $m \times n$ es llamada triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$; esto es, si todo elemento por debajo de la diagonal principal es cero.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

4. **Matriz triangular inferior**. Una matriz A de tamaño $m \times n$ es llamada triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para $j > i$; esto es, si todo elemento por encima de la diagonal principal es cero.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Definición 3.1 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de tamaño $m \times n$. La matriz $B = (b_{ij})$ de tamaño $n \times m$ donde $b_{ij} = a_{ji}$ se conoce como la traspuesta de A, y se denota por A^t. El trasponer una matriz equivale a intercambiar filas por columnas y viceversa. Si A es la matriz dada por*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},$$

entonces A^t es la matriz

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3.3 *Si* $A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 6\end{pmatrix}$, *entonces* $A^t = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\\ 0 & 6\end{pmatrix}$. *Si* $A = (2, 3, -1)$ *es un vector fila, entonces* $A^t = \begin{pmatrix}2\\ 3\\ -1\end{pmatrix}$ *es un vector columna.*

3.0.2. Matrices especiales II:

1. **Matriz Simétrica**. Una matriz A de tamaño $n \times n$ es llamada simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i, j = 1, \cdots, n$; esto es, si $A^t = A$. Por ejemplo, para $n = 3$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3.4 *Determinar los valores de los coeficientes reales a, b y c, tal que la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 3 & 1 & a+c \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

sea simétrica.

Dado que una matriz es simétrica si $A = A^t$, planteamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 3 & 1 & a+c \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ a-2b+2c & 1 & -2 \\ 2a+b+c & a+c & -4 \end{pmatrix}$$

Comparando elementos, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} a - 2b + 2c = 3 \\ 2a + b + c = 0 \\ a + c = -2 \end{cases}$$

Resolviendo,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{13}{5} \end{array}\right).$$

Encontramos que $a = 11$, $b = -9$ y $c = -13$.

2. **Matriz antisimétrica**. Una matriz A de tamaño $n \times n$ es llamada antisimétrica si $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo $i, j = 1, \cdots, n$; esto es, si $A^t = -A$. Esto implica que los elementos en la diagonal de la matriz son iguales a cero, ya que $a_{ii} = -a_{ii}$. Por ejemplo, para $n = 3$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 3.1 *Toda matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ se puede expresar de manera única como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.*

Demostración: Dada cualquier matriz A de tamaño $n \times n$, podemos expresarla como la suma de dos matrices:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t).$$

Observemos que la matriz $A + A^t$ es simétrica. Esto se puede verificar porque $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$. Del mismo modo, podemos demostrar que la matriz $A - A^t$ es antisimétrica, ya que $(A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)$. Por lo tanto, las matrices $\frac{1}{2}(A + A^t)$ y $\frac{1}{2}(A - A^t)$ también son simétrica y antisimétrica, respectivamente.

Para demostrar la unicidad, supongamos que $A = C + D = E + F$, donde C y E son matrices simétricas, y D y F son matrices antisimétricas. Entonces, $C - E = C - F$ es una matriz que resulta ser tanto simétrica como antisimétrica. Esto implica que $C - E = C - F = \mathbf{O}_{n\times n}$, es decir, la matriz nula. Por lo tanto, $C = E$ y $D = F$, lo que demuestra la unicidad de la descomposición en matriz simétrica y antisimétrica.

Ejemplo 3.5 *Para expresar la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -3 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica, podemos usar la técnica usada en la demostración (constructiva) de la proposición anterior:*

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t).$$

Siendo $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, tenemos que:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -3 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{7}{2} \\ 1 & 6 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & -\frac{1}{2} \\ -4 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

3.0.3. Partición de matrices.

Consideremos una matriz A de tamaño $m \times n$. En la disposición rectangular de números reales que representa A, podemos trazar líneas verticales y horizontales para dividirla en secciones, como se muestra a continuación:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & \cdots & a_{4(n-1)} & a_{4n} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & \cdots & a_{5(n-1)} & a_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{m(n-1)} & a_{mn} \end{array}\right).$$

La matriz queda así dividida en bloques rectangulares con sus respectivos elementos, lo que se conoce como una **partición de la matriz** A. Estos bloques resultantes de la partición pueden considerarse como submatrices independientes y se les denomina **submatrices** de la matriz A.

Las matrices de bloques consisten en matrices de mayor tamaño construidas mediante la combinación de matrices más pequeñas. Estas matrices son una herramienta ampliamente utilizada en diversos campos y simplifican cálculos que, de otro modo, podrían resultar complicados. Cada matriz puede ser concebida como una matriz compuesta por bloques, con una cierta forma de partición. Por ejemplo si

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3 & 2 & -3\\ -2 & 0 & 5 & 1 & -3\\ 3 & -5 & 0 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

se puede efectuar en ella la siguiente partición:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|cc}\color{red}{0} & \color{red}{2} & \color{red}{-3} & \color{blue}{2} & \color{blue}{-3}\\ \color{red}{-2} & \color{red}{0} & \color{red}{5} & \color{blue}{1} & \color{blue}{-3}\\ \hline \color{green}{3} & \color{green}{-5} & \color{green}{0} & 2 & -3\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$$

en donde las submatrices A_{ij} son:

$$A_{11}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -2 & 0 & 5\end{pmatrix}, A_{12}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -3\end{pmatrix}, A_{21}=\begin{pmatrix}3 & -5 & 0\end{pmatrix}, A_{22}=\begin{pmatrix}2 & -3\end{pmatrix}.$$

En la matriz A anterior se puede también efectuar la siguiente partición:

$$A=\left(\begin{array}{cc|c|cc}0 & 2 & -3 & 2 & -3\\ -2 & 0 & 5 & 1 & -3\\ \hline 3 & -5 & 0 & 2 & -3\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\end{pmatrix}$$

en donde las submatrices A_{ij} son:

$$A_{11}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}, A_{12}=\begin{pmatrix}-3\\ 5\end{pmatrix}, A_{13}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -3\end{pmatrix}, A_{21}=\begin{pmatrix}3 & -5\end{pmatrix}, A_{22}=\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}, A_{23}=\begin{pmatrix}2 & -3\end{pmatrix}.$$

Es evidente que existen múltiples formas de realizar particiones en una matriz. En resumen, podemos concebir una matriz de bloques como una especie de matriz de matrices. Es decir, una matriz de bloques en $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$ puede ser vista como:

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ A_{l1} & A_{l2} & \cdots & A_{lk}\end{pmatrix}$$

en donde cada submatriz A_{ij} es una matriz en $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m_i\times n_j}$ para algunos enteros positivos $m_1,\cdots,m_l$ y $n_1,\cdots,n_k$ tales que $m_1+\cdots+m_l=m$ y $n_1+\cdots+n_k=n$. La matriz tiene entonces l filas de bloques y k columnas de bloques.

Consideremos la matriz A expresada de la siguiente manera:

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & A_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & A_{lk}\end{pmatrix}.$$

En este caso, diremos que A **es diagonal por bloques**.

Ejemplo 3.6 *Consideremos A dada por:*

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&0&0\\5&4&1&0&0\\2&6&4&0&0\\0&0&0&2&-5\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&3&0&0\\5&4&1&0&0\\2&6&4&0&0\\\hline 0&0&0&2&-5\\0&0&0&1&-3\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&0\\0&A_{22}\end{pmatrix}$$

donde los bloques no nulos son

$$A_{11}=\begin{pmatrix}1&0&3\\5&4&1\\2&6&4\end{pmatrix},A_{22}=\begin{pmatrix}2&-5\\1&3\end{pmatrix}.$$

3.1. Producto matricial.

La tercera operación básica que abordaremos es la multiplicación matricial. Para fundamentar su definición, exploraremos dos ejemplos que nos ayudarán a comprender mejor esta operación, la cual puede parecer inicialmente poco intuitiva.

1. **Un problema de consumo:** Supongamos que una empresa constructora tiene contratos para construir 3 estilos de casa: moderno, nórdico y colonial. La cantidad de material a emplear en cada tipo de casa está dado por la siguiente tabla (en ciertas unidades):

	Hierro	Madera	Vidrio	Pintura	Ladrillos
Moderno	5	20	16	7	17
Nórdico	7	18	12	9	21
Colonial	6	25	8	5	13

   a) Si quisieramos saber cuántas unidades de cada material serán empleadas si va a construir 5, 7 y 12 casas de tipo moderno, nórdico y colonial, respectivamente. ¿Qué cuenta debemos hacer?

   b) Si los precios por unidad de hierro, madera, vidrio, pintura y ladrillos son 15, 8, 5, 1 y 10.

   c) ¿Cuál es el costo total del material a emplear?

   d) ¿Cómo sería la función de costo si quiero construir M casas de tipo moderno, N de tipo nórdico y C de tipo colonial?

2. **Un problema de cambio de variables:** Supongamos que tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas:

$$S=\begin{cases}x_1+4x_2+3x_3+5x_4&=1\\x_1-3x_2-2x_3+3x_4&=5\\x_1-x_2-2x_3+x_4&=0\end{cases}$$

   Recordemos que la matriz asociada al sistema S es

$$A=\begin{pmatrix}1&4&3&5\\1&-3&-2&3\\1&-1&-2&1\end{pmatrix}.$$

Deseamos cambiar las variables x_1, x_2, x_3 y x_4 de este sistema por nuevas variables y_1 y y_2, relacionadas de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = 3y_1 + 2y_2 \\ x_3 = 3y_2 \\ x_4 = y_1 - y_2 \end{cases}$$

Al realizar las sustituciones correspondientes, obtenemos:

$$\begin{cases} (y_1 + y_2) + 4(3y_1 + 2y_2) + 3(3y_2) + 5(y_1 - y_2) & = 1 \\ (y_1 + y_2) - 3(3y_1 + 2y_2) - 2(3y_2) + 3(y_1 - y_2) & = 5 \\ (y_1 + y_2) - (3y_1 + 2y_2) - 2(3y_2) + (y_1 - y_2) & = 0 \end{cases}$$

Simplificando cada ecuación, la nueva expresión para el sistema S es:

$$S = \begin{cases} 18y_1 + 13y_2 & = 1 \\ -5y_1 - 14y_2 & = 5 \\ -y_1 - 8y_2 & = 0 \end{cases}$$

con matriz asociada $C = \begin{pmatrix} 18 & 13 \\ -5 & -14 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$. Para comprender la relación entre las matrices A y C, es necesario involucrar a una tercera matriz que llamaremos B, la cual estará relacionada con la forma en que se expresan las variables x_1, x_2, x_3 y x_4 en función de las variables y_1 y y_2. Las ecuaciones de cambio de variable,

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = 3y_1 + 2y_2 \\ x_3 = 3y_2 \\ x_4 = y_1 - y_2 \end{cases}$$

pueden ser consideradas como un sistema de ecuaciones, donde x_1, x_2, x_3 y x_4 son valores conocidos, y las incógnitas ahora son y_1 y y_2. Por lo tanto, la matriz asociada a este sistema será

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora nos preguntamos cuál es la relación entre las matrices A, B y C.

Con el propósito de ofrecer una resolución más sencilla a los problemas planteados presentamos la siguiente definición.

Definición 3.2 *Sea $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times p}$ y $B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{p\times n}$. Definimos el producto [1] entre matrices como:*

$$\begin{aligned} \bullet : M_{m\times p}(\mathbb{R}) \times M_{p\times n}(\mathbb{R}) &\rightarrow M_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ (A, B) &\rightarrow A \cdot B = C \end{aligned}$$

donde $C = (c_{ij})$ con $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.

[1] Si las matrices tiene las dimensiones adecuadas para que tenga sentido el producto se dice que las mismas son conformables.

Esquemáticamente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix}_{m\times p} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix}_{p\times n} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

donde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.

Ejemplo 3.7 *1. Usando definición del producto $C = AB$, donde A y B son dos matrices 3×3, obtenemos:*

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar+bu+cx & as+bv+cy & at+bw+cz \\ dr+eu+fx & ds+ev+fy & dt+ew+fz \\ gr+hu+ix & gs+hv+iy & gt+hw+iz \end{pmatrix}.$$

Aunque parece una cantidad considerable de operaciones algebráicas, la construcción de la matriz en el lado derecho es directa si seguimos la regla que establece que el elemento en la fila i y columna j de la matriz C se obtiene multiplicando la fila i de A con la columna j de B. Por ejemplo, para obtener el elemento en la fila 2 y columna 3 de C, tomamos la fila 2 de A y la multiplicamos con la columna 3 de B para producir $dt + ew + fz$. Repitiendo este proceso, obtenemos cada elemento de C.

2. Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces AB es una matriz de tamaño 3×2.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + 2\cdot 1 + (-3)\cdot 0 & 0\cdot 1 + 2\cdot 2 + (-3)\cdot 1 \\ -2\cdot 0 + 0\cdot 1 + 5\cdot 0 & -2\cdot 1 + 0\cdot 2 + 5\cdot 1 \\ 3\cdot 0 + (-5)\cdot 1 + 0\cdot 0 & 3\cdot 1 + (-5)\cdot 2 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}.$$

Observación 3.1 *Si $A_1, \cdots, A_m$ son las filas de la matriz A, y $B^1, \cdots, B^n$ son las columnas de B, la entrada ij de la matriz AB es igual a el producto de A_iB^j. Así,*

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B^1 & A_1B^2 & \dots & A_1B^n \\ A_2B^1 & A_2B^2 & \dots & A_2B^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_mB^1 & A_mB^2 & \dots & A_mB^n \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Esta forma de representación resulta útil cuando queremos entender cómo se relacionan las filas y columnas de la matriz AB en función de las filas y columnas de las matrices A y B.

Retomemos la discusión con la cual iniciamos esta sección y que nos motivaban a definir el producto matricial de esta manera.

1. **Un problema de consumo:**

a) Llamemos A a la matriz que representa a la tabla con los datos, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

Notar que para calcular la cantidad total de hierro a utilizar, debemos multiplicar por 5 a la cantidad necesaria para construir una casa de tipo moderno, por 7 a la cantidad necesaria para construir una casa de tipo nórdico, por 12 a la de tipo colonial y luego sumar estas cantidades. Luego razonamos de la misma forma para calcular la cantidad de los otros materiales. Es claro entonces que podemos definir matriz $B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{1\times 3}$ como $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 12 \end{pmatrix}$ que contiene las cantidades a construir de cada tipo de casa y tenemos que

$$BA = \begin{pmatrix} 146 & 526 & 260 & 158 & 388 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, se necesitan 146, 526, 260, 158 y 388 unidades de hierro, madera, vidrio, pintura y ladrillos respectivamente.

b. En este caso, definimos una matriz de costos $C \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{5\times 1}$ como $C = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 5 & 1 & 10 \end{pmatrix}^t$ y tenemos que la matriz

$$AC = \begin{pmatrix} 492 \\ 528 \\ 465 \end{pmatrix}$$

guarda los precios de por unidad de cada tipo de casa; es decir, los precios por unidad de casa de tipo moderno, nórdico y colonial son 492 528 y 465 respectivamente.

c. Utilizando las partes anteriores, podemos calcular esto como BAC y concluimos que el costo total de construir 5 casas de tipo moderno, 7 de tipo nórdico y 12 de tipo colonial es 11,732.

2. **Un problema de cambio de variables:** Una manera más eficiente de transformar el sistema

$$S = \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 & = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 & = 0 \end{cases}$$

de las variables x_1, x_2, x_3 y x_4 a un nuevo sistema en la variables y_1 y y_2 sería simplemente considerar el sistema cuya matriz resultante es el producto de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 13 \\ -5 & -14 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} = C.$$

Proposición 3.2 *Si A, B y C son matrices (con tamaños tales que los productos de matrices dados estén definidos) y c es un escalar, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Propiedad asociativa de la multiplicación:* $A \cdot (BC) = (A \cdot B) \cdot C$
2. *Propiedad distributiva:* $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
3. *Propiedad distributiva:* $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
4. *Propiedad asociativa de la multiplicación por escalares:* $c \cdot (AB) = (c \cdot A) \cdot B = A \cdot (c \cdot B)$

Demostración: Mostraremos únicamente la propiedad asociativa de la multiplicación. La demostración de las propiedades restantes queda a cargo del lector interesado. Primero notamos que $A \cdot (BC)$ y $(A \cdot B) \cdot C$ tienen el mismo tamaño. Además,

$$(A(BC))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(BC)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}(a_{ik}b_{kl})c_{lj} = ((AB)C)_{ij}$$

Observación 3.2 *Listemos ahora algunas propiedades adicionales y comentarios sobre el producto matricial.*

1. ***Ecuaciones matriciales:*** *Consideremos el sistema S de m ecuaciones lineales con n incógnitas*

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}.$$

Sea A la matriz del sistema S, de tamaño $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Consideremos también la matriz X de tamaño $n \times 1$ formada por las incógnitas del sistema

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

y la matriz B de tamaño $m \times 1$ formada por los términos independientes $b_1, b_2, \cdots b_m$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Entonces el sistema S puede escribirse usando el producto matricial como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

*o por la **ecuación matricial** $AX = B$.*

2. ***No conmutatividad del producto matricial:*** *La propiedad de no conmutatividad del producto matricial se manifiesta en el hecho de que, en general, para matrices cuadradas A y B de tamaño $n \times n$, las expresiones AB y BA son diferentes, salvo en casos particulares. Por ejemplo, si consideramos las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

notamos que AB y BA no son iguales:

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 13 & 6 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

Cuando A es de tamaño $m \times p$ y B es de tamaño $p \times m$, con $m \neq p$, las matrices AB y BA están definidas pero sus tamaños no coinciden. Por último, si A es de tamaño $m \times p$ y B es de tamaño $p \times n$, con $m \neq n$, la matriz AB está definida, pero BA carece de significado.

3. ***Potencias de matrices cuadradas:*** *La propiedad de asociatividad del producto matricial nos permite definir las potencias de matrices cuadradas. Para una matriz A de tamaño $n \times n$ y para cualquier entero $k \geq 1$, utilizamos la siguiente notación para representar las potencias de A:*

$$\begin{gathered} A^1 = A, \\ A^2 = AA, \\ A^3 = AA^2 = A^2A = AAA, \\ \vdots \\ A^k = A^{k-1}A = AA^{k-1}. \end{gathered}$$

Por ejemplo, consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculando las potencias de A, obtenemos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 6 & 22 \\ 11 & 39 \end{pmatrix}.$$

Podemos observar que, en general, las entradas ij de la matriz A^2 no son simplemente las entradas ij al cuadrado de la matriz A.

4. ***Producto matricial, traspuestas y matrices simétricas.*** *Sean A y B matrices de tamaños adecuados para que el producto AB esté definido. En tal caso, la traspuesta del producto es igual al producto de las traspuestas en orden inverso, es decir, $(AB)^t = B^tA^t$.*

   Para demostrarlo, primero verifiquemos que los tamaños sean los mismos. Ahora, si A se compone de las entradas a_{ij} y B se compone de las entradas b_{jk}, entonces la matriz $C = AB$ está compuesta por las entradas c_{ik}, donde:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = b_{1k}a_{i1} + + \cdots + b_{nk}a_{in}.$$

   Denotemos las traspuestas de A, B, y C como $A^t = (a'_{ji}), B^t = (b'_{kj})$ y $C^t = (c'_{ki})$ respectivamente. Utilizando la definición de traspuesta, podemos afirmar que $a'_{ji} = a_{ij}, b'_{kj} = b_{jk}$ y $c'_{ki} = c_{ik}$. Así, podemos expresar c'_{ki} como:

$$c'_{ki} = b'_{k1}a'_{1i} + + \cdots + b'_{kn}a'_{ni}$$

Lo cual implica $C^t = B^tA^t$, como queríamos demostrar.

Podemos verificar la propiedad anterior utilizando el ejemplo en el que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
Primero, calculamos AB y su traspuesta $(AB)^t$:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 6 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 11 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculemos las traspuestas de A y B, es decir A^t y B^t:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, calculamos B^tA^t :

$$B^tA^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 11 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es importante destacar que esta propiedad nos permite mostrar que, para cualquier matriz A de tamaño $m \times n$, las matrices AA^t y A^tA son siempre matrices simétricas. La justificación es la siguiente:

$$(AA^t)^t = (A^t)^tA^t = AA^t$$
$$(A^tA)^t = (A)^t(A^t)^t = A^tA.$$

Para pensar: *Proporciona un ejemplo de dos matrices de tamaño 2×2, A y B, tales que $(AB)^t \neq A^tB^t$.*

5. ***Multiplicación de matrices. Un desafio informático y computacional.*** *La multiplicación de matrices es un cálculo fundamental con un alcance amplio en diversas aplicaciones, desde visualizar imágenes en pantallas hasta simular fenómenos complejos en la física. Además, juega un papel esencial en el campo del aprendizaje automático. Optimizar este cálculo podría tener un impacto significativo en muchas tareas computacionales diarias, reduciendo costos y ahorrando energía. La multiplicación de matrices es una herramienta omnipresente en la ingeniería, utilizada en una variedad de problemas numéricos.*

   En esencia, una matriz es una disposición ordenada de números que representa información variada. La multiplicación de matrices implica la combinación de filas y columnas de matrices diferentes. Esta operación, que parece simple, puede volverse compleja rápidamente. La multiplicación de matrices grandes consume recursos considerables en términos de tiempo y energía.

   Cada par de números en las matrices debe multiplicarse individualmente para construir una nueva matriz, y a medida que las matrices crecen, el problema se vuelve desafiante. Se estima que hay más métodos para resolver la multiplicación de matrices que estrellas en nuestra galaxia, lo que demuestra la riqueza de enfoques que pueden utilizarse para abordar esta operación aparentemente básica.

   En resumen, la multiplicación de matrices, aunque esencial, puede ser un proceso intensivo en recursos. Dado su impacto en una amplia gama de aplicaciones, desde la tecnología hasta la ciencia, la búsqueda de formas más eficientes para realizar este cálculo sigue siendo un área activa de investigación y desarrollo. Una manera de simplificar los cálculos involucrados en el producto matricial es efectuar la multiplicación de dos matrices en las que se ha realizado previamente una determinada partición.

3.1.1. Multipliación de matrices de bloques.

Sea A una matriz de tamaño $m \times p$ y B una matriz de tamaño $p \times n$. Supongamos que las p columnas de A están divididas en dos grupos: el primero formado por las s columnas de una submatriz M_1 y el segundo por las $p - s$ columnas, que formarán la submatriz M_2. Hagamos una subdivisión análoga con las filas de la matriz B, de modo que B se divida en una matriz $s \times r$, N_1, y una matriz $(n - s) \times r$, N_2. La fórmula del producto $AB = C$ se descompone en dos partes correspondientes:

$$c_{ik} = (a_{i1}b_{1k} + \cdots + a_{is}b_{sk}) + (a_{i,s+1} + \cdots + a_{ip}b_{pk})$$

En el primer paréntesis aparecen solo la fila i de la primera submatriz M_1 de A y la columna k de la submatriz superior N_1 de B. Por lo tanto, este primer paréntesis es exactamente d_{ik}, el elemento de la fila i y la columna k del producto M_1N_1. Del mismo modo, el segundo paréntesis es el término d^*_{ik} del producto M_2N_2. Por lo tanto, $c_{ik} = d_{ik} + d^*_{ik}$.

A continuación, explicaremos cómo realizar la multiplicación de dos matrices sobre las cuales hemos tomado previamente una partición adecuada. Para simplificar la notación involucrada, nos centraremos en matrices que han sido divididas en cuatro submatrices.

Supongamos ahora que en las matrices A y B se ha realizado una partición que permite escribirlas como:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

donde $A_{ij} \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m_i \times p_j}$ para $i = 1, 2$ y $j = 1, 2$, además de que $p_1 + p_2 = p$ y $m_1 + m_2 = m$. Del mismo modo, $B_{ij} \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n_i \times p_j}$ para $i = 1, 2$ y $j = 1, 2$, y también $p_1 + p_2 = p$ y $n_1 + n_2 = n$. El producto de AB puede efectuarse como

$$AB = C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

Una observación importante es que todas las operaciones anteriores entre las subamtrices A_{ij} y B_{ij} están bien definidas. Por ejemplo, consideremos las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Supongamos que deseamos calcular el producto AB. Podemos utilizar una partición adecuada de estas matrices para simplificar el cálculo.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & 0_3 \\ I_3 & I_3 \end{pmatrix} \quad B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_{11} & I_3 \\ 0_3 & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & 0_3 \\ I_3 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & I_3 \\ 0_3 & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + 0_3B_{22} & A_{11}I_3 + 0_3B_{22} \\ I_3B_{11} + I_30_3 & I_3I_3 + I_3B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11} \\ B_{11} & I_3 + B_{22} \end{pmatrix}.$$

Solo nos resta calcular

$$A_{11}B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 9 & 18 & 6 \\ 16 & 32 & 6 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$AB = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \color{red}{3} & \color{red}{6} & \color{red}{4} & 1 & 0 & 3 \\ \color{red}{9} & \color{red}{18} & \color{red}{6} & 5 & 4 & 1 \\ \color{red}{16} & \color{red}{32} & \color{red}{6} & 2 & 6 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \color{blue}{3} & \color{blue}{-2} & \color{blue}{-2} \\ 2 & 4 & 0 & \color{blue}{1} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} \\ 1 & 2 & 1 & \color{blue}{1} & \color{blue}{-1} & \color{blue}{6} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 9 & 18 & 6 & 5 & 4 & 1 \\ 16 & 32 & 6 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

3.1.2. Matrices especiales III:

1. **Matrices nilpotentes.** Una matriz de tamaño $n \times n$ recibe el nombre de nilpotente si existe un entero $k \geq 1$ tal que $A^k = \mathbf{O}_n$, donde $\mathbf{O}_n$ es la matriz nula. Al menor entero para el cual se cumple esta propiedad se le denomina **índice de nilpotencia** de la matriz A. Por ejemplo, consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es nilpotente, con un índice de nilpotencia igual a 2. Esto se puede verificar al elevar la matriz al cuadrado:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En general, si $A = (a_{ij})$ es una matriz tal que $a_{ij} = 0$ para $i \geq j$, entonces A es nilpotente. ¿Cúal es su índice de nilpotencia?

2. **Matrices idempotentes.** Una matriz de tamaño $n \times n$ recibe el nombre de idempotente si $A^2 = A$. Por ejemplo, consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es idempotente. Esto se puede verificar al elevar la matriz al cuadrado:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

La relación entre el producto matricial y la trasposición de matrices, como se enunció en la sección anterior, nos permite demostrar que una matriz A es idempotente si y solo si A^t también lo es.

Para pensar: Demostrar que si A y B son matrices de tamaño $n \times n$ tales que $AB = A$ y $BA = B$ entonces A y B son matrices idempotentes.

3. **Matrices involutorias.** Una matriz de tamaño $n \times n$ recibe el nombre de involutoria si $A^2 = I_n$. Por ejemplo, consideremos la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Esta matriz es involutoria. Esto se puede verificar al elevar la matriz al cuadrado:
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Relación entre matrices idempotentes e involutorias: Si A es una matriz de tamaño $n \times n$ involutoria, entonces las matrices $\frac{1}{2}(I_n + A)$ y $\frac{1}{2}(I_n - A)$ son idempotentes. En efecto,
$$\left(\tfrac{1}{2}(I_n + A)\right)^2 = \tfrac{1}{4}(I_n + A)^2 = \tfrac{1}{4}(I_n^2 + 2A + A^2) = \tfrac{1}{4}(I_n + 2A + I_n) = \tfrac{1}{4}(2I_n + 2A) = \frac{1}{2}(I_n + A).$$
De igual forma,
$$\left(\tfrac{1}{2}(I_n - A)\right)^2 = \tfrac{1}{4}(I_n - A)^2 = \tfrac{1}{4}(I_n^2 - 2A + A^2) = \tfrac{1}{4}(I_n - 2A + I_n) = \tfrac{1}{4}(2I_n - 2A) = \tfrac{1}{2}(I_n - A).$$

Para pensar: Si A_0 es una matriz arbitraria de tamaño $n \times n$. Demostrar que la matriz A de tamaño $2n \times 2n$
$$A^2 = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A_0 & -I_n \end{pmatrix}$$
es involutoria.

Ejemplo 3.8 ***Ejercicio 4. Primer parcial GAL1 interactiva. Septiembre 2023.*** *De las siguientes afirmaciones, decir cuáles son verdaderas (V) y cuáles son falsas (F):*

A. *Para todas las matrices $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$, si $AB = \mathbf{0}_n$ entonces $A = \mathbf{0}_n$ o $B = \mathbf{0}_n$.*

B. *Para todas las matrices $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ se cumple que $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.*

C. *Para todas las matrices $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$, se cumple que $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$.*

D. *Para todas las matrices $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$, se cumple que $A^2B + AB^2 = AB(A + B)$.*

Solución:

A. *Falso. Contraejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pero ninguna de las dos matrices es la nula.*

B. *Verdadero. Aplicando la propiedad distributiva del producto frente a la suma, tenemos: $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = AA + AB + BA + BB = A^2 + AB + BA + B^2$.*

C. *Verdadero. Aplicando la propiedad distributiva del producto frente a la suma, tenemos: $(A + B)(A - B) = AA - AB + BA - BB = A^2 - AB + BA - B^2$.*

D. *Falso: Tomemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces, $A^2B + AB^2 \neq AB(A + B)$.*

3.2. Práctico 2.

Práctico 2 – Matrices, operaciones entre matrices, y aplicaciones[2]

3.2.1. Matrices.

1. Construir las siguientes matrices

$a)$ $A = ((a_{ij})) \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 4},\ a_{ij} = i + j$ $\qquad b)$ $B = ((b_{ij})) \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3},\ b_{ij} = \begin{cases} i & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases}$

2. Consideremos matrices A y B de dimensión 4×5 y matrices C, D y E de dimensiones 5×2, 4×2 y 5×4 respectivamente. Todas las matrices tienen sus entradas en el mismo conjunto numérico. Determine cuáles de las siguientes operaciones están definidas:

$$BA, \quad AC + D, \quad AE + B, \quad AB + B, \quad E(A + B), \quad EAC.$$

En caso de estarlo, indique las dimensiones de la matriz resultante.

3. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Realizar las siguientes operaciones: AB, BC, $B + B^t$, AA^t, A^tA, $(AB)C$, $A(BC)$ y $DE - ED$.

4. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar todas las matrices 2×2 que conmuten con A. Dar un ejemplo de una matriz que no conmute con A.

5. Sea $\delta(i_0, j_0) \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ definida por

$$\delta(i_0, j_0)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0 \text{ y } j = j_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   $a)$ Dada $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$, describir la matriz $\delta(1, 1)A$ en función de los valores $a_{i,j}$. Repetir para $A\delta(1, 1)$.

   $b)$ Dada $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$, describir la matriz $\delta(1, 2)A$ en función de los valores $a_{i,j}$. Repetir para $A\delta(1, 2)$.

   $c)$ Describir $\delta(i_0, j_0)A$ para i_0, j_0 cualesquiera.

6. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

   $a)$ Si la primera y tercera columna de B son iguales, también lo son la primera y tercera columna de AB;

   $b)$ Si la primera y tercera fila son iguales en B, también lo son en AB;

[2] Denotaremos I_n y $\mathbf{0}_n$ a la matriz identidad y la matriz nula de tamaño $n \times n$. En caso que se sobrentienda el tamaño notaremos simplemente I y 0.

c) Si la primera y tercera fila son iguales en A, también lo son en AB;

d) Si A y B son matrices $n \times n$ entonces

1) $(AB)^2 = A^2B^2$;
2) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
3) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

e) Si $A \neq O_n$ y $AB = AC \Rightarrow B = C$

f) Si el producto AB entre las matrices A y B está definido entonces también lo está el producto BA.

3.2.2. Operadores en matrices y matrices especiales.

1. **Trasposición de matrices**

a) Demostrar que $(A+B)^t = A^t + B^t$, $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ y $(AB)^t = B^tA^t$ (siendo A y B conformables).

b) Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ tal que $A^t = \lambda A$ donde $\lambda \neq \pm 1$. Mostrar que A es 0_n.

c) Sean A y B matrices cuadradas tales que $A = qB^t$ y $B = pA^t$, para un par de números p, q. Probar que $A = 0 = B$ o $pq = 1$.

2. **Traza de una matriz**

Sea A una matriz cuadrada. Se define la **traza** $tr(A)$ de la matriz A como la suma de todos los elementos de su diagonal. Entonces, si $A = ((a_{ij}))$ es una matriz $n \times n$ tendremos

$$tr(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Probar:

a) Si A y B son matrices cuadradas $n \times n$:

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B), \qquad tr(\alpha A) = \alpha\, tr(A), \qquad tr(A) = tr(A^t)$$

b) Sabiendo que $tr(AB) = tr(BA)$, demostrar que no existen matrices cuadradas A y B $n \times n$ tales que $AB - BA = I_n$.

c) Sea A una matriz de $n \times n$. Probar que $tr(AA^t) \geq 0$ y $tr(AA^t) = 0$ si solo si $A = 0_n$.

3.2.3. Geometría.

En los ejercicios de esta sección los puntos del plano se representarán como matrices 2×1. Por ejemplo el punto (1,3) se representará como $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^t$ y a veces también como $(1,3)^t$.

1. **Matriz de la simetría respecto a la recta $x = y$.**

Sea $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por

$$S\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a) Representar en el plano los siguientes puntos $\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^t$, $\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}^t$, $\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^t$ y $\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}^t$, y sus respectivas imágenes por la función S. Para estos puntos dibujar un flecha entre p y $S(p)$. Interpretar geométricamente.

b) Bosquejar las siguientes figuras y sus imágenes por S.

a) $x = 5$ *b*) $x + y = 0$ *c*) $x - y = 0$ *d*) $x - y = 2$

c) Probar que la función S es biyectiva y calcular su inversa.

2. **Matriz de giro de ángulo θ.**

Para un número $\theta \in [0, 2\pi)$ se considera la matriz $G_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, y se define la función $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante la fórmula

$$R_\theta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = G_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a) Calcular para $(1, 0)^t$ y $(0, 1)^t$ sus imágenes al aplicar R_θ e interpretar geométricamente el resultado (Sugerencia: bosquejar en el plano los puntos y sus imágenes).

b) Dados θ y ψ, ¿cuál es el resultado Z de calcular $Y = R_\theta(X)$ siendo $X = (1, 0)^t$ y luego $Z = R_\psi(Y)$? ¿Cómo se interpreta esto geométricamente?

c) Comparar el resultado anterior con la acción de la función $R_{\theta+\psi}$. ¿Qué famosas fórmulas trigonométricas pueden deducirse de estas manipulaciones?

3.2.4. Aplicaciones.

1. Una empresa constructora tiene contratos para construir 3 estilos de casa: moderno, nórdico y colonial. La cantidad de material a emplear en cada tipo de casa está dado por la siguiente tabla (en ciertas unidades):

	Hierro	Madera	Vidrio	Pintura	Ladrillos
Moderno	5	20	16	7	17
Nórdico	7	18	12	9	21
Colonial	6	25	8	5	13

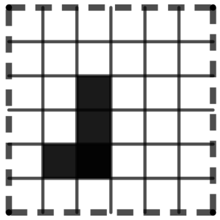
a) Utilizar un producto de matrices para determinar cuántas unidades de cada material serán empleadas si va a construir 5, 7 y 12 casas de tipo moderno, nórdico y colonial, respectivamente.

b) Si los precios por unidad de hierro, madera, vidrio, pintura y ladrillos son 15, 8, 5, 1 y 10.¿Cuál es el precio unitario de cada tipo de casa?

c) ¿Cuál es el costo total del material a emplear?

d) ¿Cómo sería la función de costo si quiero construir M casas de tipo moderno, N de tipo nórdico y C de tipo colonial?

2. **Imágenes** En este ejercicio se estudiará como a partir de operaciones de matrices podemos manipular una imagen. Una imagen en blanco y negro (sin grises) puede representarse como una matriz de ceros y unos, donde un 0 representa un bit negro mientras que un 1 representa uno blanco.



$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Figura 3.1: Imagen de ejemplo (donde cada cuadrado representa un bit) junto a su matriz

a) Asumiendo que lo importante es la parte negra y se quiere trasladar un lugar hacia la derecha. Encontrar $B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{6\times 6}$ tal que AB sea una solución al problema.

b) Suponga ahora que se quiere reflejar la imagen (como si se viera en un espejo). Encontrar $B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{6\times 6}$ tal que AB sea una solución al problema.

c) Determine alguna forma de pasar de la imagen a su negativo (intercambiar bits blancos y negros) a partir de operaciones con matrices.

3.2.5. Solución a ejercicios seleccionados del Práctico 2.

Matrices.

1 a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2 Recordar que dos matrices A y B se llaman conformables si $A \in m \times n$ y $B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times p}$. En este caso podemos definir el producto AB. Además, la suma de matrices está definida solo para matrices del mismo tamaño.

Dado que A y B no son conformables, la operación BA no está definida en este caso. La operación AC por otro lado, sí puede hacerse pues $C \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{5\times 2}$. La matriz resultante de este producto es de 4×2 y por lo tanto puede sumarse con D.

La operación AE puede hacerse pues A y E son matrices conformables y el resultado es una matriz de 4×4. Sin embargo, la matriz B es de 4×5 por lo que no se puede hacer $AE + B$.

De la misma forma que no se puede calcular BA, no puede calcularse AB en este caso. Por lo tanto, no puede hacerse la operación $AB + B$.

A y B pueden sumarse pues son del mismo tamaño y su resultado es una matriz $A + B \in M_{4\times 5}$. Dado que $E \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{5\times 4}$, no podemos calcular $E(A + B)$.

Por último, como dijimos antes, se puede calcular AC y da una matriz de 4×2 y por lo tanto podemos calcular EAC.

En conclusión, se pueden hacer las operaciones $AC + D$, $E(A + B)$ y EAC que tienen dimensiones 4×2, 5×5 y 5×2 respectivamente

3 Recordamos que dadas dos matrices conformables $A = ((a_{ij})) \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$ y $B = ((b_i j)) \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times p}$, el producto $AB = ((c_{ij})) \in M_{m\times p}$ donde $c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{hj}$. Utilizando esta definición, calculamos los siguientes productos.

$$AB = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, BC = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 3 \\ 5 & 9 & 9 \end{pmatrix}, B + B^t = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, AA^t = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^tA = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, (AB)C = \begin{pmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 9 & 3 & 15 \\ 6 & 24 & 12 \end{pmatrix}, DE - ED = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 1 \\ 22 & -12 & 2 \\ 11 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

5 Observamos a partir de la definición que la matriz $\delta(i_0, j_0)$ es una matriz que tiene un 1 en la posición (i_0, j_0) y ceros en el resto de las entradas.

a. Para el caso en que $(i_0, j_0) = (1, 1)$, la es de la forma

$$\delta(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo que el producto $\delta(1,1)A$ es

$$\delta(1,1)A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, multiplicar a izquierda por $\delta(1,1)$ devuelve una matriz cuya primer fila corresponde a la primer fila de A y tiene ceros en el resto de las entradas.

Si ahora multiplicamos A a derecha por $\delta(1,1)$ obtenemos

$$A\delta(1,1) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, multiplicar a derecha copia la primer columna de A en la primer columna del producto.

b. Repitiendo el procedimiento de la parte anterior, tenemos que ahora la matriz $\delta(1,2)$ es

$$\delta(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicando A a izquierda y derecha por esta nueva matriz, tenemos lo siguiente

$$\delta(1,2)A = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, A\delta(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & \dots & 0 \\ 0 & a_{21} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

c. De las partes anteriores podemos concluir que multiplicando a izquierda por $\delta(i_0, j_0)$ copiamos filas de A y mutiplicando a derecha copiamos columnas. Además i_0 indica cuál fila/columna estamos copiando y j_0 indica en qué fila/columna de la matriz producto se va a devolver. Es decir, $\delta(i_0, j_0)A$ es una matriz que tiene la fila F_{i_0} de A en su fila F_{j_0} y ceros en el resto de las entradas, mientras que $A\delta(i_0, j_0)$ es una matriz que tiene la columna C_{i_0} de A en su columna C_{j_0} y ceros en el resto de las entradas.

6 a. Verdadera. La idea es ver que para calcular los elementos de la primera columna de AB se usan las filas de A y la primera columna de B. Para la tercera columna de AB se usan las filas de A y la tercera columna de B que es igual a la primera.

b. Falsa.

c. Verdadera.

d. 1. Falsa. Tenemos que

$$(AB)^2 = (AB)(AB)A(BA)B$$

Pero como no vale la propiedad conmutativa para el producto de matrices, $BA \neq AB$ y por lo tanto $A(BA)B \neq A^2B^2$.

2. Falsa. Desarrollando $(A+B)^2$ tenemos que

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = AA + AB + BA + BB = A^2 + AB + BA + B^2$$

De nuevo, como no vale la propiedad conmutativa para el producto de matrices, $AB+BA \neq 2AB$.

3. Falsa.

$$(A+B)(A-B) = AA + AB - BA + BB = A^2 + AB - BA - B^2$$

Como el producto de matrices no es conmutativo, el término $AB - BA \neq 0_n$.

e. Falsa. Demos un contraejemplo. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tenemos entonces que $AB = AC = 0_2$. Sin embargo es claro que $B \neq C$.

f. Falsa. Tomando $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 3}$ y $B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$, podemos calcular AB pero no BA.

Operaciones en matrices y matrices especiales.

1 Sea $A = ((a_{ij})) \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$, recordar que podemos notar a su traspuesta como $A^t = ((a^t_{ji})) \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times m}$ donde $a^t_{ji} = a_{ij}$.

a. Sean $A = ((a_{ij})), B = ((b_{ij})) \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$. Entonces, si notamos $C = A + B$, $C = ((c_{ij}))$ donde $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, tenemos que $C^t = ((c^t_{ij}))$ donde $c^t_{ij} = c_{ji}$. Por lo tanto

$$(A+B)^t = C^t = ((c^t_{ij})) = ((c_{ji})) = ((a_{ji} + b_{ji})) =$$

$$((a_{ji})) + ((b_{ji})) = ((a^t_{ij})) + ((b^t_{ij})) = A^t + B^t.$$

llegando a lo que queríamos demostrar.

Sea ahora $\alpha \in \mathbb{R}$, calculemos la traspuesta de $\alpha A = ((\alpha a_{ij}))$.

$$(\alpha A)^t = (((\alpha a_{ij})^t)) = ((\alpha a_{ji})) = \alpha((a_{ji})) = \alpha A$$

Consideremos $A = ((a_{ij})) \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$ y $B = ((b_ij)) \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times p}$ y llamemos $C = AB$. Utilizando la fórmula para los coeficientes del producto de matrices, tenemos que $C = ((c_{ij}))$ donde $c_{ij} = \sum_{h=1}^n a_{ih}b_{hj}$ y por lo tanto

$$(AB)^t = C^t = ((c^t_{ij})) = ((c_{ji})) = ((\sum_{h=1}^n a_{jh}b_{hi})) = ((\sum_{h=1}^n a^t_{hj}b^t_{ih}))$$

$$((\sum_{h=1}^n a^t_{hj}b^t_{ih})) = ((\sum_{h=1}^n b^t_{ih}a^t_{hj})) = B^tA^t$$

b. Sea $A = ((a_{ij})) \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ y notemos $A^t = ((a^t_{ij}))$. Sea $\lambda \neq \pm 1$. Si $A = \lambda A^t$ entonces

$$\begin{cases} a_{ij} = \lambda a^t_{ij} = \lambda a_{ji} \\ a_{ji} = \lambda a^t_{ji} = \lambda a_{ij} \end{cases}$$

por lo tanto, tenemos que $a_{ij} = \lambda^2 a_{ij}$. Como $\lambda \neq \pm 1$, $\lambda^2 \neq 1$ y concluimos que $a_{ij} = 0$ para todos i, j.

c. Sean A y B matrices cuadradas tales que $A = qB^t$ y $B = pA^t$ para un par de números p y q. Recordando que $(A^t)^t = A$ y la parte a. del ejercicio, tenemos que $B^t = (pA^t)^t = pA$ por lo tanto $A = qpA$. Concluimos que $pq = 1$ o A es la matriz nula, por lo que A^t es la matriz nula y B también.

2 a) Sean $A = ((a_{ij}))$ y $B = ((b_{ij}))$ matrices cuadradas de $n \times n$. Entonces $A + B = ((a_{ij} + b_{ij}))$ y $\alpha A = ((\alpha a_{ij}))$ son matrices de $n \times n$. Podemos calcular sus trazas:

$$tr(A+B) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + b_{ii} = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = tr(A) + tr(B)$$

$$tr(\alpha A) = \sum_{i=1}^n \alpha a_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^n a_{ii} = tr(A)$$

Por otro lado, es claro que $tr(A) = tr(A^t)$ pues trasponer una matriz preserva la diagonal.

b. Supongamos por absurdo que existen A y B matrices cuadradas de $n \times n$ tales que $AB - BA = I_n$. Se debe cumplir entonces que

$$tr(AB - BA) = tr(I_n)$$

Pero $tr(I_n) = \sum_{i=1}^n 1 = n$ y usando las propiedades de la parte a), sabemos que

$$tr(AB - BA) = tr(AB) + tr((-1)BA) = tr(AB) - tr(BA)$$

Por último, sabemos que $tr(AB) = tr(BA)$ y concluimos que

$$0 = tr(AB - BA) = n$$

Lo cual es absurdo pues $n \geq 1$.

c. Sea A una matriz de $n \times n$. Recordar que si tenemos dos matrices A y B conformables, entonces el producto AB es una matriz $C = ((\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}))$. Usando esta definición y teniendo en cuenta que el coeficiente de la fila i columna j de A^t es a_{ji} , tenemos que $AA^t = ((\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}))$. Entonces

$$tr(AA^t) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ik}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2) \geq 0$$

Pues los sumandos son todos no negativos. Además, para que la suma sea 0, todos los términos deben ser nulos. Es decir $tr(AA^t) = 0$ si y solo si $a_{ik} = 0$ para todos i, k si y solo si $A = 0_n$.

Geometría.

1 a. $S(1,0) = (0,1)$, $S(0,1) = (1,0)$, $S(1,1) = (1,1)$ y $S(1,-1) = (-1,1)$. En general, $S(x,y) = (y,x)$.

b. Para bosquejar las figuras, consideramos un punto genérico en cada una y calculamos a dónde lo lleva S.

Los puntos de $\{x = 5\}$ son de la forma $(5, y)$ y por lo tanto $S((5, y)) = (y, 5)$. Es decir, transforma una recta vertical que corta al eje O_x en $x = 5$ en una recta vertical que corta al eje O_y en $y = 5$.

Razonando análogamente,

- $S(\{x + y = 0\}) = S(\{y = -x\}) = \{S(x, -y)\} = \{(-y, x)\} = \{x + y = 0\}$.
- $S(\{x - y = 0\}) = S(\{x = y\}) = \{S(x, x)\} = \{(x, x)\} = \{x - y = 0\}$
- $S(\{x - y = 2\}) = S(\{y = x - 2\}) = (\{S(x, x - 2)\}) = \{(x - 2, x)\} = \{x - y = -2\}$.

c. Para ver que S es biyectiva, veamos que es inyectiva y sobreyectiva. Es claro que S es una función sobreyectiva pues dado cualquier punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tenemos que $S(y, x) = (x, y)$; es decir, (y, x) es la preimagen por S de (x, y). Además, dados dos puntos $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, es claro que $S(x, y) = S(x', y') \Leftrightarrow (y, x) = (y', x') \Leftrightarrow (x, y) = (x', y')$.

De lo anterior se desprende que la inversa de S es $S^{-1} = S$.

2 Sea $\theta \in [0, 2\pi)$, $G_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ y la función $R_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$R_\theta((x, y)^t) = G_\theta(x, y)^t$$

a. $R_\theta((1, 0)^t) = (\cos\theta, \sin\theta)^t$ $R_\theta((0, 1)^t) = (-\sin\theta, \cos\theta)^t$

b. $Y = R_\theta((1, 0)^t) = (\cos\theta, \sin\theta)^t$, entonces

$$Z = R_\psi((\cos\theta, \sin\theta)^t) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta - \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\theta + \cos\psi\sin\theta \end{pmatrix}$$

c. La función $R_{\theta+\psi}$ está dada por

$$R_{\theta+\psi}((x, y)^t) = G_{\theta+\psi}(x, y)^t$$

Esto corresponde a girar un vector un ángulo $\theta + \psi$. Lo que es igual a girarlo un ángulo θ y luego al vector resultante girarlo un ángulo ψ. Es decir, $R_{\theta+\psi} = R_\theta \circ R_\psi$.

Por un lado tenemos que

$$R_{\theta+\psi}((1, 0)^t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \psi) & -\sin(\theta + \psi) \\ \sin(\theta + \psi) & \cos(\theta + \psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \psi) \\ \sin(\theta + \psi) \end{pmatrix}$$

Usando la parte anterior, y dado que $R_{\theta+\psi}((1,0)^t) = R_\psi(R_\theta((1,0)^t))$, tenemos que

$$\begin{cases} \cos(\theta+\psi) = \cos\theta\cos\psi - \sin\theta\sin\psi \\ \sin(\theta+\psi) = \sin\theta\cos\psi + \cos\theta\sin\psi \end{cases}$$

Aplicaciones.

1. Ver inicio de la sección.

2 a. Una forma de hacer esta parte es usar el ejercicio [1.4] donde dada una matriz A, tenemos otra matriz $\delta(i_0, i_0)$ tal que $A\delta(i_0, j_0)$ devuelve una matriz que tiene la columna i_0 de A en su columna j_0 y el resto de las entradas son nulas.

En este caso, queremos una matriz B que al multiplicarla por A, devuelva una matriz cuya columna $i+1$ sea la columna i de A. Resulta que esa matriz es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Razonando de forma análoga a la parte anterior, ahora buscamos copiar la columna i en la $n-i+1$. Por lo tanto, la matriz B que nos sirve es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. Para esta parte, alcanza sumar a A una matriz $B = ((b_{ij}))$ de $n \times n$ tal que si $a_{ij} = 1$ entonces $b_{ij} = -1$ y si $a_{ij} = 0$ entonces $b_{ij} = 1$.

3.3. Matriz inversa.

Definición 3.3 *Se dice que una matriz A de tamaño $n\times n$ es invertible si existe una matriz B, necesariamente del mismo tamaño que A, tal que*

$$AB = BA = I_n.$$

En caso contrario se dice que A no es invertible.

Observación 3.3 *Resultados preliminares y ejemplos de matrices inversas:*

1. ***La matriz identidad es invertible.*** *Para cada $n \geqslant 1$ la matriz identidad*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

es invertible. Y su inversa es ella misma. En efecto, $I_nI_n = I_n$.

2. ***Exiten matrices que no tienen inversa.*** *Consideremos la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Supongamos por absurdo, que existe una matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $AB = BA = I_2$. Esto implica que deben existir números reales a, b, c, y d que cumplan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto a su vez lleva a la ecuación:

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, esto resulta en $a+c = 1, b+d = 0$ y $0 = 1$, lo cual es claramente una contradicción. Por lo tanto, no puede existir tal matriz B, y la matriz A no es invertible.

3. ***Si la inversa existe, entonces es única.*** *Si existieran matrices B y C de tamaño $n\times n$ ambas inversas de A entonces*

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C.$$

Esta observación, nos permite usar la notación de A^{-1} para denotar la inversa de A en caso de que exista.

4. ***El caso*** 2×2***.*** *Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Se requiere determinar bajo qué condiciones A es invertible, y en tal caso, obtener una fórmula explícitia de su matriz inversa. Se requiere entonces calcular una matriz $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ tal que:*

$$AB = BA = I_n$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al hacer una de las multiplicaciones indicadas y luego igualando los elementos coorrespondientes, obtenemos el siguiente par de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$S_1 = \begin{cases} ax_1 + bx_3 & = & 1 \\ cx_1 + dx_3 & = & 0 \end{cases} \quad S_2 = \begin{cases} ax_2 + bx_4 & = & 0 \\ cx_2 + dx_4 & = & 1 \end{cases}$$

El primer sistema tiene solución si $ad - bc \neq 0$, en cuyo caso

$$x_1 = \frac{d}{ad - bc} \ , \ x_3 = \frac{-c}{ad - bc}.$$

De manera análoga, si $ad - bc \neq 0$, el segundo sistema tiene solución dada por

$$x_2 = \frac{-b}{ad - bc} \ , \ x_4 = \frac{a}{ad - bc}.$$

Por lo tanto, si $ad - bc \neq 0$, la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es invetible y su inversa viene dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Observamos que, en el caso de matrices de tamaño 2×2, la existencia de la inversa está determinada por la condición $ad - bc \neq 0$. Esto sugiere que el número $ad - bc$ desempeña un papel fundamental en el análisis de la inversa.

5. ***Álgebra de matrices invertibles**. Consideremos matrices invertibles A y B, y un escalar no nulo λ. Las siguientes propiedades son sencillas de demostrar pero útiles; su verificación se deja al lector:*

   - *λA es invertible y su inversa es $\lambda^{-1} A^{-1}$.*
   - *A^{-1} es invertible y su inversa es A.*
   - *AB es invertible y su inversa es $B^{-1} A^{-1}$.*
   - *A^k es invertible para cada entero $k \geq 1$ y su inversa es $(A^{-1})^k$.*
   - *A^t es invertible y su inversa es $(A^{-1})^t$.*

   ***Ejemplo 3.9 Matrices simétricas invertibles.**[3] Si A es una matriz simétrica e invertible de tamaño $n \times n$, entonces A^{-1} también es una matriz simétrica.*

   Dado que A es simétrica e invertible, se cumple que $A^t = A$ y que A^{-1} existe. Por lo tanto,

   $$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}.$$

6. ***Propiedades de cancelación a derecha e izquierda para matrices.** Si C es una matriz invertible, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

   a) *Si $AC = BC$, entonces $A = B$. (Propiedad de cancelación derecha)*
   b) *Si $CA = CB$, entonces $A = B$. (Propiedad de cancelación izquierda)*

[3]Existen matrices simétricas no invertibles. Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Para demostrar la propiedad a, utilizamos el hecho de que C es invertible, la propiedad de asociatividad del producto matricial y escribimos:

$$AC = BC \implies (AC)C^{-1} = (BC)C^{-1} \implies A(CC^{-1}) = B(CC^{-1}) \implies AI_n = BI_n \implies A = B.$$

La demostración de la propiedad b es análoga.

Ejemplo 3.10 Descripción de las matrices idempotentes. *Si A es una matriz idempotente de tamaño $n \times n$ (es decir, $A^2 = A$), entonces $A = I_n$ o A es una matriz no invertible.*

Para demostrar esto, sabemos que cada matriz A puede ser invertible o no. Si no lo es, la prueba termina. Ahora, supongamos que A es invertible y apliquemos la propiedad de idempotencia:

$$A^2 = A$$

$$AA = AI_n$$

Aplicando ahora la propiedad de cancelación a izquierda, obtenemos:

$$A = I_n.$$

En otras palabras, si A es una matriz idempotente e invertible, entonces es la matriz identidad.

7. ***Matrices nilpotentes versus matrices invertibles***. *Ninguna matriz nilpotente puede ser invertible ¿Por qué?. Sin embargo, si A es una matriz tamaño de $n \times n$ nilpotente con indice de nilpotencia igual a k, podemos afirmar que la matriz $I_n - A$ es invertible.*

   Para comprender esto, consideremos primero el caso donde $k = 2$, lo que significa que $A^2 = \mathbf{0}_n$. En este caso, al calcular el producto:
   $$(I_n - A)(I_n + A) = I_n - A^2 = I_n.$$
   resulta evidente que la matriz $I_n + A$ actúa como la inversa de $I_n - A$.

   Ahora, generalicemos este concepto. Observemos que para cualquier matriz nilpotente A de índice k, la siguiente igualdad se mantiene: $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}) = I_n - A^k = I_n$

   Por lo tanto, hemos demostrado que si A es una matriz nilpotente de índice k, entonces $I_n - A$ es invertible y su inversa es $I_n + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}$.

8. ***Matrices en bloques invertibles.*** *Si A y B son matrices invertibles de tamaño $n \times n$, entonces la matriz C de tamaño $2n \times 2n$ dada por*
   $$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$
   también es invertible.

   Usando las propiedades de multiplicación de matrices en bloques presentadas en la sección anterior, podemos comprobar que la matriz
   $$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$
   es la inversa de C. De hecho,
   $$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^{-1} & 0 \\ 0 & BB^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

Por lo tanto,

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

9. ***Matrices invertibles y sistemas de ecuaciones.*** *Consideremos un sistema de ecuaciones lineales compatible S definido como:*

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Asociado a este sistema tenemos la ecuación matricial $AX = B$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Para cualquier matriz invertible M, los conjuntos solución de los sistemas $AX = B$ y $MAX = MB$ son los mismos, es decir, los sistemas son equivalentes. En siguiente sección, mostraremos cuáles son estas matrices invertibles que nos permiten obtener sistemas equivalentes a $AX = B$ pero más sencillos de resolver.

Ejemplo 3.11 ***Ejercicio 4.2. Examen GAL1. Diciembre 2023.*** *Considere la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & -1 & 0 \\ 5 & -8 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Indicar la opción verdadera:

(A) $A - A^{-1} = I$

(B) $A^2 = 0$

(C) $A + A^{-1} = 0$

(D) $A + A^{-1} = 2A$

(E) $A^2 = 2I$

Solución: *Notamos que $A^{-1} = A$ (A es una matriz involutoria). Por lo tanto, $A + A^{-1} = 2A$. Siendo la D opción correcta.*

3.3.1. Matrices especiales IV: Matrices elementales.

Definición 3.4 *Se dice que la matriz E de tamaño $n \times n$ es* ***elemental*** *si ella puede obtenerse, a partir de la matriz identidad I_n realizando en ésta una operación elemental*

Como existen tres tipos de operaciones elementales sobre las filas de una matriz, existen tres tipos de matrices elementales:

- **Matrices elementales de tipo I:** Son aquellas que se obtienen al intercambiar dos filas cualesquiera de la matriz identidad I_n. Estas matrices se denotan como E_I.

  Por ejemplo, si $n = 4$, al intercambiar la fila 3 y 4 de I_4, obtenemos la matriz:

$$E_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Ahora, consideremos una matriz A de tamaño 4×4, dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

  ¿Cuál es el efecto que tiene sobre A la multiplicación a la izquierda (premultiplicar) por E_I?

$$E_I A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

  Por lo tanto, multiplicar a la izquierda por la matriz E_I intercambia las filas 3 y 4 de la matriz A.

- **Matrices elementales de tipo II:** Son aquellas que se obtienen al multiplicar una fila cualesquiera de la matriz identidad I_n por un escalar no nulo λ. Estas matrices se denotan como E_{II}.

  Por ejemplo, si $n = 4$, al multiplicar la fila 2 de I_4 por λ, obtenemos la matriz:

$$E_{II} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  ¿Cuál es el efecto que tiene sobre A la multiplicación a la izquierda (premultiplicar) por E_{II}?

$$E_{II} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \lambda a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

  Por lo tanto, multiplicar a la izquierda por la matriz E_{II} modifica únicamente la segunda fila de A, en dicha fila todas las entradas se encuentran multiplicadas por λ.

- **Matrices elementales de tipo III:** Son aquellas que se obtienen al sumar a una fila de la matriz identidad I_n algún múltiplo no nulo de otra fila de I_n. Estas matrices se denotan como E_{III}.

  Por ejemplo, si $n = 4$, al sumar a la fila 3, la fila 2 de I_4 multiplicada λ, obtenemos la matriz:

$$E_{III} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  ¿Cuál es el efecto que tiene sobre A la multiplicación a la izquierda (premultiplicar) por E_{III}?

$$E_{III}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \lambda a_{21} + a_{31} & \lambda a_{22} + a_{32} & \lambda a_{23} + a_{33} & \lambda a_{24} + a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

  Por lo tanto, multiplicar a la izquierda por la matriz E_{III} suma a la fila 3 de A, λ veces la fila 2.

En conclusión, al multiplicar la matriz A por la izquierda (premultiplicar) con una matriz elemental, obtenemos una matriz que es el resultado de aplicar la misma operación elemental a A que se aplicó a I_4 para obtener E_i, donde $i = I, II, III$.

Observación 3.4 *Algunos ejemplos y observaciones importantes son:*

1. *Las siguientes matrices son elementales:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   La primera se obtiene intercambiando las filas 1 y 3 de la matriz I_3, la segunda multiplicando por 4 la segunda fila de I_2, y la tercera al intercambiar las filas de I_2. Sin embargo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   no es una matriz elemental, ya que para llegar a ella desde I_2 es necesario realizar dos operaciones elementales (intercambio de filas y multiplicar la primera fila por 2).

2. *Si E es una matriz elemental, entonces E es una matriz invertible. Su inversa, también es una matriz elemental del mismo tipo. Justificar!*

3. *Es importante considerar el efecto que tienen las matrices elementales cuando se posmultiplican por la matriz A. Este efecto se refleja en las columnas de la matriz A.*

   Por ejemplo, si $n = 4$, al intercambiar las filas 3 y 4 de I_4, obtenemos la matriz:

$$E_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Cuál es el efecto que tiene sobre A la multiplicación a la derecha (posmultiplicar) por E_I?

$$AE_I \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{43} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, multiplicar a la derecha intercambia las columnas 3 y 4 de A.

Razonamientos análogos permiten hacer observaciones sobre el efecto de posmultiplicar con las matrices de tipo II y III.

4. *Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. Si el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $AX = O$ es compatible determinado (es decir, tiene únicamente la solución trivial), entonces A es equivalente por filas a la matriz identidad I_n.*

   Para demostrar esto, razonemos por absurdo. Supongamos que A no es equivalente por filas a la matriz identidad. Luego, mediante operaciones elementales sobre las filas de A, podemos transformar el sistema $AX = 0$ en un sistema equivalente $EX = 0$, donde E es la forma escalonada reducida de A. Dado que E no es la matriz identidad, al menos uno de los coeficientes en la diagonal de E sería igual a cero. Esto implicaría que $AX = 0$ es equivalente a un sistema homogéneo con más incógnitas que ecuaciones, lo cual indicaría que el sistema $AX = 0$ debe tener infinitas soluciones no triviales, lo que lo haría indeterminado. Esto claramente genera una contradicción.

   Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que si el sistema $AX = 0$ es compatible determinado, entonces A es equivalente por filas a la matriz identidad I_n.

Antes de presentar uno de los resultados más importantes de esta sección, necesitamos intordurcir la siguiente definición.

Definición 3.5 *Una matriz A de tamaño $n \times n$ es* ***equivalente por filas*** [4] *a otra matriz B de tamaño $n \times n$ si existe una cantidad finita de matrices elementales $E_k, \ldots, E_2, E_1$ tales que $A = E_k \ldots E_2 E_1 B$.*

Teorema 3.1 *Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es invertible.*
2. *A es equivalente por filas a la matriz identidad.*

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2): Si A es una matriz invertible, entonces el sistema homogéneo $AX = 0$ es compatible determinado. Por lo tanto, según la parte 4 de la observación anterior, A es equivalente por filas a la matriz identidad.

(2) $\Rightarrow$ (1): Como A es equivalente por filas a la matriz identidad, existen un número finito de matrices elementales, $E_k, \ldots, E_2, E_1$, tales que $I_n = E_k \ldots E_2 E_1 A$. Luego, como cada matriz elemental es invertible, se tiene que $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1} I_n = (E_k \ldots E_1)^{-1} I_n$. Por lo tanto, A resulta ser el producto de matrices invertibles y, en consecuencia, es invertible.

Observación 3.5 *Observamos que si A es una matriz no invertible, su forma escalonada reducida necesariamente contendrá al menos una fila compuesta exclusivamente de ceros. Supongamos, por absurdo, que la forma escalonada reducida tiene todas sus filas no nulas. En tal caso, la única matriz de tamaño $n \times n$ en forma escalonada reducida sin filas no nulas es la matriz identidad I_n. Es decir, A sería equivalente a I_n, lo cual implicaría que A es invertible, generando una contradicción.*

[4] Esta definición permite establecer una relación de equivalencia en el conjunto de las matrices cuadradas de tamaño $n \times n$.

Algoritmo para el cálculo de A^{-1}.

Enfoquémonos en la demostración de la implicación (2) $\Rightarrow$ (1) del resultado anterior. Bajo la hipótesis de que A es equivalente por filas a la matriz identidad, hemos concluido que A es invertible. Sin embargo, la prueba resulta ser constructiva ya que explícitamente exhibe la inversa de A.

Al premultiplicar la matriz A por la matriz elemental E_1, obtenemos la primera matriz E_1A, que es parte de nuestro proceso para obtener la inversa. Del mismo modo, al premultiplicar E_1A por E_2, obtenemos $E_2(E_1A)$, la segunda matriz equivalente a A en el proceso para llegar a I_n. Dado que el proceso es finito, llegamos a la conclusión de que:

$$I_n = E_k \dots E_2E_1A$$

Esto nos permite afirmar que:

$$A^{-1} = E_k \dots E_2E_1 = E_k \dots E_2E_1I_n.$$

Por lo tanto, las mismas operaciones elementales que se aplican a A para obtener I_n se aplican a I_n, y el resultado es la inversa de A.

Describimos el algoritmo de la siguiente manera: Para calcular A^{-1}, se forma la matriz aumentada

$$(A|I)_{n\times 2n}$$

Luego, se aplican las operaciones elementales para llevar a A a la forma escalonada reducida, resultando en:

$$(I|A^{-1})$$

De donde se obtiene la inversa A^{-1}. Podemos concluir además que la matriz A es invertible si, y sólo si, se puede expresar como producto de matrices elementales.

Ejemplo 3.12 *1. Calcular la inversa de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Formamos la matriz ampliada $(A \mid I_3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (F_2 \leftharpoondown F_2 + 2F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (F_3 \leftharpoondown F_3 - 2F_1) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) (F_1 \leftharpoondown F_1 - F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) (F_1 \leftharpoondown F_1 + \tfrac{1}{4}F_3) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) (F_3 \leftharpoondown \tfrac{1}{4}F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) (F_2 \leftharpoondown F_2 + -F_3) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) (F_2 \leftarrow -F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right).$$

Entonces

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

2. ***Ejercicio 3. Primer parcial GAL1 interactiva. Septiembre 2023.*** *Determinar la inversa de*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 0 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Solución: *Planteamos el algoritmo de cálculo de la inversa:*

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Para cada i entre 1 y $n-1$ aplicamos la transformación elemental $F_i \leftarrow F_i - F_{i+1}$ y obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Dividiendo la fila i entre i, es decir $F_i \leftarrow \frac{1}{i} F_i$, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/n \end{array}\right).$$

Por lo tanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/n \end{pmatrix}.$$

3. ***Ejercicio 4. Examen GAL1 interactiva. Febrero 2024.*** *Se consideran M y B matrices reales de $n \times n$. Se sabe que satisfacen la ecuación $BM^3 - 4BM - 2I_n = 0_n$. Entonces:*

   (A) *M es invertible, $M^{-1} = \frac{1}{2}B(M^2 - 4I_n)$ pero B no necesariamente es invertible.*
   (E) *M no necesariamente es invertible, B es invertible y $B^{-1} = \frac{1}{2}(M^2 - 4I_{n\times n})M$.*
   (I) *M y B no son necesariamente invertibles.*
   (O) *M y B son invertibles, $M^{-1} = \frac{1}{2}B(M^2 - 4I_n)$ y $B^{-1} = \frac{1}{2}(M^2 - 4I_n)M$.*
   (U) *M y B no son invertibles.*
   (Y) *M y B son invertibles, $M^{-1} = \frac{1}{2}(M^2 - 4I_n)B$ y $B^{-1} = \frac{1}{2}(M^2 - 4I_n)M$.*

   Solución: *La ecuación matricial $BM^3 - 4BM - 2I_n = 0_n$ es equivalente a $BM^3 - 4BM = 2I_n$. Multiplicando ambos lados por $\frac{1}{2}$, obtenemos $B \cdot \frac{1}{2}(M^3 - 4M) = I_n$. Por lo tanto, B es invertible y su inversa es $\frac{1}{2}(M^3 - 4M)$.*

   Tomando nuevamente la ecuación $BM^3 - 4BM = 2I_n$, podemos factorizar B y M de la siguiente manera: $\frac{1}{2}B(M^2 - 4I_n)M = I_n$. Entonces, M es invertible y su inversa es $\frac{1}{2}B(M^2 - 4I_n)$. La respuesta correcta es la opción (O).

Resumen.

Las siguientes propiedades son equivalentes para una matriz M de tamaño $n \times n$:

1. M es producto de matrices elementales.
2. M es invertible.
3. Cualquiera de las matrices escalonadas que se obtienen al aplicar el método de Gauss a M tiene rango n.
4. La matriz escalonada reducida que se obtiene al aplicar el método de Gauss-Jordan a M es la matriz identidad.
5. Al aplicar el método de Gauss-Jordan a la matriz ampliada $(M|I)$, se obtiene una matriz de la forma $(I|U)$. En este caso, $U = M^{-1}$.

Aplicaciones. (Opcional)

1. **Encriptando mensajes.**

   La criptografía, del griego *kryptos* (escondido) y *graphein* (escribir), es el arte de ocultar mensajes usando símbolos convencionales que solo tienen sentido con una clave secreta. Los códigos secretos han acompañado a la humanidad desde que inventó el lenguaje escrito, empleando diversas técnicas para el cifrado de la escritura de mensajes que solo el destinatario puede entender.

   El cifrado es la transformación del texto original en un criptograma o texto cifrado, mientras que el descifrado es la operación inversa para recuperar el texto original. Desde el año 450 a.C., los espartanos de Grecia usaban un método de codificación por transposición, ocultando mensajes en bandas de cuero que revelaban el mensaje al ser enrolladas en un cilindro adecuado.

   En el cifrado por sustitución, cada letra o grupo de letras se reemplaza por otro. Un ejemplo antiguo es el Cifrado de César, donde cada letra se desplaza tres posiciones en el alfabeto.

   Una técnica un poco más sofisticada que consiste en el empleo del cifrado en dos pasos. Primero se le aplica al mensaje una sustitución, seguida luego de una transposición que usa matrices invertibles. Para el primer paso, consideremos el siguiente cifrado por sustitución:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	···
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	···

Como se muestra en la tabla, a cada letra de nuestro alfabeto, así como a los signos de puntuación más usuales, se les asigna un número. Esto corresponde a una función f, que es biyectiva, permitiendo el proceso inverso de pasar de los números a las letras o signos que representan.

Por ejemplo, la palabra **CAJA** quedaría codificada como $3-1-10-1$.

Asimismo, la secuencia $7-1-21-16$ representa la palabra **GATO**.

A partir de ahora, utilizaremos la notación matricial para representar las palabras, es decir la palabra **GATO** la expresamos como:

$$M=\begin{pmatrix} G\\ A\\ T\\ O \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} 7\\ 1\\ 21\\ 16 \end{pmatrix}$$

Método: Supongamos que tenemos una matriz invertible C, llamada matriz de codificación, que solo es conocida por las personas que van a compartir el secreto y un texto que queremos encriptar.

Primero, transformamos el texto a una secuencia de números, asignando a cada carácter un valor numérico único, como explicamos previamente. Pasemos luego a un segundo paso o nivel de codificación, multiplicando por la izquierda (premultiplicando) la matriz M que representa al mensaje que queremos codificar, por la matriz C.

Usando por ejemplo, como matriz de codificación

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 4 & -1\\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene que el mensaje codificado sería

$$CM=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 4 & -1\\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7\\ 1\\ 21\\ 16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 22\\ 8\\ 80\\ 13 \end{pmatrix}$$

Para descifrar el mensaje, escriba la secuencia de números que ha recibido como una matriz, disponiendo los números como vectores columna de 4 elementos [5] y premultiplique por la inversa de C

$$C^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

[5] Si queremos reescribir el mensaje en términos alfabéticos, nos encontramos con el inconveniente de que una de las entradas de la matriz resultó mayor que 30 y, en consecuencia, es inaplicable la tabla ¿A qué letra corresponde, por ejemplo, 80? ¿Qué modificaciones debemos hacerle a nuestro proceso para solventar esta situación?

2. Programación lineal.

Los métodos de programación lineal (PL) sirven para resolver problemas de optimización de funciones lineales con restricciones lineales, donde generalmente se pide además la no negatividad de las variables. Este enfoque es fundamental en la optimización de procesos industriales, logísticos y financieros, entre otros, y ha inspirado el desarrollo de áreas como la programación no lineal y la optimización convexa.

Un problema de esta clase puede representarse de la siguiente forma

$$\begin{cases} \min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{sujeto a:} \\ \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, ..., k \\ \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i = k+1, ..., m \\ \ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{cases}$$

Dado que las restricciones son lineales, las soluciones del problema se encuentran en una región del espacio $\mathbb{R}^n$ delimitada por subespacios de menor dimensión. A dicha región se le llama **región factible**.

Para la resolución numérica de problemas de PL se suele usar la **forma standard**, donde las restricciones son solo de igualdad. Se puede pasar del problema original a su forma standard introduciendo **variables de holgura**, es decir, variables no negativas que sirven para llevar desigualdades a igualdades.

Un problema de PL en su forma standard es

$$\begin{cases} \min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{sujeto a:} \\ \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, ..., m \\ \ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{cases}$$

Notar que a este problema lo podemos escribir en su forma matricial como sigue: defino $A = ((a_{ij})) \in M_{m\times n}, b^t = (b_1, ..., b_m), c^t = (c_1, ..., c_n)$ donde pedimos que $b \geq 0$, es decir $b_i \geq 0, \forall i$. Si esta última condición no se cumpliera, alcanzaría multiplicar alguna de las ecuaciones por -1. Utilizando esto, el problema original se convierte en

$$\begin{cases} \min c^t x \\ \text{sujeto a:} \\ \ Ax = b \\ \ x \geq 0 \end{cases}$$

donde $x^t = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Si suponemos que A es de rango completo, entonces podemos resolver el sistema $Ax = b$ expresando a m variables en función de las restantes $n-m$. Supongamos que las primeras m son las que pueden expresarse en función del resto. Definimos el vector $x_B \in \mathbb{R}^m$ como el que tiene las primeras m componentes de x y $x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$ como el que tiene las restantes. Además, definimos la matriz A_B como la que tiene a las primeras m columnas de A y A_N como la que tiene a las restantes $n-m$ columnas de A. Entonces el sistema $Ax = b$ puede reescribirse como

$$A_B x_B + A_N x_N = b$$

Como A_B tiene rango completo, existe su inversa A_B^{-1} y obtenemos la siguiente expresión

$$x_B + A_B^{-1} A_N x_N = A_B^{-1} b \implies x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$$

Por lo que para cualquier valor de x_N, obtenemos de la expresión anterior un valor de x_B que satisface $Ax = b$. En particular, podemos tomar $x_N = 0$, en cuyo caso $x_B = A_B^{-1} b$. A éste valor se le llama **solución básica** y la matriz A_B es la correspondiente **matriz básica**. La solución básica $x_B = A_B^{-1} b, x_N = 0$ es factible si $x_B \geq 0$.

Las soluciones básicas factibles corresponden a los vértices de la región de soluciones factibles y se sabe que la solución óptima del problema se encuentra en uno de dichos vértices. Esto último se conoce como la "propiedad de optimalidad en vértices", que establece que si existe una solución óptima, ésta necesariamente se encuentra en uno de los vértices de la región factible, es decir, en uno de los puntos donde se cruzan las restricciones del problema.

En caso de tener pocas variables, podemos representar el problema gráficamente y evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices hasta encontrar la solución óptima. Sin embargo, cuando la cantidad de variables es mayor y la solución vive en un espacio muy grande, se suelen usar algoritmos computacionales para resolverlo. Uno de ellos es el **método simplex**. Éste es un algoritmo iterativo que se basa en comenzar desde una solución básica factible y en cada paso selecciona una arista de la región factible que mejora la función objetivo y se mueve a lo largo de ella hasta el siguiente vértice. El proceso se repite hasta llegar a la solución óptima. Es claro que esto sucede en finitos pasos por lo que el algoritmo termina.

A modo de ejemplo, consideremos el siguiente problema.

$$\begin{cases} \max 2x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeto a:} \\ \ x_1 + x_2 \leq 2 \\ \ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ \ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

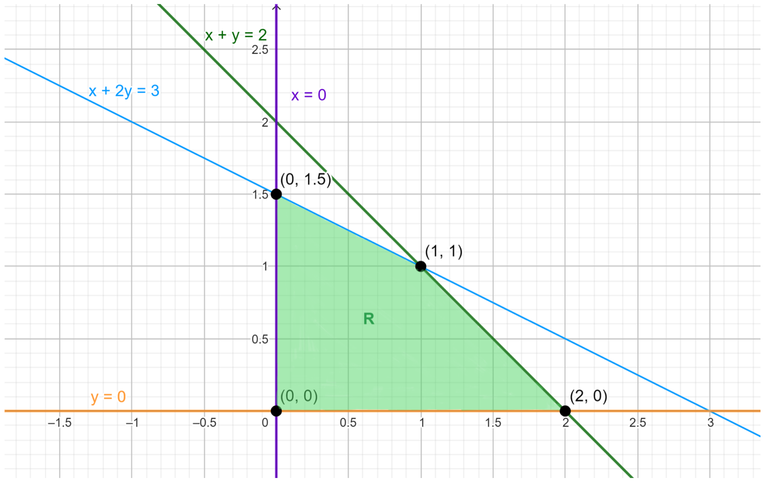
A partir de las condiciones, representamos la región factible de la siguiente forma:

Observar que encontrar el máximo de la función objetivo $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ en dicha región, es equivalente a encontrar el mínimo de la función $g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$ en la región factible y tomar el valor opuesto.

Para llevar el problema a su forma standard agregamos dos variables de holgura x_3 y x_4 y obtenemos

$$\begin{cases} \min -2x_1 - 3x_2 \\ \text{sujeto a:} \\ \ x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ \ x_1 + 2x_2 + x_4 \leq 3 \\ \ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

La forma matricial de este problema es



$$\begin{cases} \text{mín}(-2,-3,0,0)x \\ \text{sujeto a:} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Del sistema anterior, podemos despejar fácilmente x_3 y x_4 en función de x_1 y x_2:

$$x_3 = 2 - x_1 - x_2,\; x_4 = 3 - x_1 - 2x_2$$

Como vimos antes, conseguimos una solución básica tomando $x_1 = x_2 = 0$. Esta solución es $(0,0,2,3)$ y como todas sus coordenadas son no negativas, la solución es factible. Sin embargo, no coincide con la solución óptima. Observar que en la solución básica factible, el valor de la función es 0 pero en el punto $(1,1,0,0)$ la función vale -5. Ésta última es la solución óptima y existen algoritmos para llegar a ella a partir de la solución básica factible.

3.4. Práctico 3.

Práctico 3 – Matrices invertibles y rango

3.4.1. Matrices invertibles.

1. Determinar si las siguientes matrices son invertibles, y en caso de serlo calcular la inversa de la matriz.

a) $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 0,4 & -1,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$

$$e)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f)\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad g)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Las siguientes matrices son invertibles:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Calcular las inversas.

   b) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando los cálculos de la parte anterior:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Hallar la inversa de las siguientes matrices, donde k y k_i, $i = 1, 2, 3, 4$, indican constantes no nulas.

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

4. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

   a) Hallar matrices elementales E_1 y E_2 tales que $E_2 E_1 A = I$.

   b) Hallar A^{-1}.

   c) Expresar A como el producto de matrices elementales.

5. Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

   Hallar matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 tales que $E_1 A = B$, $E_2 B = A$, $E_3 A = C$ y $E_4 C = A$.

6. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdades o falsas, justificando en cada caso.

   a) Si A y B son invertibles y $\alpha \neq 0$ entonces αAB es invertible y $(\alpha AB)^{-1} = \frac{1}{\alpha} B^{-1} A^{-1}$.

   b) Si A es invertible entonces $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

   c) Si A y B son invertibles entonces $A + B$ es invertible.

   d) Si A y B son invertibles y $A + B$ es invertible, entonces $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

   e) Si A es invertible y AB no lo es, entonces B no es invertible.

7. Calcular la inversa de la siguiente matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\vdots & \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & 0 \\ n & n & n & \dots & n & n \end{pmatrix}.$$

8. **Matrices en bloques.**

   a) Sean $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ y $B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times m}$ definimos la matriz $C \in \mathbf{Mat}_{(n+m)\times(n+m)}$ como

$$C = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0}_{n\times m} \\ \mathbf{0}_{m\times n} & B \end{pmatrix},$$

   donde $0_{r\times s}$ indica a la matriz nula de r filas y s columnas. Formalmente,

$$c_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i \leq n, j \leq n \\ b_{i-n,j-n} & \text{si } i > n, j > n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Probar que si A y B son invertibles entonces C es invertible.

   b) Probar que si A y D son invertibles entonces

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ \mathbf{0} & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

3.4.2. Rango de Matrices.

1. *a*) Determine el rango de las matrices del ejercicio 1.1.

   b) Determine el rango de las siguientes matrices

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \qquad e)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Considerar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ 2 & 3a-1 & a^2-a-4 \\ a & a^2 & a^2-2a-1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & a & a \\ 1 & a-3 & a-3 \\ 1 & 1 & a^2-15 \end{pmatrix}$$

   Hallar el rango de A y B discutiendo según a real.

3. Sea $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ y $b \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times 1}$. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar en cada caso:

   a) $\mathrm{Rg}(A) \leq m$
   b) $\mathrm{Rg}(A) = \min\{m, n\}$
   c) Si $\mathrm{Rg}(A) < n$ el sistema $AX = b$ es incompatible.
   d) El sistema $AX = b$ es compatible indeterminado si y solo si $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A|b) < n$.
   e) Si A es una matriz cuadrada de 2×2 invertible, entonces la matriz $B = A + 2I_2$ (donde I_2 es la matriz identidad de 2×2) también es invertible.

4. Sean A y $P \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ tal que P es invertible. Probar que el rango de A es igual al rango de PA.

3.4.3. Solución a ejercicios seleccionados del Práctico 3.

Matrices invertibles.

1 Recordar que para calcular la inversa de una matriz A la ampliamos por la matriz identidad y reducimos $(A|I)$ por escalerización a la matriz $(I|B)$ donde $B = A^{-1}$.

a. Si $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calculamos la inversa como sigue

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - 5F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & -9 & -15 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(-1)F_2]{F_1/3} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

Tenemos entonces que la matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

c. La matriz inversa es $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

e. $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 + 4F_2]{F_1 - 4F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & -6 \end{array}\right).$$

Concluimos que la matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

g. $$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 - F_1]{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2 + F_4]{F_1 + 3F_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)F_4]{F_2 + F_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(-1)F_3]{F_1-2F_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

2 a. Utilizando el mismo procedimiento que en los ejercicios anteriores, llegamos a que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ y $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

b. Notar que $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dado que calculamos A^{-1} en la parte anterior del ejercicio, podemos calcular el vector solución resolviendo el último producto de matrices. Llegamos a que la solución del sistema es $(x, y) = (5/4, 3/4)$.

Para el segundo sistema razonamos de forma análoga y llegamos a que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Tenemos que la solución del segundo sistema es $(x, y, z) = (6, 7, 6)$.

4 Recordar que la matriz elemental E asociada a una transformación elemental T es la que se obtiene al aplicar la transformación T a la matriz identidad $n \times n$.

a. Para calcular las matrices elementales, consideramos las transformaciones elementales que llevan a la matriz A a la identidad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Llamando T_1 a la transformación que hace F_2-3F_1 y T_2 a la que hace $F_2/4$, tenemos que sus matrices asociadas son $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$
Como $T_2(T_1(A)) = I$, es claro que $E_2E_1A = I$.

b. Por la parte anterior, tenemos que $E_2E_1A = I$, por lo que $A^{-1} = E_2E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

c. Despejando de la parte a., tenemos que $A = E_1^{-1}E_2^{-1}$ donde $E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

6 a. Verdadero. Para probar esto alcanza hacer el producto de $\frac{1}{\alpha}B^{-1}A^{-1}$ por αAB y verificar que da la matriz identidad.

b. Verdadero.

c. Falso. Tomando $B = -A$, tenemos que $A + B$ es la matriz nula que claramente no es invertible.

d. Falso. Si fuera verdadero, entonces $(A + B)(A{-}1 + B^{-1}) = I$. Utilizando la propiedad distributiva, concluimos que este producto da $2I + AB^{-1} + BA^{-1}$ que no necesariamente es la matriz identidad.

e. Verdadero. Si B fuera invertible, por la parte a) tenemos que AB debería ser invertible y su inversa sería $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

7 La inversa de M es $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/(n-1) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1/(n-1) & 1 \end{pmatrix}$.

Matrices en bloques.

8 En ambas partes de este ejercicio, la idea es pensar el producto de matrices en bloques como producto de matrices de 2×2 donde en cada entrada queda un producto de matrices conformables. Esto se sigue de la definición de producto de matrices.

Rango de Matrices.

1 a. Como todas son invertibles, tienen rango máximo. Es decir, los rangos son 2, 2, 3 y 4 respectivamente.

b. $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(B) = \mathrm{Rg}(D) = \mathrm{Rg}(E) = 2$ y $\mathrm{Rg}(C) = 3$

2 a. Escalerizando, uno consigue la siguiente forma escalerizada

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & a^2+3a-4 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, se tiene que si $a \neq \pm 1$ el rango es 3. Si $a = 1$ el rango es 1 y si $a = -1$ el rango es 2.

b. Escalerizando, uno consigue la siguiente forma escalerizada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-4 & a-4 \\ 0 & 0 & a^2-15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, se tiene que si $a \neq \pm\sqrt{15}, 4$ el rango es 3. De lo contrario el rango es 2.

3 a. Verdadero.

b. Falso.

c. Falso.

d. Verdadero.

e. Falso.

4 Una forma de pensar este ejercicio es notar que para encontrar el rango de A, podemos estudiar el sistema $AX = 0$ y ver cuántos grados de libertad tiene. Por lo tanto, si el sistema $(PA)X = 0$ tiene la misma solución que el anterior, probamos que el $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(PA)$.

Otra forma es observar que como P es invertible, es producto de matrices elementales y multiplicar a una matriz por una matriz elemental no cambia su rango.

CAPÍTULO 4

DETERMINANTES.

4.1. Motivación histórica y determinante de una matriz.

Los determinantes surgieron a mediados del siglo XVII, mucho antes del desarrollo completo del álgebra lineal. En el contexto de su época, la motivación principal era comprender las condiciones bajo las cuales un sistema de ecuaciones lineales representado por una matriz cuadrada $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ tendría una única solución. En términos modernos, esto equivale a garantizar que el rango de la matriz sea máximo, es decir, $\mathrm{Rg}(A) = n$, o, de manera equivalente, que la matriz sea invertible. Sin embargo, estas definiciones estaban muy lejos de la comprensión matemática de la época, y los matemáticos de entonces compartían una aspiración común con muchos estudiantes en la actualidad: encontrar una fórmula concreta para resolver estos sistemas.

Cuando $n = 1$, para encontrar la solución del sistema $AX = B$ donde $A = (a_{11})$, $X = (x_1)$ y $B = (b_1)$, la situación es bastante sencilla: la solución es directamente $x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$, siempre que $a_{11} \neq 0$. Si $a_{11} = 0$, la ecuación se convierte en $0x_1 = b_1$, que no tiene solución cuando b_1 es distinto de cero o tiene infinitas soluciones si b_1 es igual a cero.

Cuando $n = 2$, aprovechando los cálculos que se realizan para obtener la fórmula de la matriz inversa, obtenemos las soluciones del sistema $AX = B$ donde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Dichas soluciones vienen expresadas por

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{4.1}$$

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{4.2}$$

Estas fórmulas son válidas siempre que el denominador, es decir, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, no sea igual a cero. En caso contrario, el sistema dejaría de tener una solución única y podría tener múltiples soluciones o incluso ser incompatible.

En la actualidad, la enseñanza de los determinantes presenta dos enfoques principales. El primero, más abstracto, consiste en presentar la expresión generalizada que abarca el caso n y demostrar que posee las propiedades deseadas en relación con los sistemas de ecuaciones. Por otro lado, el segundo enfoque, más intuitivo, introduce los determinantes a través de la resolución de sistemas mediante la eliminación de Gauss y, en algún momento, llega a una fórmula abstracta para completar la teoría.

El primer enfoque, aunque más elegante, tiene la desventaja de que la expresión parece surgir de la nada y a menudo requiere ciertos conceptos algebraicos adicionales. Por otro lado, el segundo enfoque, aunque menos directo, puede generar cierta sorpresa, ya que la existencia de los determinantes no es inmediatamente obvia.

Estos dos enfoques ofrecen perspectivas diferentes para comprender los determinantes y su papel en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, permitiendo a los estudiantes abordar el tema desde diversas perspectivas didácticas.

Nosotros usaremos el primer enfoque y la definición del determinante de una matriz cuadrada se establecerá de manera inductiva en función del número de filas (o columnas). En otras palabras, proporcionaremos la definición del determinante de una matriz $n \times n$ basándonos en el conocimiento previo de los determinantes de matrices $(n-1) \times (n-1)$.

Este enfoque inductivo es fundamental en la teoría de determinantes, ya que nos permite construir el concepto de determinante para matrices más grandes a partir del entendimiento de matrices más pequeñas. Comenzamos con casos base, como los determinantes de matrices 1×1 (escalares) y 2×2 (fácilmente calculables). Luego, utilizamos estos casos para desarrollar el concepto de determinante de matrices 3×3 y así sucesivamente.

Definición 4.1 *Sea $A = (a_{11})$ una matriz de tamaño 1×1. Definimos el* ***determinante*** *de A como el propio número.*

Para una matriz de tamaño 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Denotamos el determinante de la matriz A como $|A|$ [1] *y se define como $|A| := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.*

Calculemos el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Aplicando la fórmula, obtenemos:

$$|A| = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 6 - 4 = 2.$$

Podemos notar que el determinante de una matriz es un número que se calcula mediante operaciones aritméticas con las entradas de la matriz. Por lo tanto, puede ser positivo, negativo o igual a cero.

Observación 4.1 *La solución del sistema $AX = B$ donde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ viene expresadas entonces por*

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{|A|} \tag{4.3}$$

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{|A|}. \tag{4.4}$$

Para extender la definición del determinante a una matriz de tamaño $n \times n$ con $n \geq 3$, es necesario introducir la siguiente definición.

Definición 4.2 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de tamaño $n \times n$, se define la matriz adjunta asociada al elemento a_{ij} como la submatriz A_{ij} de la matriz A que se obtiene eliminando la fila i y la columna j de A.*

[1] En ocasiones también usaremos la notación $\det(A)$.

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta asociada al elemento a_{12} se obtiene eliminando la fila 1 y la columna 2 de A

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

La matriz adjunta asociada al elemento a_{33} se obtiene eliminando la fila 3 y la columna 3 de A

$$A_{33} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ahora estamos en condiciones de presentar la definición inductiva del determinante para matrices de tamaño $n \times n$. Esta definición se denomina inductiva porque utiliza determinantes de matrices de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ para definir el determinante de matrices de tamaño $n \times n$.

Definición 4.3 *Sea $n \geq 3$. Si A es una matriz de tamaño $n \times n$, el determinante de A se define como el número*

$$|A| := (-1)^{1+1} a_{11}|A_{11}| + (-1)^{2+1} a_{21}|A_{21}| + \cdots (-1)^{i+1} a_{i1}|A_{i1}| + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1}|A_{n1}|.$$

Supongamos que tenemos la matriz A de 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular su determinante, aplicamos la definición:

$$\begin{aligned} |A| &= 2 \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right| - 0 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right| + 1 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right| \\ &= 2 \cdot ((-1) \cdot 0 - 4 \cdot 2) - 0 \cdot (1 \cdot 0 - 3 \cdot 4) + 1 \cdot (1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)) \\ &= 2 \cdot (0 - 8) + 1 \cdot (2 + 3) \\ &= 2 \cdot (-8) + 1 \cdot 5 \\ &= -16 + 5 \\ &= -11 \end{aligned}$$

Entonces, el determinante de la matriz A es $|A| = -11$.

Observación 4.2 *1. Observamos que, en el ejemplo anterior, necesitamos 6 términos para calcular el determinante de la matriz. Sin embargo, para matrices de tamaño 5×5, se requieren 120 términos, y para matrices de 70×70, más de 10^{100} términos. Por esta razón, no presentamos una definición del determinante utilizando una fórmula explícita, sino una definición inductiva.*

2. *Además, aunque el determinante se define mediante una expansión de términos utilizando la primera columna como referencia, es importante destacar que se puede calcular el determinante expandiendo por cualquier fila o columna de la matriz. Por ejemplo, en el caso anterior, podríamos haber calculado el determinante expandiendo la matriz por la segunda fila.*

$$\begin{aligned}|A| &= (-1)^{2+1}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 0\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}\\ &= -0\cdot(1\cdot 0-3\cdot 4)-1\cdot(2\cdot 0-3\cdot 1)-2\cdot(2\cdot 4-1\cdot 1)\\ &= -0+3-14\\ &= -11.\end{aligned}$$

Lo expresado en la segunda parte de la anterior observación lo podemos presentar sin demostración en el siguiente teorema

Teorema 4.1 *Si A es una matriz cuadrada de tamaño $n\times n$, entonces su determinante se calcula como:*

$$|A| = (-1)^{1+j}a_{1j}|A_{1j}| + (-1)^{2+j}a_{2j}|A_{2j}| + \cdots (-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}| + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}|A_{nj}|.$$

o

$$|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}| + \cdots (-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}| + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}|.$$

El número $c_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ se denomina **cofactor** del elemeneto a_{ij} de la matriz A. Por lo tanto podemos rescribir el teorema anterior de la siguiente manera

$$|A| = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \cdots a_{ij}c_{ij} + \cdots + a_{nj}c_{nj}.$$

o

$$|A| = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots a_{ij}c_{ij} + \cdots + a_{in}c_{in}.$$

Estrategia 1 para el cálculo de determinantes.

Si A es una matriz cuadrada de tamaño $n\times n$, para calcular su determinante, elegimos la fila o columna que tenga la mayor cantidad de ceros.

Observación 4.3 *Utilizando el resultado previo, podemos verificar que el determinante de A y su traspuesta son iguales:*

$$|A^t| = |A|.$$

Esta igualdad es trivial para el caso $n = 1$. Suponiendo luego que la propiedad es válida para matrices de tamaño $(n-1)\times(n-1)$, y recordando que las filas de A^t son las columnas de A, observamos que el desarrollo por la fila i de $|A^t|$ coincide con el desarrollo por la columna i de $|A|$, siendo, por lo tanto, ambos determinantes iguales.

Determinante de matrices triangulares.

Calcular determinantes de matrices de tamaño $n\times n$ donde $n>3$ puede ser tedioso. Sin embargo, existe una excepción importante: el determinante de una matriz triangular. Recordemos que una matriz cuadrada se llama triangular superior si tiene todas sus entradas iguales a cero debajo de su diagonal principal, y triangular inferior si tiene todas sus entradas iguales a cero por encima de su diagonal principal.

Matriz triangular superior

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Para encontrar el determinante de una matriz triangular, simplemente multiplicamos los elementos en la diagonal principal. Podemos utilizar inducción para demostrar esta afirmación en el caso de una matriz triangular superior, y un razonamiento similar se aplica a las matrices triangulares inferiores.

Para una matriz 2×2, por ejemplo, si tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

El determinante es $|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot 0 = a_{11} \cdot a_{22}$. Suponiendo que esta afirmación es válida para cualquier matriz triangular superior de tamaño $(n-1) \times (n-1)$, consideremos una matriz triangular superior A de tamaño $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Expandiendo por la n-ésima fila, obtenemos:

$$|A| = 0 \cdot (-1)^{n+1}|A_{n1}| + 0 \cdot (-1)^{n+2}|A_{n2}| + \ldots + 0 \cdot (-1)^{n+(n-1)}|A_{n(n-1)}| + (-1)^{n+n}a_{nn}|A_{nn}|$$

$$|A| = (-1)^{2n}a_{nn}|A_{nn}| = a_{nn}|A_{nn}|$$

Ahora, notemos que A_{nn} es la submatriz que se obtiene al eliminar la n-ésima fila y la n-ésima columna de A. Debido a que esta matriz tiene tamaño $(n-1) \times (n-1)$ y es triangular superior, podemos aplicar la hipótesis inductiva para obtener que el determinante de A_{nn} es igual al producto de los elementos de su diagonal, es decir:

$$|A_{nn}| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{(n-1)(n-1).}$$

Por lo tanto, el determinante de A se expresa como:

$$|A| = a_{nn} \cdot |A_{nn}| = a_{nn} \cdot (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{(n-1)(n-1)}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{(n-1)(n-1)}a_{nn}.$$

Ejemplo 4.1 *Consideremos la matriz triangular superior A de tamaño 3×3:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para calcular su determinante, simplemente multiplicamos los elementos en la diagonal principal:

$$|A| = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Observación 4.4 *Si A es una matriz diagonal dada por*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

entonces,

$$|A| = a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}.$$

En particular,

$$|I_n| = 1,$$

donde I_n es la matriz identidad de tamaño $n \times n$.

En general, no es cierto que para cada par de matrices A y B se verifique $|A+B| = |A| + |B|$.

Consideremos, por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces,

$$|A+B| = 5 \neq 2 = 2 + 0 = |A| + |B|.$$

Sin embargo, el determinante sí es lineal con respecto a una fila o columna, en el sentido que establecerá el siguiente resultado.

Teorema 4.2 ***(Linealidad del determinante respecto a una fila).*** *Sean las matrices $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $C = (c_{ij})$ de tamaño $n \times n$. Supongamos que existe algún k, con $1 \leq k \leq n$, tal que*

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} = b_{ij} & si \quad i \neq k \\ a_{kj} + b_{kj} & si \quad i = k \end{cases}.$$

Entonces,

$$|C| = |A| + |B|.$$

Esquemáticamente,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}+b_{k1} & a_{k2}+b_{k2} & a_{k3}+b_{k3} & \cdots & a_{kn}+b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Demostración: Es suficiente con calcular el determinante de la matriz C usando la expansión por cofactores sobre la k-ésima fila.

4.2. Relación entre las operaciones elementales por filas y determinates.

Dada una matriz A de tamaño $n \times n$, recordemos que podemos realizar tres operaciones elementales en sus filas para obtener una matriz B que es equivalente a A. Consideremos el caso de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. **Intercambio de filas.** Si realizamos la operación elemental de intercambiar las filas 2 y 3 para obtener B:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nos preguntamos sobre la relación entre los determinantes de estas dos matrices. Calculamos los determinantes de A y B respectivamente:

$$\begin{aligned} |A| &= -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot ((3 \cdot 1) - (3 \cdot 3)) - 0 \cdot ((3 \cdot 1) - (5 \cdot 3)) + 2 \cdot ((3 \cdot 3) - (5 \cdot 3)) \\ &= -1 \cdot (3 - 9) - 0 \cdot (3 - 15) + 2 \cdot (9 - 15) \\ &= -1 \cdot (-6) - 0 \cdot (-12) + 2 \cdot (-6) \\ &= 6 + 0 - 12 \\ &= -6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |B| &= -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot ((3 \cdot 3) - (1 \cdot 3)) - 2 \cdot ((3 \cdot 3) - (5 \cdot 3)) + 0 \cdot ((3 \cdot 3) - (5 \cdot 1)) \\ &= -1 \cdot (9 - 3) - 2 \cdot (9 - 15) + 0 \cdot (9 - 5) \\ &= -1 \cdot 6 - 2 \cdot (-6) + 0 \cdot 4 \\ &= -6 + 12 + 0 \\ &= 6. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el determiante de B es igual al determiante de A con signo opuesto.

2. **Multiplicación de una fila por escalar no nulo.** Consideremos el caso de multiplicar la fila 2 de A por el escalar 4 para obtener una nueva matriz B.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 12 & 12 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nos preguntamos sobre la relación entre los determinantes de estas dos matrices. Calculemos el determinante B:

$$\begin{aligned} |B| &= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 12 & 12 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 12 & 12 \end{vmatrix} \\ &= -24 = 4 \cdot (-6) = 4|A| \end{aligned}$$

Por lo tanto, el determinante de la matriz B es 4 veces el determiante de la matriz A.

3. **Sumar a una fila un múltiplo de otra.** Consideremos el caso de multiplicar la fila 1 de A por el escalar 2 y sumarla a la fila 3 para obtener una nueva matriz B.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

Calculemos el determinante B:

$$\begin{aligned} |B| &= (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 11 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 11 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -6 = |A| \end{aligned}$$

Por lo tanto, el determinante de la matriz B es igual a determiante de A.

El ejemplo anterior no es una situación excepcional; la siguiente proposición es de gran utilidad en el contexto de cálculos de determinantes, ya que generaliza lo expuesto en el ejemplo anterior.

Proposición 4.1 *Sean A y B matrices de tamaño $n \times n$.*[2]

1. *Si B se obtiene de A intercambiando dos filas de A, entonces $|B| = -|A|$.*
2. *Si B se obtiene de A al multiplicar una fila de A por una constante no nula c, entonces $|B| = c|A|$.*
3. *Si B se obtiene de A al sumar un múltiplo de una fila de A a otra fila de A, entonces $|B| = |A|$.*

Observación 4.5 *Podemos deducir propiedades adicionales a partir del resultado de la proposición anterior.*

1. *Si A es una matriz de tamaño $n \times n$ con $n \geq 2$ y tiene dos filas o columnas iguales, entonces $|A| = 0$. En efecto, según el primer item del resultado anterior, $|A| = -|A|$. Por lo tanto, $|A| = 0$.*
2. *Una consecuencia inmediata del item 2 es que, para todo $c \in \mathbb{R}$ y toda matriz A de tamaño $n \times n$, se cumple:*

$$|cA| = c^n|A|.$$

3. *Si A es una matriz de tamaño $n \times n$ con $n \geq 2$ que tiene dos filas proporcionales, es decir, si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $A_k = \lambda A_i$ con $i \neq k$, entonces $|A| = 0$.*

   En efecto, si A tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(k-1)1} & a_{(k-1)2} & \dots & a_{(k-1)n} \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

[2] Las propiedades enunciadas en esta proposición también son válidas si cambiamos la palabra filas por columnas.

entonces $|A| = \lambda|A'|$ *por el item 2, donde*

$$A^{'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(k-1)1} & a_{(k-1)2} & \dots & a_{(k-1)n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Notamos que A' *tiene dos filas iguales, por lo tanto* $|A'| = 0$*. Entonces,* $|A| = 0$*.*

Demostración: (Proposición 4.1) Mostraremos solamente la prueba de la parte 3.

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de tamaño $n \times n$. Consideremos la matriz $B = (b_{ij})$ que se obtiene al sumar un múltiplo de la s-ésima fila a la k-ésima fila de A.

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(k-1)1} & a_{(k-1)2} & \dots & a_{(k-1)n} \\ a_{k1} + \lambda a_{s1} & a_{k2} + \lambda a_{s2} & \dots & a_{s1} + \lambda a_{sn} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} .$$

Al calcular el determinate de la matriz B usamos el Teorema 4.2 y obtenemos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(k-1)1} & a_{(k-1)2} & \dots & a_{(k-1)n} \\ a_{k1} + \lambda a_{s1} & a_{k2} + \lambda a_{s2} & \dots & a_{s1} + \lambda a_{sn} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(k-1)1} & a_{(k-1)2} & \dots & a_{(k-1)n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{s1} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(k-1)1} & a_{(k-1)2} & \dots & a_{(k-1)n} \\ \lambda a_{s1} & \lambda a_{s2} & \dots & \lambda a_{sn} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Entonces, usando la parte 2 de la Proposición 4.1 tenemos que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(k-1)1} & a_{(k-1)2} & \dots & a_{(k-1)n} \\ a_{k1}+\lambda a_{s1} & a_{k2}+\lambda a_{s2} & \dots & a_{s1}+\lambda a_{sn} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(k-1)1} & a_{(k-1)2} & \dots & a_{(k-1)n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{s1} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(k-1)1} & a_{(k-1)2} & \dots & a_{(k-1)n} \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Notamos que la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(k-1)1} & a_{(k-1)2} & \dots & a_{(k-1)n} \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

tiene dos filas iguales, entonces

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(k-1)1} & a_{(k-1)2} & \dots & a_{(k-1)n} \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto, $|B| = |A|$.

Ejemplo 4.2 *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & 6 & 2 & 10 \\ 7 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & 6 & 2 & 10 \\ 7 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ *pues la última matriz tiene la primera y la tercera fila iguales.*

Observación 4.6 *¿Cuál de los dos determinantes mostrados a continuación es más fácil de calcular?*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Ahora que sabemos cómo calcular el determinante de una matriz triangular, es claro que el determinante de la derecha es mucho más fácil de evaluar. Su determinante es simplemente el producto de las entradas en la diagonal principal. Es decir, $|B| = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$. *Por otro lado, usar la expansión por cofactores (la única técnica discutida hasta ahora) para evaluar el determinante de la izquierda requiere tiempo y esfuerzo. Por ejemplo, si expandemos por cofactores a lo largo de la primera fila, obtenemos:*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

La evaluación de los determinantes de estas tres matrices de 2×2 *produce:*

$$|A| = 1 \cdot 15 + 1 \cdot (5) + 2 \cdot (-9) = 2$$

No es coincidencia que estos dos determinantes tengan el mismo valor, si se analiza a partir del resultado proporcionado por la proposición 4.1. De hecho, podemos obtener la matriz B *realizando operaciones elementales de fila en la matriz* A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \leftarrow F_2 + F_1]{F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B.$$

Por lo tanto, como B *se obtiene de* A *sumando múltiplos de filas de* A *a otra fila, el determinante permanece igual.*

Estrategia 2 para el cálculo de determinantes.

Dada una matriz A *de tamaño* $n \times n$ *con* $n \geq 3$, *calculamos su forma escalonada* B, *y usamos la proposición 4.1, la cual nos indica cómo varía el determinante en cada una de las matrices que se obtienen en los pasos intermedios hasta llegar a su forma triangular superior. Finalmente, recordamos que el determinante de una matriz triangular superior es el producto de los elementos en su diagonal principal.*

Operación Elemental sobre A	*Efecto en* $\lvert B\rvert$
Intercambio de filas	$\lvert B\rvert = -\lvert A\rvert$
Multiplicar una fila por una constante λ	$\lvert B\rvert = \lambda\lvert A\rvert$
Sustituir una fila por ella misma más unmúltiplo de otra	$\lvert B\rvert = \lvert A\rvert$

Ejemplo 4.3 *1.* ***Ejercicio 5. Primer parcial GAL1 interactiva. Septiembre 2023****. Se consideran las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a + 2b & b & 3c \\ d + 2e & e & 3f \\ 5g + 10h & 5h & 15i \end{pmatrix}.$$

Se sabe que $|A| = 3$. *Calcular el determinante de* $|B|$.

Solución: *Usamos cómo cambian las transformaciones elementales en los determinantes:*

- *Las transformaciones* $F_i \to \alpha F_i$ *multiplican al determinante por* α. *Lo mismo sucede con las columnas.*
- *Las transformaciones* $F_i \to F_i + \alpha F_j$ *no cambian al determinante. Lo mismo sucede con las columnas.*

$$|B| = \begin{vmatrix} a+2b & b & 3c \\ d+2e & e & 3f \\ 5g+10h & 5h & 15i \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} a+2b & b & 3c \\ d+2e & e & 3f \\ g+2h & h & 3i \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} a+2b & b & c \\ d+2e & e & f \\ g+2h & h & i \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$= 15 \cdot 3 = 45$$

2. ***Ejercicio 2. Examen GAL1 interactiva. Diciembre 2023.*** *Sean las matrices* M:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

tal que $|M| = 5$ *y* N:

$$|N| = \begin{pmatrix} d+2f & f & e \\ a+2c & c & b \\ g+2i & i & h \end{pmatrix}.$$

Solución: *Aplicando transformaciones elementales y la linealidad por columnas, tenemos que:*

$$|N| = \begin{vmatrix} d+2f & f & e \\ a+2c & c & b \\ g+2i & i & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & f & e \\ a & c & b \\ g & i & h \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} f & f & e \\ c & c & b \\ i & i & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & f & e \\ a & c & b \\ g & i & h \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5.$$

3. ***Ejercicio 2. Examen GAL1 interactiva. Febrero 2024.*** *Se consideran las matrices* M, N *de tamaño* 4×4 *dada por:*

$$M := \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{pmatrix} \quad N := \begin{pmatrix} a & b & d & c+2d \\ e & f & h & g+2h \\ m & n & q & p+2q \\ 3i+m & 3j+n & 3l+q & 3k+6l+p+2q \end{pmatrix}$$

Se sabe que $\det(M) = D \in \mathbb{R}$. *Entonces:*

(A) $|N| = D$.
(E) $|N| = 6D$.
(I) $|N| = -6D$.
(O) $|N| = 3D$.
(U) $|N| = -3D$.
(Y) $|N| = -D$.

Solución: *Aplicando transformaciones elementales y la linealidad por filas, tenemos que:*

$$|N| = \begin{vmatrix} a & b & d & c \\ e & f & h & g \\ m & n & q & p \\ 3i+2m & 3j+2n & 3l+2q & 3k+2p \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & d & c \\ e & f & h & g \\ m & n & q & p \\ i & j & l & k \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & d & c \\ e & f & h & g \\ m & n & q & p \\ m & n & q & p \end{vmatrix} =$$

$$-3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & d & c \\ e & f & h & g \\ i & j & l & k \\ m & n & q & p \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{vmatrix} = 3D$$ *por hipótesis. La respuesta correcta es (O).*

4. ***Ejercicio 6. Primer parcial GAL1 interactiva. Septiembre 2023.*** *Calcular el determinante de la siguiente matriz $n \times n$:*

$$A = \begin{pmatrix} n & n & n & \cdots & n & n \\ n & n-1 & n & \cdots & n & n \\ n & n & n-2 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & 2 & n \\ n & n & n & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: *Para cada i entre 2 y n, aplicamos al determinante la transformación elemental $F_i \to F_i - F_1$, lo cual no cambia el determinante, obteniendo:*

$$\begin{pmatrix} n & n & n & n & \cdots & n & n \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n+1 \end{pmatrix}$$

Como esta última es una matriz triangular superior, su determinante es el producto de las entradas de la diagonal:

$$|A| = (1-n) \times (2-n) \times \cdots \times (-2) \times (-1) \times n = n \times (-1)(n-1) \times (-1)(n-2) \times \cdots \times (-1)2 \times (-1).$$

Como hay en este producto $n-1$ factores (-1), entonces tenemos

$$|A| = (-1)^{n-1} \times n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = (-1)^{n-1} \times n!.$$ [3]

4.2.1. Estartegia 1 versus estrategia 2 en el cálculo de determinantes.

Hasta ahora, hemos presentado dos métodos generales para evaluar determinantes. De estos, el método de usar operaciones elementales de fila para reducir la matriz a una forma triangular superior suele ser más rápido que la expansión de cofactores a lo largo de una fila o columna. Si la matriz tiene un tamaño grande, la cantidad de operaciones aritméticas necesarias para la expansión de cofactores puede volverse extremadamente grande. Por esta razón, la mayoría de los algoritmos computacionales utilizan el método que involucra operaciones elementales de fila. La siguiente tabla muestra la cantidad de sumas y multiplicaciones necesarias para cada uno de estos dos métodos para matrices de tamaño 3×3, 4×4, 5×5 y 10×10.

Tamaño	Desarrollo por cofactores	Reducción por Filas
	Sumas/Multiplicaciones	Sumas/Multiplicaciones
3×3	5 /9	5/10
4×4	23/40	14/23
5×5	119/205	30/45
10×10	3628799/6235300	285/339

[3] El factorial de un número natural n, denotado como $n!$, se define como el producto de todos los números naturales desde 1 hasta n. Se expresa como:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

La cantidad de operaciones necesarias para calcular el determinante de una matriz de tamaño $n \times n$ crece factorialmente ($n!$). Dado que $20! = 2432902008176640000$, incluso una matriz relativamente pequeña de 20×20 requeriría más de 10^{19} operaciones.

Una tercera estrategia al calcular determinantes manualmente y que a veces permite ahorrar tiempo es utilizar operaciones elementales de fila (o columna) para crear una fila (o columna) que tenga ceros en todas las posiciones excepto una, y luego utilizar la expansión de cofactores para reducir el orden de la matriz en 1.

4.3. Relación entre el determinante y la inversa de una matriz.

Hagamos un breve resumen de lo que hemos explorado hasta ahora. Hemos observado que las matrices pueden ser clasificadas en dos categorías distintas utilizando como criterio la invertibilidad. Por lo tanto, para una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$, nos encontramos con dos situaciones posibles:

1. A es invertible. En este caso, las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   a) A es invertible.
   b) El sistema $AX = B$ tiene una única solución, $X = A^{-1}B$, para todo $B \in \mathbb{R}^n$, es decir el sistema es compatible determinado.
   c) La forma escalonada reducida de A es la matriz identidad I_n.
   d) A tiene rango máximo.
2. A no es invertible. En este caso, las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   a) A no es invertible.
   b) El sistema $AX = B$ tiene infinitas soluciones o ninguna solución, es decir, el sistema es compatible indeterminado o incompatible.
   c) La forma escalonada reducida de A tiene al menos una fila nula.
   d) El rango de A es menor que n.

En consecuencia, al enfrentarnos a una matriz cuadrada A, la primera pregunta que surge es si es invertible o no. La respuesta a esta pregunta esta asociada al estudio del determinante de A y la siguiente proposición nos ofrece una respuesta parcial.

Proposición 4.2 *Si A es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ no invertible, entonces $|A| = 0$.*

Demostración: Dado que A es no invertible, su forma escalonada reducida A' contendrá al menos una fila compuesta exclusivamente de ceros. Al realizar operaciones elementales sobre las filas de A para llegar a A', el determinante de A se verá afectado en cada operación elemental, ya sea por un cambio de signo o por la multiplicación de una constante, según la Proposición 4.1

Finalmente, llegamos a la forma escalonada reducida A', cuyo determinante es igual a cero. Por lo tanto, $|A| = 0$.

4.3.1. Determinantes de matrices elementales.

Las propiedades del determinante expresadas en la Proposición 4.1 también nos permiten calcular los determinantes de las matrices elementales. Recordemos que estas matrices se obtienen al realizar operaciones elementales sobre las filas de la matriz identidad I_n. Dado que $|I_n| = 1$, podemos observar que:

- **Matrices elementales de tipo I:** Son aquellas que se obtienen al intercambiar dos filas cualesquiera de la matriz identidad I_n. Además, conocemos el efecto de premultiplicar por una matriz de este tipo. Por lo tanto,
$$|E_I| = -|I_n| = -1.$$
De este modo, si A es cualquier matriz de tamaño $n \times n$, entonces
$$|E_I A| = -|A|.$$
También notamos que
$$|E_I A| = -|A| = |E_I||A|.$$
- **Matrices elementales de tipo II:** Son aquellas que se obtienen al multiplicar una fila cualquiera de la matriz identidad I_n por un escalar no nulo λ. Además, conocemos el efecto de premultiplicar por una matriz de este tipo. Por lo tanto,
$$|E_{II}| = \lambda |I_n| = \lambda.$$
De este modo, si A es cualquier matriz de tamaño $n \times n$, entonces
$$|E_{II} A| = \lambda |A|.$$
También notamos que
$$|E_{II} A| = \lambda |A| = |E_{II}||A|.$$
- **Matrices elementales de tipo III:** Son aquellas que se obtienen al sumar a una fila de la matriz identidad I_n algún múltiplo no nulo de otra fila de I_n. Además, conocemos el efecto de premultiplicar por una matriz de este tipo. Por lo tanto,
$$|E_{III}| = |I_n| = 1.$$
De este modo, si A es cualquier matriz de tamaño $n \times n$, entonces
$$|E_{III} A| = |A|.$$
También notamos que
$$|E_{II} A| = 1 \cdot |A| = |E_{II}||A|.$$

Podemos resumir la anterior en la siguiente tabla

Matriz elemental E	Determinante	Relación con la premultiplicación
I	$\|E\| = -1$	$\|EA\| = \|E\|\|A\|$
II	$\|E\| = \lambda$	$\|EA\| = \|E\|\|A\|$
III	$\|E\| = 1$	$\|EA\| = \|E\|\|A\|$

La tabla anterior resume un hecho interesante en su tercera columna: el determinante del producto de cualquier matriz por una matriz elemental es igual al producto de los determinantes. Ahora, examinemos el cálculo del determinante para el producto de dos matrices.

Consideremos las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizando las herramientas descritas en las secciones anteriores, encontramos que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8, \quad |AB| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16.$$

Entonces, notamos que $|AB| = 16 = (-2)\cdot(-8) = |A|\cdot|B|$. Este hecho no es específico de las matrices particulares que hemos elegido para el ejemplo; el siguiente teorema generaliza lo expuesto y es que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes.

Teorema 4.3 ***(Binet-Cauchy).*** *Si A y B son matrices de tamaño $n \times n$, entonces*

$$|AB| = |A||B|.$$

Demostración: Consideremos los siguientes casos:

- **Caso 1.** Si A es una matriz invertible, entonces podemos expresar A como el producto de matrices elementales,

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k.$$

  Entonces,

$$|AB| = |E_1 E_2 \cdots E_k B| = |E_1||E_2| \cdots |E_k||B| = (|E_1||E_2| \cdots |E_k|)|B| = |E_1 E_2 \cdots E_k||B| = |A||B|$$

- **Caso 2.** Si A es una matriz no invertible, entonces en este caso, AB no es invertible (Justificar!). Por lo tanto, $|A| = 0$ y $|AB| = 0$. Entonces, evidentemente

$$|AB| = |A||B|$$

Corolario 4.1 *Si A es una matriz invertible*

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}.$$

4.3.2. Determinantes de matrices por bloques.

Para matrices diagonales o triangulares definidas por bloques, el cálculo del determinante está relacionado con el cálculo de los determinantes de las submatrices que forman los bloques. Dejamos al lector interesado la validez y la demostración de los siguientes resultados, bastante útiles.

1. El determinante de una matriz diagonal por bloques verifica:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}||A_{22}|$$

2. El determinante de una matriz triangular por bloques verifica:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}||A_{22}|$$

Ejemplo 4.4 *1. El determinante de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

viene dado por

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(-54) = 54.$$

2. El determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

viene dado por

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-2)(2) = -4.$$

4.4. Observación final.

En el desarrollo de la teoría de determinantes que hemos presentado en estas notas, partimos de la base de que conocemos de antemano el determinante de las matrices de tamaño 2×2. Sin embargo, otro enfoque que podemos tomar para desarrollar esta teoría es asumir que existe una función, llamada determinante, que opera sobre el conjunto de las matrices cuadradas con coeficientes reales y devuelve valores reales, y que cumple con las siguientes premisas:

1. El determinante de la matriz identidad I_n (para $n \geqslant 1$) es igual a 1.

2. Si intercambiamos dos filas (o dos columnas), el determinante cambia de signo.

3. Si multiplicamos una fila (o una columna) por un escalar λ, el determinante se multiplica por el mismo factor.

4. Si podemos expresar todos los elementos en una fila (o columna) como la suma de dos números cada uno, podemos dividir el determinante completo en la suma de dos determinantes.

5. Si una fila (o columna) está compuesta completamente por ceros, entonces el determinante es cero.

Podemos entonces deducir el valor de la función determinante para matrices de tamaño 2×2. Empecemos con la matriz identidad I_2. Según la Propiedad (1), obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Al aplicar la Propiedad (3), al multiplicar la primera fila de I_2 por a, el determinante se multiplica por a:

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a$$

Usando nuevamente la misma propiedad, esta vez multiplicando la segunda fila por d, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad$$

De manera similar, al multiplicar las filas de I_2 por b y c, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = bc$$

La Propiedad (2) establece que si intercambiamos las filas, el determinante cambia de signo, lo que implica:

$$\begin{vmatrix} 0 & c \\ b & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = -bc$$

Por la Propiedad (4), al expresar los elementos de la primera fila como sumas, podemos escribir:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+0 & 0+c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

Al repetir este argumento pero ahora con las matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, y al aplicar la Propiedad (5), obtenemos:

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0+b & d+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{vmatrix} = ad + 0 = ad$$

De igual manera,

$$\begin{vmatrix} 0 & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c \\ b & 0 \end{vmatrix} = -bc$$

Por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

4.5. Práctico 4.

Práctico 4.

Determiantes.

4.5.1. Determinantes.

1. Calcular los siguientes determinantes:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ -2 & \sqrt{2} & 3 \end{vmatrix} \qquad d)\ \begin{vmatrix} e^{2a} & 0 & e^{a} \\ e^{a} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad e)\ \begin{vmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{vmatrix}$$

$$f)\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & \tan(\theta) \\ -\cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{vmatrix} \qquad g)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \qquad h)\ \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5,$$

calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+5c & 3b & c \\ d+5f & 3e & f \\ 2g+10i & 6h & 2i \end{vmatrix}.$$

3. Calcule el determinante de las siguientes matrices y determine para cuáles valores de k son invertibles.

$$a)\ \begin{pmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} k & k & 0 \\ k^2 & 4 & k^2 \\ 0 & k & k \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} k-4 & 0 & 0 \\ 1 & k & 2 \\ 3 & 3 & k-1 \end{pmatrix}$$

4. *a)* Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, tales que $\det(A) = 3$ y $\det(B) = -2$. Calcular los siguientes determinantes:

   a) $\det(-AB)$ *b)* $\det(A^2)$ *c)* $\det(B^{-1}A)$ *d)* $\det(2A)$ *e)* $\det(3B^T)$ *f)* $\det(AA^T)$

   b) Sean $A, B, C, D \in \mathcal{M}_{5\times 5}$, tales que $\det(A)$=$\det(B) \neq 0$, $\det(C) = 4$ y $\det(D) = 2$. Calcular

$$\det\left(A^T C^{-1} B^{-1} (3D^T)^{-1}\right) - \det\left(4CD^{-1}(A^{-1}B)^T\right)$$

5. Calcular los determinantes

$$d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

para $n = 2, 3, \ldots$, donde se supone que la matriz con determinante d_n tiene n filas y n columnas.

6. Sean A matriz $n \times n$, B una matriz $n \times m$ y C una matriz $m \times m$. Con O indicaremos una matriz $m \times n$ cualquier dimensión cuyas entradas son todas nulas. Probar que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C).$$

4.5.2. Solución a ejercicios seleccionados del Práctico 4.

Determinates.

1 a. Desarrollamos el determinante por la tercera columna y tenemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Por lo que el determinante de la matriz es 1.

d. Desarrollamos el determinante por la segunda columna

$$\begin{vmatrix} e^{2a} & 0 & e^a \\ e^a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} e^{2a} & e^a \\ e^a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

f. Desarrollamos el determinante por la primera fila.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) & tan(\theta) \\ -cos(\theta) & sin(\theta) & -cos(\theta) \end{vmatrix} = sin(\theta) \begin{vmatrix} sin(\theta) & cos(\theta) \\ -cos(\theta) & sin(\theta) \end{vmatrix} = sin(\theta)(sin^2(\theta) + cos^2(\theta)) = sin(\theta)$$

g. Desarrollamos el determinante por la primera columna y tenemos lo siguiente

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 35 - 3{,}31 + 28 = 0$$

h. El determinante es 3003.

2 Para este ejercicio debemos utilizar las propiedades de determiantes con respecto a las transformaciones elementales.

- $$\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$$

  Donde utilizamos que intercambiar filas cambia el signo del determinante.

- $$\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10$$

- $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ -3a & -3b & -3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = 10,$$

- $$\begin{vmatrix} a+5c & 3b & c \\ d+5f & 3e & f \\ 2g+10i & 6h & 2i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 3b & c \\ d & 3e & f \\ 2g & 6h & 2i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5c & 3b & c \\ 5f & 3e & f \\ 10i & 6h & 2i \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 30$$

3 Para que las matrices sean invertibles, el determinante debe ser no nulo. Por lo tanto, calculamos el determinante de cada una y discutimos según k.

a. $$\begin{vmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} k+1 & 1 \\ -8 & k-1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -k & 3 \\ k+1 & 1 \end{vmatrix} = k(k^2 - 1 + 8 - k - 3k - 3) = k(k^2 - 4k + 4).$$

Esto se anula si $k=0$ o $(k-2)^2=0$, es decir, los valores de k que anulan el determinante son $k=0$ y $k=2$. Por lo que la matriz es invertible para todo $k\neq 0,2$

c. $\begin{vmatrix} k-4 & 0 & 0 \\ 1 & k & 2 \\ 3 & 3 & k-1 \end{vmatrix} = (k-4)\begin{vmatrix} k & 2 \\ 3 & k-1 \end{vmatrix} = (k-4)(k^2-k-6)$

Este determinante se anula si $k=4,3$ o -2, es decir, la matriz es invertible para todo $k\neq 4,3,-2$

4 *a*)
   a. $\det(-AB) = (-1)^n \det(A) det(B) = (-1)^{n+1}6$
   b. $\det(A^2) = \det(A)^2 = 9$
   c. $\det(B^{-1}A) = \frac{1}{\det(B)}\det(A) = -3/2$
   d. $\det(2A) = 2^n \det(A) = 2^n 3$
   e. $\det(3B^t) = 3^n \det(B^t) = 3^n \det(B) = 3^n(-2)$
   f. $\det(AA^t) = \det(A)\det(A^t) = \det(A)^2 = 9$

b) Aplicando las propiedades es fácil ver que el primer sumando es igual a

$$\det(A^T C^{-1} B^{-1}(3D^T)^{-1}) = \det(A)\frac{1}{\det(C)}\frac{1}{\det(B)}\frac{1}{3^5\det(D)} = \frac{1}{1944},$$

mientras que el segundo sumando es igual a

$$\det(4CD^{-1}(A^-1B)^T) = 4^5\det(C)\frac{1}{\det(D)}\frac{\det(A)}{\det(B)} = 2048.$$

Por lo tanto el resultado de la resta es $\frac{3981311}{1944}$.

5 Escalerizando la matriz sin alterar el determinante, obtenemos lo siguiente

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

Donde la última igualdad es resultado hacer el producto de los elementos de la diagonal.

6 Una forma de encarar este ejercicio es hacer inducción en n, es decir, en el tamaño de A.

CAPÍTULO 5

GEOMETRÍA EN $\mathbb{R}^3$.

En el estudio de objetos físicos, nos enfrentamos al desafío de describir no solo sus propiedades inherentes, como la masa o la densidad, sino también comprender su estado en un momento dado, que puede estar marcado por variables como la velocidad o el peso. En este contexto, usamos las magnitudes para representar estas características, y algunas de ellas, como la masa o la temperatura, son conocidas como magnitudes escalares, ya que se expresan mediante un solo número real junto con su unidad de medida.

Sin embargo, al adentrarnos en fenómenos más complejos, como el desplazamiento de un objeto en el espacio, nos encontramos con la necesidad de utilizar magnitudes que no solo indiquen valores numéricos, sino que también incluyan información sobre la dirección y el sentido. Aquí es donde entran en juego los vectores, que se presentan como segmentos orientados que llevan consigo información sobre dirección y longitud.

En este marco, las magnitudes como la fuerza o la velocidad se denominan magnitudes vectoriales. Para comprender y operar con estos vectores, comenzamos por establecer un sistema cartesiano de coordenadas, que actúa como referencia para ubicar la posición de un objeto y observar su cambio relativo, es decir, su desplazamiento.

5.1. El espacio $\mathbb{R}^n$.

En lo que sigue, n denotará siempre un número natural mayor o igual a 1. Consideremos el conjunto de todas las n-uplas ordenadas de números reales, que denotaremos por $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\, i = 1, \ldots, n\}$$

A cada uno de los números reales x_i que conforman la n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lo llamamos componente o coordenada i-ésima. Por ejemplo, si $n = 1$, el conjunto $\mathbb{R}^1$ no es más que el conjunto de números reales. Si $n = 2$, $\mathbb{R}^2$ será el conjunto de parejas ordenadas de números reales y usualmente lo representamos como $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Para $n = 3$, el conjunto $\mathbb{R}^3$ está formado por las tripletas ordenadas de números reales y lo expresamos usualmente como $\{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Insistimos en que las n-uplas que constituyen el conjunto $\mathbb{R}^n$ son ordenadas. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, la pareja $(1, 5)$ es diferente de la pareja $(5, 1)$. De hecho, dos n-uplas en $\mathbb{R}^n$ se consideran iguales cuando cada una de sus coordenadas son iguales. Es decir, para n-uplas $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ y $(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_i = y_i \text{ para todo } i = 1, \ldots, n.$$

Un hecho de fundamental importancia y que será relevante en la segunda parte de estas notas es que en el conjunto $\mathbb{R}^n$ podemos definir dos operaciones entre sus elementos, las cuales cumplen con ciertas propiedades que veremos a continuación.

- *Suma de n-uplas ordenadas:* Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son dos elementos de $\mathbb{R}^n$, definimos su suma, y la denotamos por $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, como

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

- *Producto de un escalar real por una n-upla ordenada:* Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es un elemento de $\mathbb{R}^n$ y c es un número real, el producto de la n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ por el escalar c, denotado por $c \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se define como

$$c \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n).$$

Obsérvese que, según estas definiciones, tanto la suma de n-uplas como el producto de una de ellas por un escalar son nuevamente n-uplas del conjunto $\mathbb{R}^n$. Por ello, se dice que estas operaciones son cerradas en $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$, la suma de la tripleta $(1, 5, 9)$ con la tripleta $(0, 0, 7)$ es

$$(1, 5, 9) + (0, 0, 7) = (1 + 0, 5 + 0, 9 + 7) = (1, 5, 16)$$

que es una nueva tripleta de $\mathbb{R}^3$. En $\mathbb{R}^5$, el producto de la 5-upla $(1, 1, 0, 1, 0)$ por el escalar 2 es

$$2 \cdot (1, 1, 0, 1, 0) = (2, 2, 0, 2, 0)$$

que también es un elemento de $\mathbb{R}^5$. Es rutina verificar que estas operaciones entre los elementos de $\mathbb{R}^n$ cumplen con las propiedades siguientes:

1. *Propiedad 1.* La suma es conmutativa, es decir

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) + (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

2. *Propiedad 2.* La suma es asociativa, es decir

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + [(y_1, y_2, \ldots, y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n)] = [(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)] + (z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

3. *Propiedad 3.* Existe un elemento en $\mathbb{R}^n$, llamado cero, que actúa de manera neutra para la suma. De hecho, este elemento es el que tiene todas sus coordenadas iguales al (número real) cero. Lo denotaremos por $\mathbf{0}$. Es decir $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ y se tiene

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (0, 0, \ldots, 0) = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

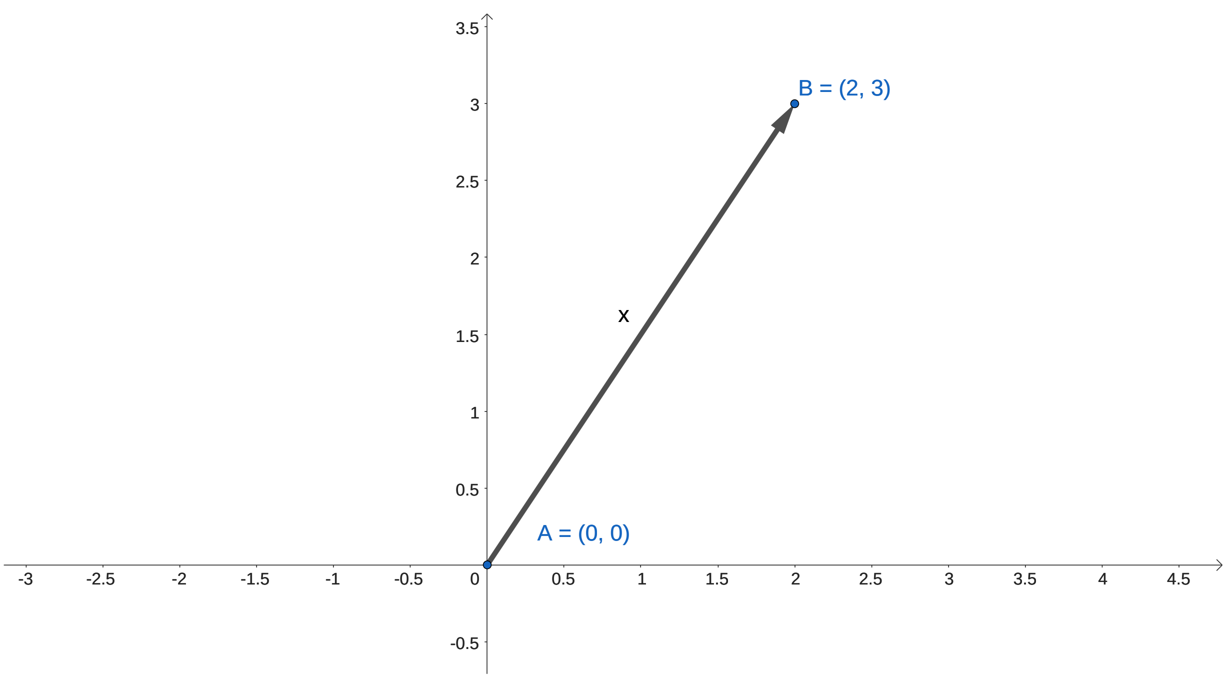
4. *Propiedad 4.* Cada u-upla de $\mathbb{R}^n$ tiene un inverso aditivo, el cual es un elemento de $\mathbb{R}^n$ que tiene la propiedad de que, sumado con la n-upla original, produce el cero. De hecho, el inverso aditivo de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$, puesto que

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) = (0, 0, \ldots, 0).$$

5. *Propiedad 5.* Si c es un escalar, se tiene
$$c\left[(y_1, y_2, \ldots, y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n)\right] = (cy_1, cy_2, \ldots, cy_n) + (cz_1, cz_2, \ldots, cz_n).$$
6. *Propiedad 6.* Si c y d son escalares, se tiene
$$(cd)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c\left[d(((x_1, x_2, \ldots, x_n))\right] = d\left[c(((x_1, x_2, \ldots, x_n))\right].$$
7. *Propiedad 7.* Si c y d son escalares, se tiene
$$(c+d)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c(x_1, x_2, \ldots, x_n) + d(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$
8. *Propiedad 8.*
$$1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Interpretación geométrica.

1. *El caso $n = 2$.*
   - *Representación en el plano de 2-uplas ordenadas:* Un **vector anclado en el origen** se visualiza geométricamente como un segmento de línea dirigido, con su punto de inicio en $(0,0)$ y su punto final en (x_1, x_2), como se ilustra en la siguiente figura. Este vector se expresa como un vector columna utilizando el mismo par ordenado que representa su punto terminal. En otras palabras,
   $$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$
   Por ejemplo, el vector $\overrightarrow{x}$ se representa como un segmento de línea dirigido desde el punto $A = (0,0)$ hasta $B = (2,3)$.



Geométricamente, $\mathbb{R}^2$ se describe como el conjunto de todas las 2-uplas ordenadas de la forma (x, y), y observamos que hay una correspondencia directa entre cada 2-upla (x, y) y el vector anclado en el origen con su punto terminal en (x, y).

En general, cada vector columna se relaciona con una dirección y una longitud, siendo irrelevante el punto de anclaje. Así, para un vector columna $\overrightarrow{x}$ (no nulo) y un punto P, siempre existe un único punto Q tal que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{x}$.

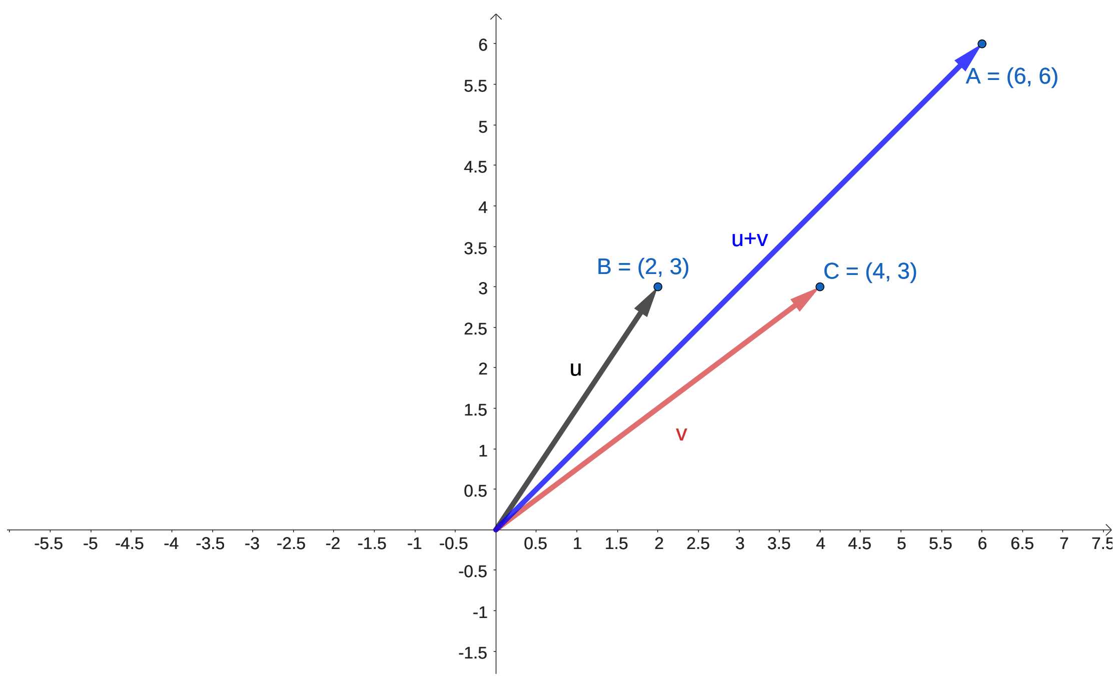
En resumen:

a) Dados los puntos P y Q, hay un único vector columna $\overrightarrow{PQ}$ que representa la posición de Q respecto a P.

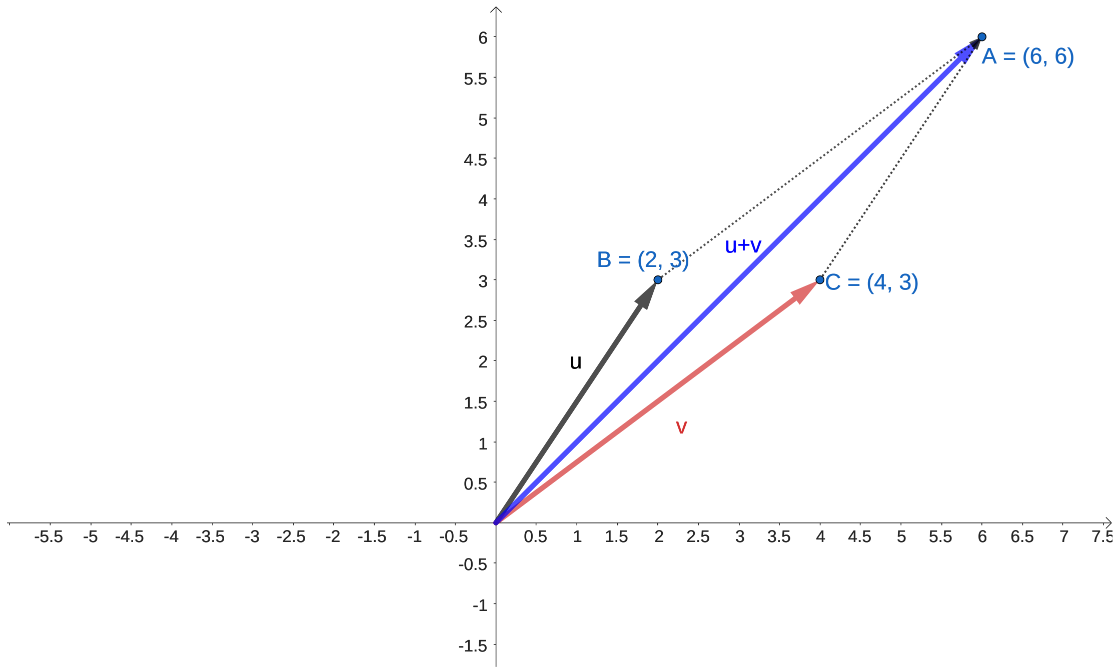
b) Dado cualquier vector columna no nulo $\overrightarrow{x}$, existen infinitos pares de puntos P y Q tales que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{x}$.

c) Dado cualquier punto P y cualquier vector columna no nulo $\overrightarrow{x}$, hay un único punto Q tal que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{x}$.

- *Suma de vectores en el plano:* Dados los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{(0,0)(2,3)}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{(0,0)(4,3)}$, la suma de estos vectores es $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{(0,0)(2+4,3+3)} = \overrightarrow{(0,0)(6,6)}$.



Si trasladamos el vector anclado $\overrightarrow{u}$ hasta el punto $(4,3)$ y el vector anclado $\overrightarrow{v}$ hasta el punto $(2,3)$, la figura adquiere la apariencia de un paralelogramo.



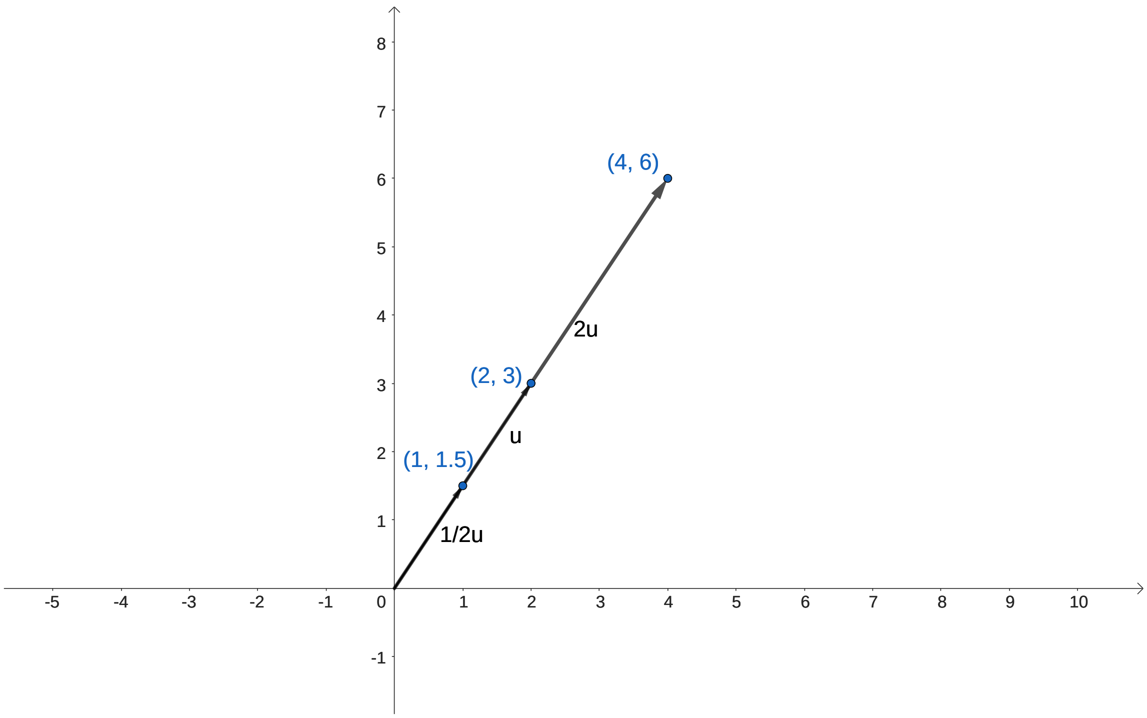
Para obtener geométricamente $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, nos enfocamos en la diagonal anclada en $(0,0)$ del paralelogramo formado.

- *Multiplicación de un escalar por un vector:* Sean $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{(0,0)(2,3)}$ y $c\in\mathbb{R}$. Entonces,

$$c\overrightarrow{u}=\overrightarrow{(0,0)(2c,3c)}.$$

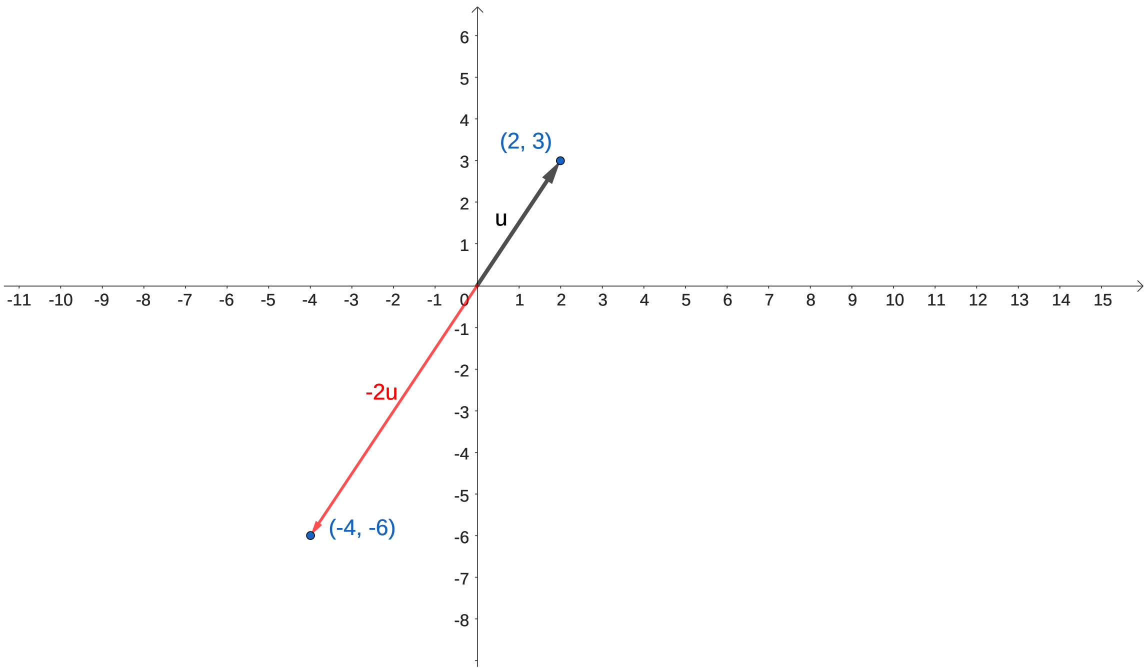
Analizamos el efecto de la multiplicación del escalar c sobre el vector $\overrightarrow{u}$, dividiéndolo en casos según el valor de c.

Si $c>0$, distinguimos dos subcasos: la multiplicación por c resulta en un alargamiento de $\overrightarrow{u}$ en c veces cuando $c>1$. Por ejemplo, la multiplicación de $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{(0,0)(2,3)}$ por 2 da como resultado el vector $\overrightarrow{(0,0)(4,6)}$. De manera análoga, para $0<c<1$, obtenemos un acortamiento de $\overrightarrow{u}$. Por ejemplo, para $c=\frac{1}{2}$, obtenemos el vector $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{(0,0)(2,3)}=\overrightarrow{(0,0)(1,\frac{3}{2})}$.



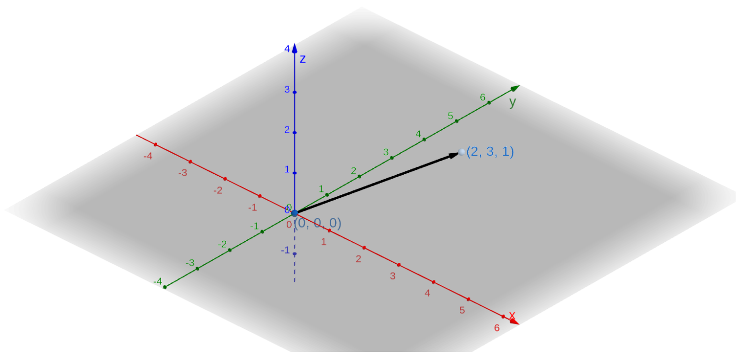
En general, si c es un número real con $c > 0$, $c\overrightarrow{u}$ se interpreta como un vector en la misma dirección que $\overrightarrow{u}$. De hecho, diremos que $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tienen la misma dirección si existe un número real $c > 0$ tal que $\overrightarrow{u} = c\overrightarrow{v}$.

La multiplicación por un número real negativo invierte la dirección. Por ejemplo, $-2\overrightarrow{u} = \overrightarrow{(0,0)(-4,-6)}$, como se representa en la siguiente figura.



Decimos que dos vectores no nulos $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tienen direcciones opuestas si existe un $c < 0$ tal que $\overrightarrow{u} = c\overrightarrow{v}$.

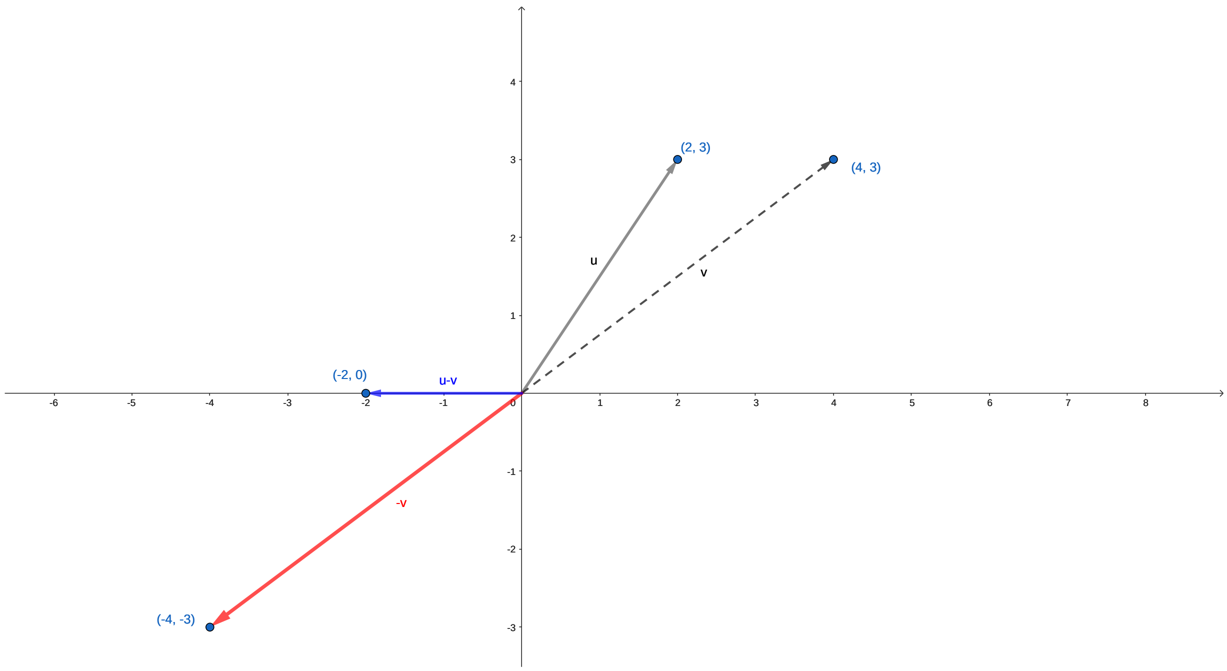
2. *El caso* $n = 3$. Podemos realizar consideraciones análogas e interpretar geométricamente que $\mathbb{R}^3$ se describe como el conjunto de todas las 3-uplas ordenadas de la forma (x, y, z). Observamos una correspondencia directa entre cada 3-upla (x, y, z) y el vector anclado en el origen con su punto terminal en (x, y, z). Por ejemplo, identificamos la 3-upla $(2, 3, 1)$ con el vector anclado en el origen y punto terminal en $(2, 3, 1)$, es decir, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{(0, 0, 0)(2, 3, 1)}$, como muestra la siguiente figura.



La interpretación geométrica de los vectores, comúnmente asociada a los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, se aplica convencionalmente al caso general de vectores en $\mathbb{R}^n$. Aunque esta visualización tiene sentido al considerar vectores que podemos percibir en dimensiones espaciales más bajas, como $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, se extiende esta práctica incluso al contexto abstracto de $\mathbb{R}^n$.

Este enfoque surge al contemplar que, de no estar limitados por las restricciones espaciales inherentes a nuestra percepción como seres humanos (habiendo evolucionado en un entorno tridimensional, $\mathbb{R}^3$, y siendo incapaces de visualizar o imaginar espacios $\mathbb{R}^n$ con $n > 3$), los vectores en $\mathbb{R}^n$ mostrarían las "mismas propiedades geométricas"que los vectores en dimensiones más bajas, como $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

Observación 5.1 *La resta de vectores en $\mathbb{R}^n$, denotada como $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, se define como la suma de $\overrightarrow{u}$ con el opuesto de $\overrightarrow{v}$, es decir, $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{-v}$. Dados los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{(0,0)(2,3)}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{(0,0)(4,3)}$, la resta de estos vectores es $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{(0,0)(2-4,3-3)} = \overrightarrow{(0,0)(-2,0)}$.*



5.2. Rectas en $\mathbb{R}^3$.

En esta sección, caracterizaremos los puntos que pertenecen al lugar geométrico de una **recta** en $\mathbb{R}^3$. Para ello, consideremos que todos los vectores cuyo extremo y orígen se encuentran sobre la recta son simplemente múltiplos de un vector específico, al cual llamaremos el **vector director** de la recta, suponiendo siempre que este vector no sea nulo.

Sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo de la recta L, y $P = (x, y, z)$ cualquier otro punto en ella. Podemos expresar el vector $\overrightarrow{P_0P}$ como $t\overrightarrow{u}$, donde $\overrightarrow{u}$ es el vector director de L con coordenadas (a, b, c), y t es un número real. Así, de la igualdad

$$\overrightarrow{P_0P} = t\overrightarrow{u},$$

obtenemos la **ecuación vectorial de la recta** L:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(a, b, c).$$

A partir de esta igualdad, obtenemos la **ecuación paramétrica de la recta** L:

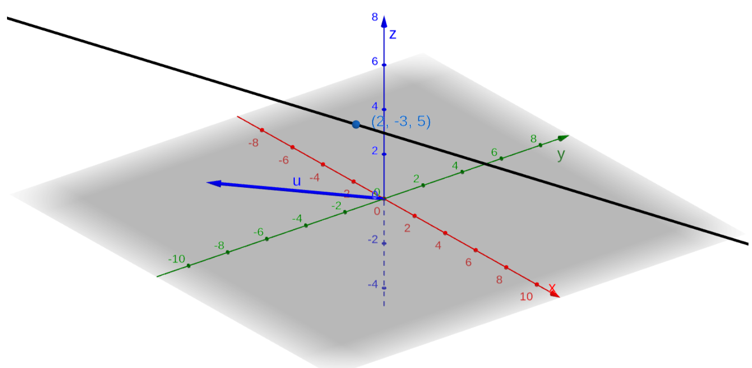
$$L = \begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases}$$

donde $t \in \mathbb{R}$ es el **parámetro**, permitiendo expresar cada componente del punto $(x, y, z) \in L$ como una función de t:

$$L = \begin{cases} x(t) = x_0 + ta \\ y(t) = y_0 + tb \\ z(t) = z_0 + tc \end{cases} \quad .$$

Ejemplo 5.1 *Obtengamos la ecuación paramétrica de la recta L que pasa por el punto $(2,-3,5)$ y tiene a $\overrightarrow{u}=(-4,-6,1)$ como vector director. Según la ecuación anterior, ecuación de la recta viene dada por*

$$L=\begin{cases} x(t)=2-4t \\ y(t)=-3-6t \\ z(t)=5+t \end{cases}$$



Nótese que, al despejar e igualar el parámetro t de cada una de las ecuaciones paramétricas de la recta L, ésta también puede describirse a través de una **ecuación simétrica**:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

Esta ecuación solo puede obtenerse si las componentes del vector director son no nulas, es decir, si $a, b, c \neq 0$. Retomando el ejemplo anterior, la ecuación simétrica de la recta que pasa por el punto $(2, -3, 5)$ y tiene como vector director a $\overrightarrow{u} = (-4, -6, 1)$ está dada por:

$$\frac{x-2}{-4} = \frac{y+3}{-6} = \frac{z-5}{1}.$$

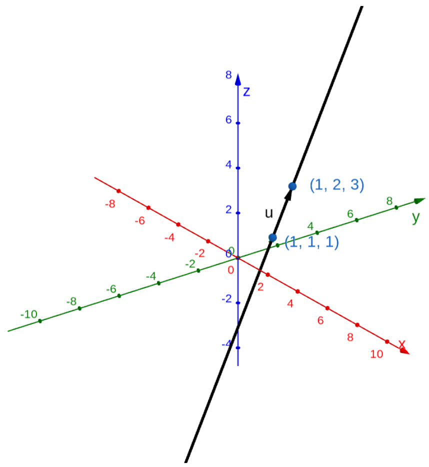
Observación 5.2 *Al igual que en $\mathbb{R}^2$, en $\mathbb{R}^3$, dos puntos determinan una única recta. En efecto, la recta determinada por los puntos $P_0 = (x_0, x_1, x_2)$ y $P_1 = (y_0, y_1, y_2)$ viene definida por cualquiera de los puntos P_0 o P_1 y un vector director. Este vector director puede obtenerse considerando el vector $\overrightarrow{P_0P_1}$ o $\overrightarrow{P_1P_0}$.*

Ejemplo 5.2 *La ecuación paramétrica de la recta L que pasa por los puntos $(1, 1, 1)$ y $(1, 2, 3)$ viene dada por*

$$L = \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = 1 + t \\ z(t) = 1 + 2t \end{cases}$$

donde hemos utilizado el punto $P_0 = (1, 1, 1)$ y el vector director $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{(1, 1, 1)(1, 2, 3)} = (0, 1, 2)$ para su construcción. Aunque la primera componente del vector director $\overrightarrow{u}$ es nula, podemos obtener una ecuación simétrica para la recta L de la siguiente manera

$$\frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}, \; x = 1.$$



Ejemplo 5.3 *1. Consideremos las dos rectas*

$$L_1 = \begin{cases} x(t) = 1 + 4t \\ y(t) = -2 - 6t \\ z(t) = 5 + 8t \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} x(t) = 7 + 3s \\ y(t) = 2 + 2s \\ z(t) = 1 - 2s \end{cases}$$

donde los parámetros de las rectas han sido convenientemente escogidos con letras distintas, $t, s \in \mathbb{R}$. Estamos interesados en calcular $L_1 \cap L_2$. Si existe algún punto $(x, y, z) \in L_1 \cap L_2$, tendría que existir un *valor de t y otro de s que hagan posible que se obtengan las igualdades correspondientes, es decir,*

$$\begin{cases} 1+4t = 7+3s \\ -2-6t = 2+2s \\ 5+8t = 1-2s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t-3s = 6 \\ -6t-2s = 4 \\ 8t+2s = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t-3s = 6 \\ \dfrac{-13}{2}s = 13. \end{cases}$$

En este caso, este sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas (s y t) tiene solución para $t = 0$ y $s = -2$. Al sustituir estos valores de los parámetros en las ecuaciones de las rectas, encontramos que el punto común de ambas es $(1, -2, 5)$.

2. ***Ejercicio 8. Examen GAL1. Febrero 2016.***

   Dado $a, b \in \mathbb{R}$, se considera el sistema lineal S con 3 ecuaciones y 3 incógnitas dado por la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -a & a & b \end{array}\right)$$

   El conjunto solución del sistema S es una recta si y solo si:

   (A) $a^2 \neq 1$ (cualquier valor de b).

   (B) $a = 1$ o $a = -1$ (cualquier valor de b).

   (C) $a = 1$ y $b = 0$.

   (D) $a = -1$ (cualquier valor de b).

   (E) $a = -1$ y $b = 1$.

   Solución: *Opción E. En efecto, escalerizando, obtenemos que:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -a & a & b \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & -a-1 & a+1 & b+1 \end{array}\right)$$

   Se distinguen tres casos:

   a) *Si $a^2 \neq 1$ (es decir, $a \neq 1$ y $a \neq -1$), el sistema es compatible determinado y tiene una solución única.*

   b) *Si $a = 1$, el sistema tiene la matriz ampliada*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \end{array}\right)$$

   Se distinguen dos subcasos:

   1) *Si $b \neq -1$, el sistema es incompatible.*
   2) *Si $b = -1$, el sistema es compatible indeterminado, y su conjunto solución es el plano $\pi : x + y - z = 1$.*

c) *Si $a = -1$, el sistema tiene la matriz ampliada*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & b+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right)$$

De nuevo, se distinguen dos subcasos:

1) *Si $b \neq 1$, el sistema es incompatible.*
2) *Si $b = 1$, el sistema es compatible indeterminado, y su conjunto solución es la recta $r : x - y = 0, z = -1$.*

Luego, el conjunto solución del sistema original consiste en una recta solo en el último caso, donde $a = -1$ y $b = 1$.

Definición 5.1 *Dos rectas son **paralelas** si sus vectores directores tienen la misma dirección.*

Si $\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_2}$ son los vectores directores de las rectas L_1 y L_2 respectivamente, entonces L_1 es paralela a L_2, denotado por $L_1 \parallel L_2$, si $\overrightarrow{u_1} \parallel \overrightarrow{u_2}$, es decir, si existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{u_1} = c\overrightarrow{u_2}$. En este caso, podemos distinguir dos subcasos:

$$L_1 \parallel L_2 \Rightarrow \begin{cases} L_1 \cap L_2 = \emptyset \Rightarrow L_1 \text{ y } L_2 \text{ son paralelas no coincidentes.} \\ L_1 \cap L_2 \neq \emptyset \Rightarrow L_1 \text{ y } L_2 \text{ son paralelas coincidentes.} \end{cases}$$

Si dos rectas en $\mathbb{R}^3$ no son paralelas, diremos entonces que se **cruzan**. En este caso, también podemos tener dos subcasos dependiendo de cómo sea su intersección:

$$L_1 \nparallel L_2 \Rightarrow \begin{cases} L_1 \cap L_2 = \emptyset \Rightarrow L_1 \text{ y } L_2 \text{ se cruzan y no se cortan.} \\ L_1 \cap L_2 \neq \emptyset \Rightarrow L_1 \text{ y } L_2 \text{ se cruzan y se cortan.} \end{cases}$$

5.3. Intersección de rectas y sistemas de ecuaciones.

Consideremos dos rectas L_1 y L_2 no paralelas dadas por las ecuaciones paramétricas

$$L_1 = \begin{cases} x(t) = x_1 + a_1 t \\ y(t) = y_1 + b_1 t \\ z(t) = z_1 + c_1 t \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} x(t) = x_2 + a_2 s \\ y(t) = y_2 + b_2 s \\ z(t) = z_2 + c_2 s \end{cases}$$

Estas rectas se cruzan en el espacio al no ser paralelas. Al plantear el sistema

$$\begin{cases} x_1 + a_1 t = x_2 + a_2 s \\ y_1 + b_1 t = y_2 + b_2 s \\ z_1 + c_1 t = z_2 + c_2 s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 t - a_2 s = x_2 - x_1 - 1 \\ b_1 t - b_2 s = y_2 - y_1 - 1 \\ c_1 t - c_2 s = z_2 - z_1 - 1 \end{cases}$$

notamos que este sistema tiene 3 ecuaciones y 2 incógnitas. Se presentan los siguientes casos:

- El sistema es incompatible, en cuyo caso, L_1 y L_2 se cruzan pero no se cortan.
- El sistema es compatible determinado, en cuyo caso, L_1 y L_2 se cruzan y además su intersección no es vacía y consta de un único punto.

Ejemplo 5.4 *Consideremos dos rectas L_1 y L_2 dadas por las ecuaciones paramétricas*

$$L_1 = \begin{cases} x(t) = -7 + 3t \\ y(t) = -4 + 4t \\ z(t) = -3 + -2t \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} x(t) = 21 + 6s \\ y(t) = -5 + -4s \\ z(t) = 2 + -s \end{cases}$$

Notamos que $L_1 \nparallel L_2$, lo que significa que las rectas se cruzan en $\mathbb{R}^3$. Al considerar el sistema

$$\begin{cases} 3t - 6s = 7 + 21 \\ 4t + 4s = 4 - 5 \\ -2t + s = 3 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t - 6s = 28 \\ 4t + 4s = -1 \\ -2t + s = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t - 6s = 28 \\ 12s = \dfrac{-115}{3} \\ 0 = \dfrac{169}{12} \end{cases}$$

Como el sistema planteado no tiene solución, las rectas no se cortan. Por lo tanto, $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

5.4. Planos en $\mathbb{R}^3$.

Vimos que dos puntos cualesquiera en $\mathbb{R}^3$ determinan una única recta. Ahora, si consideramos tres puntos no colineales[1] $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ estamos interesados en describir el lugar geométrico al que llamaremos **plano**, formado por todas las sumas de múltiplos de los vectores $\overrightarrow{P_0P_1}$ y $\overrightarrow{P_0P_2}$ (anclados en el punto (x_0, y_0, z_0)). Dicho lugar geométrico se describe mediante la **ecuación vectorial**

$$\overrightarrow{(x_0, y_0, z_0)(x, y, z)} = \lambda\overrightarrow{P_0P_1} + \mu\overrightarrow{P_0P_2},$$

donde λ y μ son parámetros reales.

Podemos observar que la condición de no colinealidad entre los puntos P_0, P_1 y P_2 implica que los vectores $\overrightarrow{P_0P_1}$ y $\overrightarrow{P_0P_2}$ no son paralelos. Por lo tanto, necesitamos de dos parámetros, en este caso λ y μ, para describir un plano en $\mathbb{R}^3$. Resulta entonces que la ecuación paramétrica del plano viene dada por

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y - y_0 = \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z - z_0 = \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases}$$

Si expresamos explícitamente la dependencia de cada coordenada del plano respecto a los parámetros λ y μ, obtenemos:

$$\begin{cases} x(\lambda, \mu) = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y(\lambda, \mu) = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z(\lambda, \mu) = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases}$$

En resumen, tres puntos no colineales P_0, P_1 y P_2 determinan un único plano que los contiene. También podemos pensar que cada plano queda determinado por un punto fijo, en este caso, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, y dos vectores no nulos y no paralelos $\overrightarrow{u} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\overrightarrow{v} = (b_1, b_2, b_3)$. En este caso, la ecuación vectorial del plano también se puede expresar como

$$\overrightarrow{(x_0, y_0, z_0)(x, y, z)} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v},$$

[1]Un conjunto de puntos situados sobre una misma recta se dice que es colineal.

donde λ y μ son parámetros reales. La correspondiente ecuación paramétrica es entonces

$$\begin{cases} x(\lambda,\mu) = x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y(\lambda,\mu) = y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z(\lambda,\mu) = z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3. \end{cases}$$

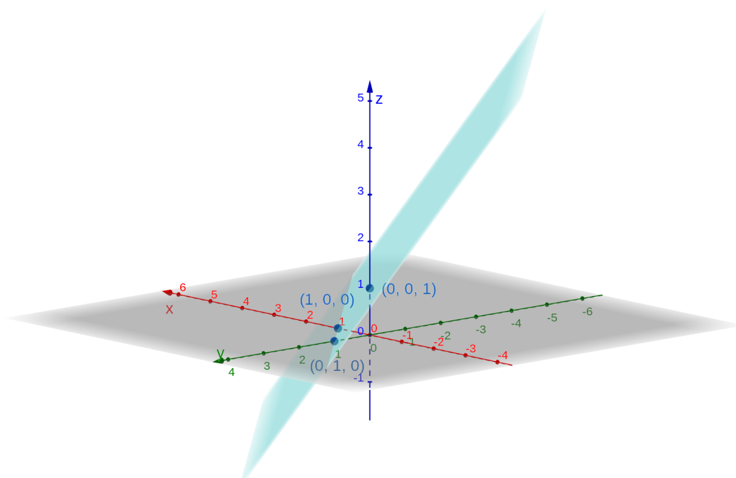
Ejemplo 5.5 *Obtengamos la ecuación parámetrica del plano π que contiene los puntos $P_0 = (1,0,0), P_1(0,1,0)$ y $P_2 = (0,0,1)$. Utilizando la fórmula recién presentada, la ecuación buscada es:*

$$\overrightarrow{(x_0,y_0,z_0)(x,y,z)} = \lambda\overrightarrow{P_0P_1} + \mu\overrightarrow{P_0P_2},$$

$$\pi = \begin{cases} x - x_0 = \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y - y_0 = \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z - z_0 = \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases}$$

$$\pi = \begin{cases} x - 1 = \lambda(0 - 1) + \mu(0 - 1) \\ y - 0 = \lambda(1 - 0) + \mu(0 - 0) \\ z - 0 = \lambda(0 - 0) + \mu(1 - 0) \end{cases}$$

$$\pi = \begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu. \end{cases}$$



5.4.1. Ecuación reducida de un plano en $\mathbb{R}^3$

Consideremos un plano π determinado por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y los vectores dirección $\overrightarrow{u} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\overrightarrow{v} = (b_1, b_2, b_3)$. Entonces, el punto $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \in \pi$ si existen reales λ y μ tales que se verifica la siguiente relación:

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y - y_0 = \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z - z_0 = \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases}$$

Luego, el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda F_2 + \mu F_3 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

debe ser igual a cero debido a que la primera fila F_1 se puede expresar como $\lambda F_2 + \mu F_3$. Por lo tanto,

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Al calcular este determinante usando la expansión por cofactores en la primera fila, se obtiene:

$$(x-x_0)\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - (y-y_0)\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + (z-z_0)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto,

$$(x-x_0)(a_2b_3 - a_3b_2) - (y-y_0)(a_1b_3 - a_3b_1) + (z-z_0)(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

Denotando $A = a_2b_3 - a_3b_2$, $B = a_1b_3 - a_3b_1$, y $C = a_1b_2 - a_2b_1$, tenemos la **ecuación reducida del plano** π:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

En general, la ecuación reducida de un plano tiene la forma $Ax + By + Cz + D = 0$, donde los coeficientes A, B y C no pueden ser simultáneamente nulos.

Ejemplo 5.6 *Determinemos la ecuación reducida del plano π que contiene los puntos $P_0 = (1,0,0)$, $P_1 = (0,1,0)$ y $P_2 = (0,0,1)$. Tomamos las direcciones $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_0P_1} = (-1,1,0)$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_0P_2} = (-1,0,1)$ y planteamos el determinante según lo discutido anteriormente:*

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo este determinante obtenemos la ecuación reducida del plano:

$$x + y + z = 1$$

La ecuación reducida del plano proporciona información geométrica interesante, ya que permite calcular los puntos de corte (si existen) del plano con cada uno de los ejes coordenados. Por ejemplo, si queremos conocer el punto de corte entre el plano $x + y + z = 1$, es suficiente con sustituir $y = z = 0$ en la ecuación anterior para obtener que $x = 1$. Esto indica que el punto de intersección entre el eje de las X y el plano $x + y + z = 1$ es $(1,0,0)$.

En general, si $A \neq 0$, el plano cortará el eje X en el punto $\left(\frac{-D}{A}, 0, 0\right)$; si $B \neq 0$, entonces el plano cortará el eje Y en el punto $\left(0, \frac{-D}{B}, 0\right)$; y finalmente, si $C \neq 0$, el plano cortará el eje Z en el punto $\left(0, 0, \frac{-D}{C}\right)$.

Ejemplo 5.7 *1.* ***Ejercicio 7. Primer parcial GAL1 interactiva. Septiembre 2023.***

a) *Hallar una ecuación paramétrica y una reducida para la recta r que pasa por el punto $(1,0,1)$ y es paralela al vector $(1,1,1)$.*

b) *Hallar una ecuación paramétrica y una reducida para el plano que pasa por los puntos $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,3)$.*

Solución:

a) *Una ecuación paramétrica se obtiene expresando en coordenadas una ecuación vectorial:*

$$\vec{X} := (1,0,1) + \lambda(1,1,1) \quad (S_\lambda) = \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$$

Despejando λ y sustituyendo, el sistema (S_λ) equivale al (S'_λ):

$$\begin{cases} x = 1+y \\ y = \lambda \\ z = 1+y \end{cases}$$

La primera y la tercera ecuación de (S'_λ) constituyen una ecuación reducida para la recta r, que la expresan como intersección de dos planos:

$$(S) \quad \begin{cases} x-y-1=0 \\ z-y-1=0 \end{cases}$$

b) *Igual que en el caso anterior, empezamos por hallar una ecuación vectorial para el plano. Llamemos a los puntos dados $A = (1,0,0)$, $B = (0,2,0)$ y $C = (0,0,3)$, de donde tenemos los vectores directores $\overrightarrow{AB} = (-1,2,0)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1,0,3)$. Una ecuación vectorial es $(S_{\lambda\mu})$ y luego, despejando λ y μ y sustituyendo hallamos una reducida:*

$$\overrightarrow{X} = (1,0,0) + \lambda(-1,2,0) + \mu(-1,0,3) \quad (S_{\lambda,\mu}) = \begin{cases} x = 1-\lambda-\mu \\ y = 2\lambda \\ z = 3\mu \end{cases} \sim \begin{cases} x = 1-\frac{y}{2}-\frac{z}{3} \\ y = 2\lambda \\ z = 3\mu \end{cases}$$

La primera ecuación de este sistema constituye una ecuación reducida para el plano: $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z-1 = 0$.

2. ***Ejercicio 3. Examen GAL1 interactiva. Febrero 2024.***

a) *Hallar una ecuación paramétrica y una reducida para la recta r que pasa por el punto (3, 0, 2) y es paralela al vector $(-1,1,2)$.*

b) *Hallar una ecuación paramétrica y una reducida para el plano que pasa por los puntos de coordenadas $(1,0,0), (2,1,0)$ y $(3,0,1)$.*

Solución:

a) *Una ecuación vectorial de la recta es $(x,y,z) = (3,0,2) + \lambda(-1,1,2)$. De esta se deduce una paramétrica, simplemente escribiendo esta identidad vectorial en coordenadas:*

$$\begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2+2\lambda \end{cases}$$

Una forma de obtener una ecuación reducida consiste en despejar el parámetro de una de las identidades y sustituirlo en las restantes dos. En este caso,

$$\lambda = y$$

y sustituyendo obtenemos:

$$\begin{cases} x = 3 - y \\ z = 2 + 2y \end{cases}$$

b*) Para buscar una ecuación paramétrica precisamos dos vectores directores del plano:* $\mathbf{u} := (2,1,0) - (1,0,0) = (1,1,0)$ *y* $\mathbf{v} = (3,0,1) - (1,0,0) = (2,0,1)$*. Una ecuación vectorial para el plano es* $(x,y,z) = (1,0,0) + \lambda(1,1,0) + \mu(2,0,1)$ *y escribiendo esta identidad en coordenadas obtenemos una ecuación paramétrica:*

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Despejando los parámetros λ *y* μ *de dos de las identidades y sustituyendo en la tercera se obtiene una ecuación reducida para el plano. En este caso, los parámetros están ya despejados:* $\lambda = y$ *y* $\mu = z$*, y luego obtenemos la ecuación reducida* $x = 1 + y + 2z$*.*

5.5. Práctico 5.

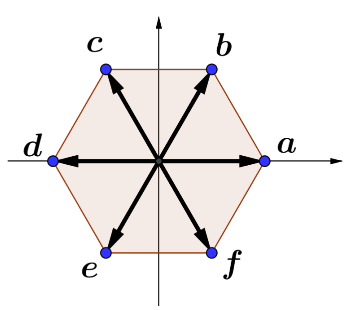
Práctico 5.

Geometría en el espacio. Rectas y planos.

Ejercicios sugeridos:

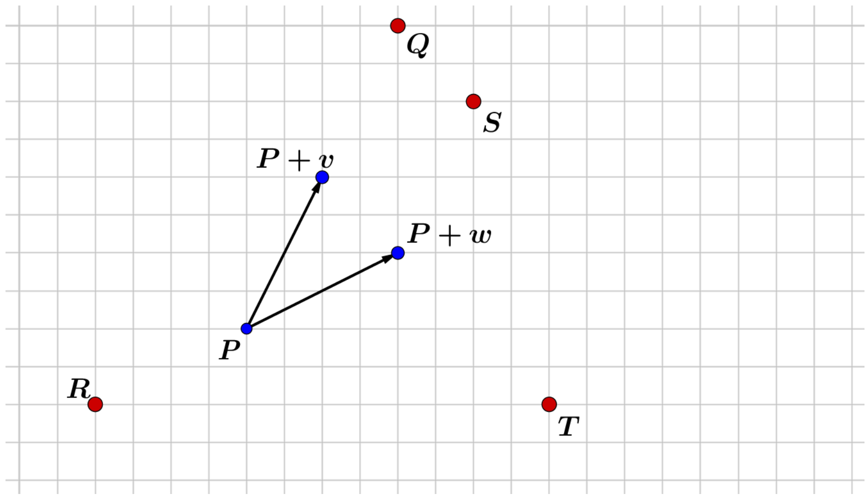
5.6. Puntos y vectores.

1. **Polígonos regulares.** Considere el hexágono regular centrado en el origen que se muestra en la figura.



   a) ¿Cuánto da la suma de los vectores $a, b, ..., f$?
   b) ¿Qué ocurre si sumamos todos menos a?
   c) Discutir qué ocurre con el triángulo regular a, c, e.

2. Para el plano representado en la siguiente figura determinar λ y μ tal que $Q = P + \lambda v + \mu w$. Repetir para R, S y T.



5.7. Ecuación del plano y de la recta.

1. Hallar ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas (o reducidas) de las siguientes rectas:

   a) la que pasa por el punto $P = (1, 2, 5)$, con vector director $v = (2, 1, 3)$;

   b) la que pasa por los puntos $A = (4, 3, 0)$ y $B = (1, 0, 1)$.

2. *a*) Averiguar si los puntos $(3, 1, -1)$, $(5, 2, 1)$ y $(5, 0, 0)$ pertenecen a la recta con ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = 2 - \lambda, \\ z = -2 + \lambda. \end{cases}$$

   b) Repetir para los puntos $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, -1, 1)$, y la recta que tiene ecuaciones reducidas

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

   c) Averiguar si los puntos $(1, 0, 2)$, $(-1, 1, 1)$ y $(3, -1, 1)$ están alineados. Si lo están, encontrar ecuaciones paramétricas y reducidas de la recta que determinan.

   d) Repetir para $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$ y $(1, 2, 3)$.

3. Hallar ecuaciones paramétricas y reducidas de los siguientes planos:

   a) el que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y tiene a $(2, -1, 1)$ y $(1, 0, -1)$como vectores directores;

   b) el que pasa por los puntos $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 3)$ y $(1, 1, -2)$;

   c) el que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y contiene a la recta $\begin{cases} x + y + z + 2 = 0, \\ x - y - z - 2 = 0. \end{cases}$

4. *a*) Demostrar que si $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ son dos vectores no colineales, es decir, ninguno es múltiplo del otro, el sistema de ecuaciones paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{l} x = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{array} \right. \tag{5.1}$$

es compatible si y sólo si el determinante

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

b) Concluir que el plano de ecuaciones paramétricas tiene una ecuación reducida de la forma

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} (x - p_1) - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} (y - p_2) + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} (z - p_3) = 0.$$

c) Usar este resultado para hallar una ecuación reducida del plano cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \lambda - \mu, \\ y = 2 + \lambda + \mu, \\ z = -1 - \lambda - 2\mu. \end{array} \right. .$$

5. Hallar la intersección de los siguientes planos:

$$2x - 3y + 4z = -2, \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \lambda + \mu, \\ y = -1 - \lambda + 2\mu, \\ z = -2 - 2\lambda - \mu. \end{array} \right.$$

6. Se consideran los planos de ecuaciones

$$2x + y + z - 2 = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda + 2\mu, \\ y = -3 + \lambda - \mu, \\ z = \lambda + \mu, \end{array} \right. ,$$

y las rectas de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{r} x + y - 3z = -6, \\ x + 2y - 4z = -8, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + \lambda, \\ y = 4 + \lambda, \\ z = 1 - 3\lambda \end{array} \right. .$$

Hallar la intersección de cada una de las dos rectas con cada uno de los dos planos.

7. Para cada una de las ternas de planos π_1, π_2 y π_3 que se proponen a continuación, hallar la intersección $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ de los tres planos. En caso de que la intersección sea vacía, estudiar las intersecciones dos a dos. Interpretar geométricamente los resultados.

a) $\pi_1\colon y + z = 0$, $\pi_2\colon 2x - y - 2z = 5$, $\pi_3\colon 3x + 3y + 2z = 7$.

b) $\pi_1\colon x + 2y - z = 2$, $\pi_2\colon 2x + y - 3z = 0$, $\pi_3\colon -2x - 4y + 2z = 3$.

c) $\pi_1\colon x - 2y + z = 5$, $\pi_2\colon x + z = 3$, $\pi_3\colon x + 4y + z = 0$.

8. Hallar ecuaciones paramétricas de una recta que no corte a ninguno de los planos de ecuaciones

$$x + y + z = 1, \quad x - y = 3$$

y que pasa por el punto $(10, 11, 12)$.

9. Sean π el plano dado por $\pi : x + y + z = 3$ y r la recta dada por $r : (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(a, b, 1)$. Discutir la intersección de r y π en función de a y b.

5.7.1. Solución de ejercicios seleccionados del Práctico 5.

Puntos y vectores.

1 a. La suma de los vectores da el vector nulo.

b. La suma de todos menos a da el vector d.

c. Sumar c y e da el vector d que es opuesto a a por lo que hacer $a + c + e = a + d$ que es el vector nulo.

Ecuación del plano y de la recta.

1 a. Sustituyendo los datos en la ecuación vista en el teórico, llegamos a que la ecuación paramétrica de la recta es $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases}$

Para pasar a la ecuación implícita, podemos despejar λ de una de las ecuaciones y sustituir en las otras. Por ejemplo, tomando la segunda ecuación, tenemos que $\lambda = y - 2$. Sustituyendo en la primera y la tercera, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -3y + z = -1 \end{cases}$$

b. A partir de los puntos A y B, podemos encontrar un vector director de la recta: $v = \overrightarrow{BA}$ y entonces la ecuación paramétrica es:

$$\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

De forma análoga a la parte anterior, obtenemos la ecuación reducida:

$$\begin{cases} x + 3z = 4 \\ y - 3z = 3 \end{cases}$$

3 a. La ecuación paramétrica es:

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(2, -1, 1) + \mu(1, 0, -1)$$

Como en el caso de las rectas, podemos despejar los parámetros λ y μ en función de las variables x, y, z para pasar a la ecuación reducida:

$$x + 3y + z = 5$$

b. La paramétrica es:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda - 3\mu \end{cases}$$

La reducida es:

$$x - y = 0$$

c. Dado que la recta está contenida en el plano, alcanza encontrar dos puntos de ésta y junto con el punto $P = (1, 1, 1)$, estamos en un caso análogo al de la parte anterior. Si por ejemplo consideramos los puntos $Q = (0, 0, -2)$ y $R = (0, -1, -1)$ y los vectores $v = \overrightarrow{QP}$ y $w = \overrightarrow{RP}$, la ecuación paramétrica es:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + 1\mu \\ y = 1 + \lambda + 2\mu \\ z = 1 + 3\lambda + 2\mu \end{cases}$$

y la implícita es

$$-4x + y + z = -2$$

5 Para hallar la intersección, debemos armar un sistema con las ecuaciones de ambos planos. Para esto, consideramos la ecuación reducida del segundo plano:

$$5x - 3y - z = 15$$

Entonces, la intersección de los planos es:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -2 \\ 5x - 3y - z = 15 \end{cases}$$

Dado que el sistema es compatible indeterminado con un gradao de libertad, tenemos que la intersección es una recta.

6 Si $\pi_1 : 2x + y + z - 2 = 0$ y $r_1 : \begin{cases} x + y - 3z = -6 \\ x + 2y - 4z = -8 \end{cases}$, tenemos que la intersección es

$$\pi_1 \cap r_1 : \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + y - 3z = -6 \\ x + 2y - 4z = -8 \end{cases}$$

Que es un sistema compatible determinado y su solución es $(0, 0, 2)$. Es decir, la recta y el plano se intersectan en un punto.

Si $r_2 : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$

entonces podemos pasar r_2 a reducida de modo que la intersección $r_2 \cap \pi_2$ esté determinada por la solución de un sistema de 3 ecuaciones donde aparecen las dos de r_2 y el plano.

Otra forma de pensar el ejercicio es sustituir en la ecuación del plano los valores de x, y, z como están dados en la ecuación de la recta y estudiar para cuáles λ la eucación obtenida tiene solución. Es decir

$$r_2 \cap \pi_1 : 2(3 + \lambda) + (4 + \lambda) + (1 - 3\lambda) - 2 = 2\lambda + \lambda - 3\lambda + 6 + 4 + 1 - 2 = 9 \neq 0$$

Y concluimos que su intersección con π_1 es vacía.

6 La intersección de estos planos es la recta dada por

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Es claro aue cualquier recta paralela a esta y no coincidente, será paralela a ambos planos y por lo tanto no cortará a ninguno de ellos.

El vector $(1, 1, -2)$ es vector director de esta recta. Teniendo en cuenta que el punto $(10, 11, 12)$ no está en ninguno de los planos, conseguimos la siguiente recta

$$\begin{cases} x = 10 + \lambda \\ y = 11 + \lambda \\ z = 12 - 2\lambda \end{cases}$$

que no corta a ninguno de los planos.

Una forma de convencerse de esto es notar que dados dos vectores directores directores v y w de cualquiera de los planos, podemos escribir al vector director de la recta como

$$(1, 1, -2) = \alpha v + \beta w$$

para algunos valores de α y β, por lo tanto, la recta tiene direccción paralela al plano.

9 Pasando r a forma reducida, tenemos que la intersección entre la recta y el plano está dada por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - az = 0 \\ y - bz = 0 \end{cases}$$

Si $a+b \neq -1$, el sistema es compatible determinado y la recta corta al plano en el punto $(\frac{3a}{1+a+b}, \frac{3b}{1+a+b}, \frac{3}{1+a+b})$.

Si $a + b = -1$, el sistema es incompatible y la recta es paralela al plano.

5.8. Producto escalar.

En el espacio $\mathbb{R}^n$, podemos definir un tipo de producto entre sus elementos, que son los vectores que componen el espacio. Este producto enriquece el espacio con propiedades geométricas que nos permiten explorarlo más profundamente. Se conoce como el producto punto o producto escalar, y es un tipo de producto interno que se puede definir en espacios vectoriales como se verá luego.

El **producto punto** en $\mathbb{R}^n$ es una función que toma dos vectores u y v en $\mathbb{R}^n$ y los asocia con un número real $u \cdot v$, también llamado **producto escalar** de u e v, a menudo denotado como $< u, v >$. Se define como:

$$u \cdot v = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

donde $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

El siguiente teorema enumera las propiedades más importantes del producto punto.

Teorema 5.1 *Para cada $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ y $w = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ vectores en $\mathbb{R}^n$ se cumplen las siguientes propiedades.*

1. $u \cdot u$ es siempre no negativo, y es igual a cero si y solo si u es el vector nulo.
2. $u \cdot v = v \cdot u$, lo que significa que el producto punto es conmutativo.
3. $(u + w) \cdot v = u \cdot v + w \cdot v$, lo que implica que el producto punto es distributivo sobre la suma vectorial.
4. $(\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v)$ para todo escalar λ en $\mathbb{R}$.

Demostración:

1. Al considerar el producto punto $u \cdot u$

$$u \cdot u = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Cada término x_i^2 es no negativo, ya que el cuadrado de cualquier número real es no negativo. Por lo tanto, la suma de términos no negativos también es no negativa. Además, $u \cdot u$ es igual a cero si y solo si cada x_i es igual a cero. Así que $u \cdot u = 0$ si y solo si $u = \mathbf{0}$.

2.
$$u \cdot v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \ldots + y_n x_n = v \cdot u.$$

3. Consideremos el producto punto de $u + w$ con v:

$$(u + w) \cdot v = (x_1 + z_1) y_1 + (x_2 + z_2) y_2 + \ldots + (x_n + z_n) y_n.$$

Aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma en $\mathbb{R}$:

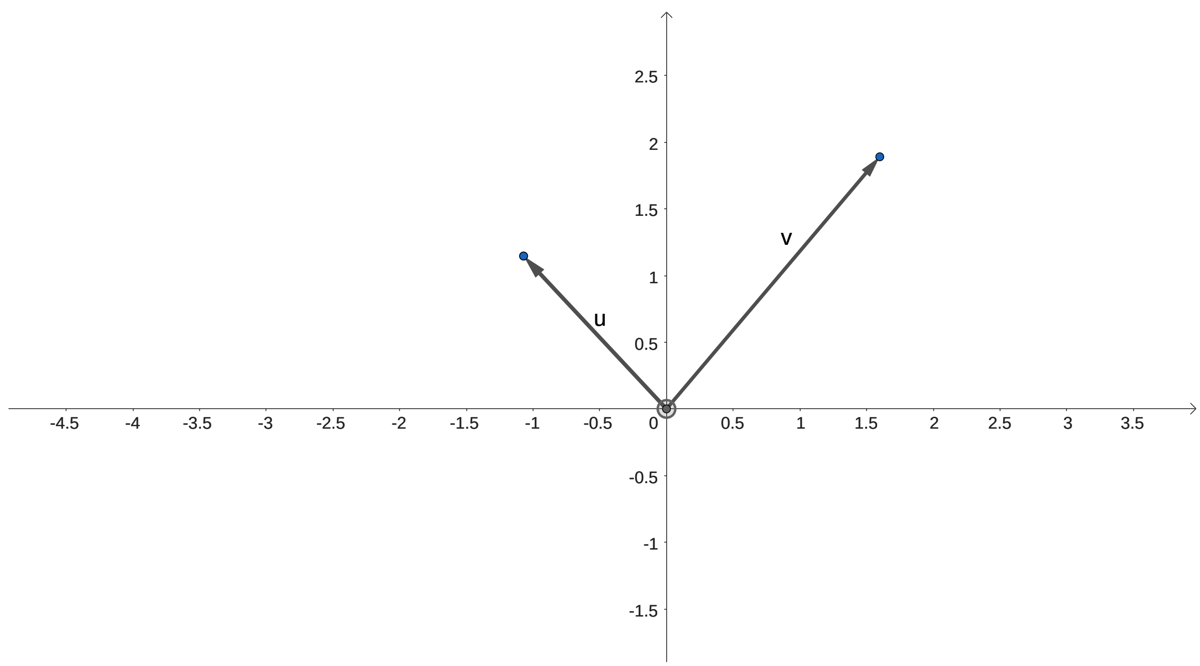
$$(u+w)\cdot v = x_1y_1+z_1y_1+x_2y_2+z_2y_2+\ldots+x_ny_n+z_ny_n = (x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)+(z_1y_1+z_2y_2+\ldots+z_ny_n) = u\cdot v+w\cdot v$$

4. Consideremos el producto punto de λu con v:

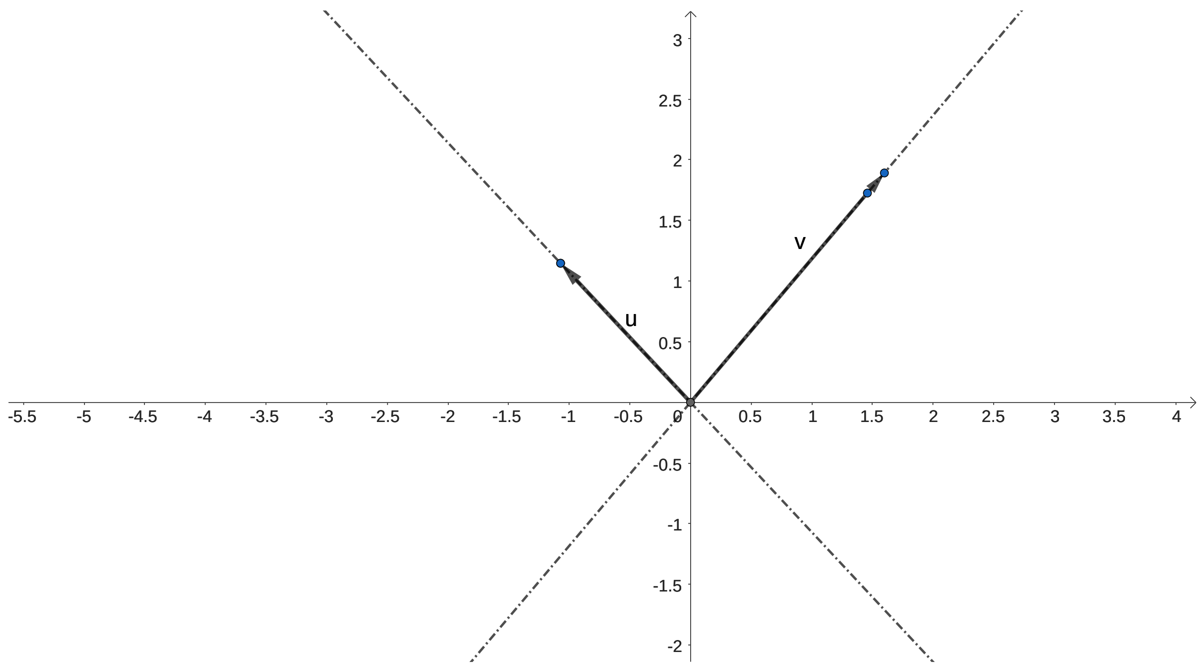
$$(\lambda u) \cdot v = (\lambda x_1) y_1 + (\lambda x_2) y_2 + \ldots + (\lambda x_n) y_n = \lambda(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n) = \lambda(u \cdot v).$$

5.8.1. Interpretación geométrica.

Para motivar la definición de ortogonalidad o perpendicularidad de vectores en $\mathbb{R}^n$, examinemos cómo se presenta esta noción entre dos vectores en $\mathbb{R}^2$. Consideremos los vectores $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$ y supongamos que son perpendiculares con $y_1, y_2 \neq 0$, como se muestra en la siguiente figura.



La recta en la que se encuentra el vector u tiene una pendiente de $\frac{x_2}{x_1}$, y la que contiene el vector v tiene una pendiente de $\frac{y_2}{y_1}$.



Estas rectas son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es igual a -1. En otras palabras, los vectores x e y serán perpendiculares si y solo si:

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = -1$$

Lo cual se simplifica a:

$$x_1y_1 + x_2y_2 = 0$$

El lado izquierdo de esta última expresión no es más que el producto punto de u e v. Por lo tanto, en el plano $\mathbb{R}^2$, la perpendicularidad de vectores es equivalente a que su producto punto sea igual a cero. Esta observación nos lleva a la siguiente definición, que generaliza la idea de perpendicularidad de vectores en el espacio $\mathbb{R}^n$.

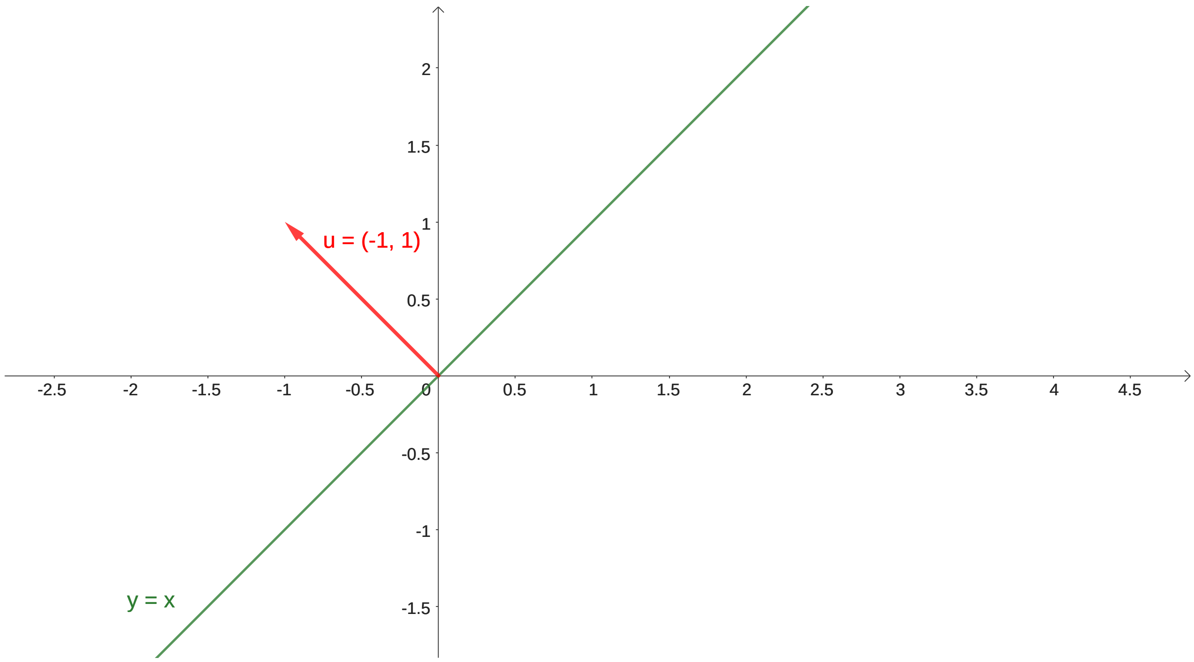
Definición 5.2 *Se dice que dos vectores u e v en $\mathbb{R}^n$ son* ***ortogonales*** *si $u \cdot v = 0$.*

De acuerdo con esta definición, el vector $\mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^n$ es ortogonal a cualquier vector u en $\mathbb{R}^n$, ya que es claro que $\mathbf{0} \cdot u = 0$ para cualquier u en $\mathbb{R}^n$. Además, el vector cero es el único vector en $\mathbb{R}^n$ con esta propiedad. En efecto: si u en $\mathbb{R}^n$ es tal que $u \cdot v = 0$ para todo v en $\mathbb{R}^n$, entonces, en particular, se tiene $u \cdot u = 0$, y atendiendo a la primera propiedad del producto punto enunciada en el teorema anterior, se concluye que u es el vector cero.

Ejemplo 5.8 *1. Sea $u = (-1, 1)$. El vector $v = (x, y)$ es ortogonal a u si, y solo si*

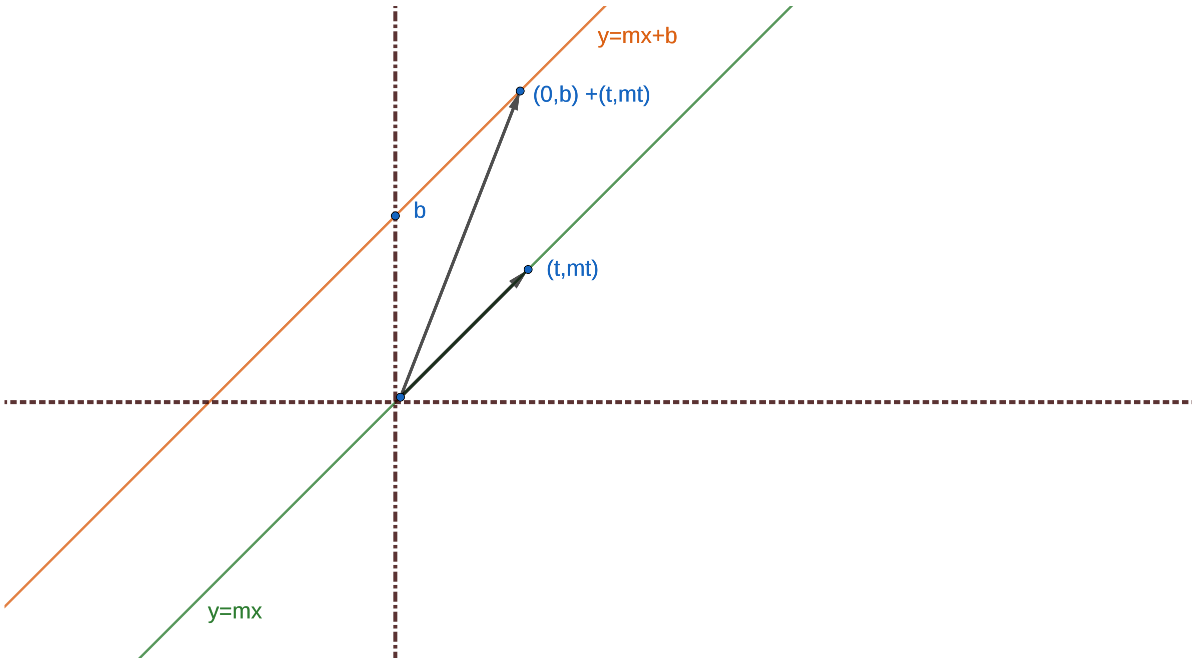
$$-1 \cdot x + (1) \cdot y = -x + y = 0.$$

Observamos que el conjunto de todos los vectores v con esta propiedad constituyen geométricamente la recta $y = x$.



En un sentido más general, si $u = (m, -1)$, donde m es un número real dado, los vectores $v = (x, y)$ ortogonales a u son aquellos para los cuales $u \cdot v = mx - y = 0$. Estos vectores representan geométricamente la recta $y = mx$, que es una recta por el origen con pendiente m. Por lo tanto, podemos afirmar que la recta $y = mx$ es el conjunto de todos los vectores en el plano que son ortogonales al vector $(m, -1)$.

En general, la recta $y = mx+b$, con pendiente m y ordenada al origen b, se puede describir como el conjunto de puntos (x, y) en el plano que se expresan como $(0, b) + (t, mt)$, donde t es un número real. Esto se puede verificar directamente. Esto significa que los vectores (x, y) en la recta $y = mx + b$ son vectores que se obtienen sumando el vector constante $(0, b)$ con vectores del tipo (t, mt) que son ortogonales a $(m, -1)$ (en otras palabras, estos vectores (t, mt) pertenecen a la recta $y = mx$).



2. *Dado el vector no nulo $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, el conjunto de vectores $v \in \mathbb{R}^3$ que son ortogonales a u está formado por los vectores $v = (x, y, z)$ tales que $u \cdot v = ax + by + cz = 0$. Esta ecuación representa geométricamente un plano que pasa por el origen.*

Norma y longitud de un vector.

Usando del producto punto, el cual hemos estudiado en la sección anterior y que nos proporciona en $\mathbb{R}^n$ el concepto geométrico de ortogonalidad de vectores, podemos introducir una noción de tamaño de un vector y de distancia entre dos vectores (o distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^n$).

Definimos la **norma** (más precisamente, la norma euclidiana) de un vector $u \in \mathbb{R}^n$, denotada como $\|u\|$, de la siguiente manera:

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$$

De acuerdo con la primera propiedad del producto punto de vectores, esta definición tiene sentido, ya que lo que está dentro de la raíz cuadrada siempre es un número no negativo. En concreto, si $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces tenemos:

$$\|u\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

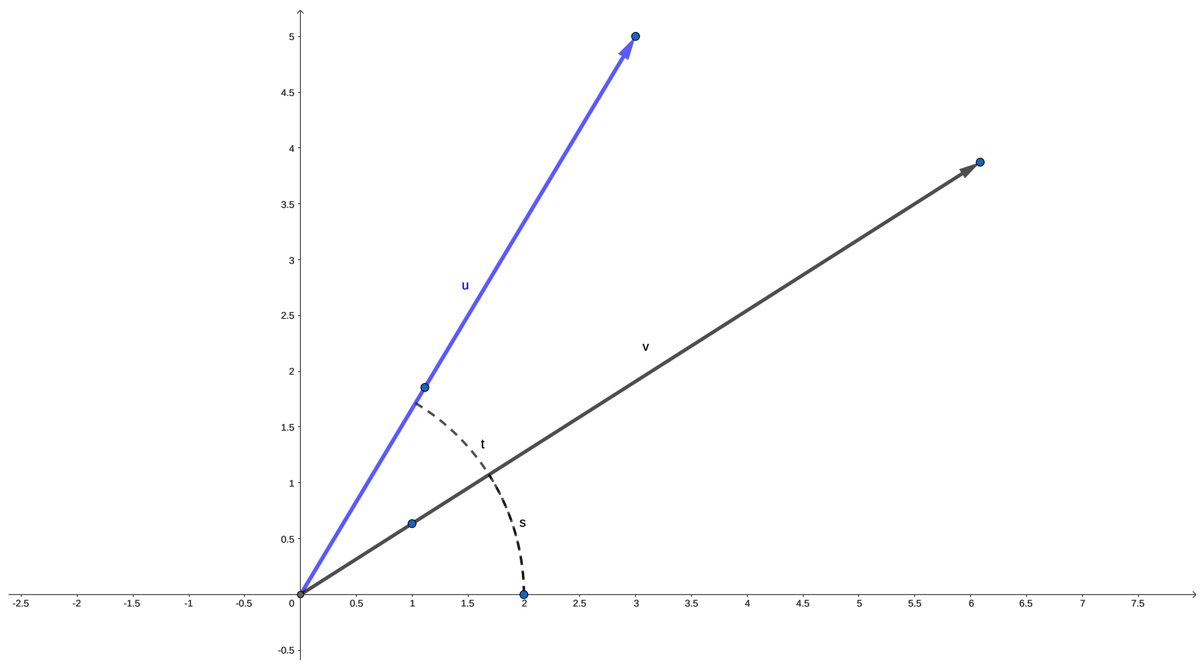
Decimos que el vector u es **unitario** si $\|u\| = 1$.

Analizando los casos de vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, debe quedar claro que esta noción de norma de un vector, que hemos definido de manera general en el espacio $\mathbb{R}^n$, nos proporciona una medida del tamaño o longitud del vector. En efecto, si $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces tenemos $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, que es precisamente la distancia del punto (x, y) al origen (es decir, es el tamaño del vector u.

Ángulo entre vectores de $\mathbb{R}^2$.

En $\mathbb{R}^2$, podemos definir la noción de ángulo entre los vectores $v = (x_1, y_1)$ y $u = (x_2, y_2)$ [2] de la siguiente manera:

Para calcular este ángulo, consideramos la recta que pasa por los puntos $(0, 0)$ y (x_2, y_2), y la recta que pasa por los puntos $(0, 0)$ y (x_1, y_1). Estas rectas tienen pendientes $\tan(t + s) = \dfrac{y_2}{x_2}$ y $\tan(s) = \dfrac{y_1}{x_1}$, respectivamente.



Entonces, el ángulo t (el ángulo entre los vectores u y v) se puede expresar como:

$$t = \arctan\left(\frac{y_2}{x_2}\right) - \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = \arctan\left(\frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_2x_1 + y_2y_1}\right)$$

Al expresar la fórmula en función del coseno, obtenemos:

$$\cos t = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{({x_1}^2 + {y_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2)} = \frac{u \cdot v}{\|u\|^2\|v\|^2}$$

De donde tenemos que el producto punto en $\mathbb{R}^2$ satisface:

$$u \cdot v = \|u\|^2\|v\|^2 \cos t.$$

Por lo tanto,

$$t = \arccos\frac{u \cdot v}{\|u\|^2\|v\|^2}.$$

Para definir el ángulo entre dos vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^n$ nos inspiraremos en lo discutido anteriormente, para ello es necesario probar primero el siguiente resultado

[2] Vistos como vectores anclados en el origen.

Teorema 5.2 ***(Desigualdad de Cauchy-Schwarz).*** *Para cada u y v vectores en $\mathbb{R}^n$ se cumple*

$$(u \cdot v)^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v)$$

Demostración: Si $u = \mathbf{0}$, ambos lados de la desigualdad son iguales a cero (y, en este caso, la desigualdad es cierta).

Sea entonces $u \neq \mathbf{0}$. Consideremos el vector $w = v + \lambda u$, donde λ es un número real fijo, pero arbitrario. Calculemos el producto punto de w consigo mismo

$$\begin{aligned} w \cdot w &= (v + \lambda u) \cdot (v + \lambda u) \\ &= (v \cdot v) + 2(v \cdot u)\lambda + (u \cdot u)\lambda^2. \end{aligned}$$

La función $f(\lambda) = (u \cdot u)\lambda^2 + 2(u \cdot v)\lambda + (v \cdot v)$ es una función polinómica cuadrática que representa geométricamente una parábola que abre hacia arriba (ya que $u \cdot u$ es positivo). Puesto que $f(\lambda)$ es siempre no negativa para todo λ, el discriminante de la ecuación cuadrática:

$$2(u \cdot v)^2 - 4(u \cdot u)(v \cdot v)$$

debe ser negativo o cero. Entonces:

$$(2(u \cdot v))^2 - 4(u \cdot u)(v \cdot v) \leq 0$$

Por lo tanto,

$$(u \cdot v)^2 - (u \cdot u)(v \cdot v) \leq 0$$

$$(u \cdot v)^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v).$$

Usando el resultado anterior, observamos que para cada par de vectores u y v en $\mathbb{R}^n$, al tomar la raíz cuadrada en ambos lados de la desigualdad se obtiene:

$$|u \cdot v| \leq \sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v} = \|u\|\|v\|.$$

En consecuencia,

$$-1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} \leq 1$$

y existe un único ángulo $0 \leq t \leq \pi$ tal que

$$\cos t = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

Definimos este ángulo como el **ángulo formado por los vectores** u **y** v.

Proposición 5.1 *Sean u, v vectores en $\mathbb{R}^n$, y c un número real. Se tiene:*

1. $||u|| \geq 0$, *y* $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = \boldsymbol{0}$.
2. $||cu|| = |c| \cdot ||u||$.
3. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ *(Desigualdad triangular).*

Demostración: Demostraremos solamente el item 3, los restantes quedan como ejercicio a cargo del lector. Para demostrar la desigualdad triangular, escribimos:

$$||u + v||^2 = (u + v) \cdot (u + v) = ||u||^2 + 2(u \cdot v) + ||v||^2,$$

utilizando la bilinealidad del producto punto. Luego, aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$||u+v||^2 \leq (||u|| + ||v||)^2,$$

y tomando la raíz cuadrada en ambos lados obtenemos la desigualdad triangular.

Recordemos que dos planos en $\mathbb{R}^3$ son paralelos si sus vectores normales son paralelos. Se dice que son **perpendiculares** si sus vectores normales son perpendiculares. El **ángulo entre dos planos** se define como el ángulo formado por sus vectores normales. Del mismo modo dos rectas en $\mathbb{R}^3$ son paralelas si sus vectores directores son paralelos. Se dice que son **perpendiculares** si sus vectores directores son perpendiculares. El **ángulo entre dos rectas** se define como el ángulo formado por sus vectores directores.

Ejemplo 5.9 *1. Dados los planos $x+y+z=1$ y $z=0$, el ángulo que forman estos planos corresponde al ángulo que forman sus vectores directores $u=(1,1,1)$ y $v=(0,0,1)$. Por lo tanto,*

$$\cos t = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad t = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

2. ***Ejercicio 6. Examen GAL1. Diciembre 2015.*** *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, consideramos la recta r definida como $(x,y,z) = (0,a,1) + \lambda(a,b,1)$ y el plano π definido por $x-y+z=2$. Indicar para cuáles valores de $a, b \in \mathbb{R}$ la recta r es paralela a π pero no contenida en π.*

   (A) $b = a+1$, para cualquier a.

   (B) $a \neq -1$ y $b = a+1$.

   (C) $a = 1$ y $b = -1$.

   (D) $a \neq 1$ y $b = a+1$.

   Solución: *Opción B: La recta r tiene vector director $\mathbf{v} = (a,b,1)$ y el plano π tiene vector normal $n = (1,-1,1)$. Entonces, la recta r es paralela al plano π cuando $v \cdot n = a - b + 1 = 0$, es decir, cuando $b = a+1$. En el caso donde $b = a+1$ (r es paralela a π), la recta r está contenida en π cuando $A = (0,a,1) \in \pi$, es decir, cuando $-a+1 = 2$, dicho de otra manera, cuando $a = -1$. Luego, la recta r es paralela a π y no contenida en π cuando $b = a+1$ y $a \neq -1$.*

3. ***Ejercicio 4.1 y 4.2. Primer Parcial GAL1. 16 Septiembre 2023.*** *Se consideran las siguientes rectas:*

$$r_1 : \begin{cases} x+y=3 \\ z=2 \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases}$$

   Pregunta 4.1: *Las rectas r_1 y r_2*

   (A) se cortan y son perpendiculares.

   (B) se cortan pero no son perpendiculares.

   (C) son paralelas.

   (D) no se cortan y no son paralelas.

   (E) son iguales.

   Pregunta 4.2: *Sea π el plano que contiene a r_2 y al punto (1, 2, 3). Un vector normal de π es*

(A) $(1,-1,0)$.

(B) $(2,3,1)$.

(C) $(1,1,-1)$.

(D) $(5,-4,1)$.

(E) $(7,-5,1)$.

Solución:

Pregunta 4.1. Una ecuación paramétrica para la recta r_1 es:

$$\begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

Por lo tanto, el vector director de r_1 es $(-1,1,0)$. De la ecuación de r_2, deducimos que su vector director es $(1,1,-1)$. Al realizar el producto punto entre estos dos vectores, obtenemos:

$$(-1,1,0)\cdot(1,1,-1) = 0$$

Por lo tanto, las rectas r_1 y r_2 son perpendiculares. Además, es rutina verificar que $r_1 \cap r_2 = \{(1,2,2)\}$. La opción correcta es la opción A.

Pregunta 4.2. El plano π buscado debe tener una normal perpendicular a la dirección de la recta r_2 $(1,1,-1)$. Por lo tanto, podemos descartar las opciones B, C y E.

Ahora descartemos la opción D: Si un vector normal al plano π fuera $(5,-4,1)$, entonces el plano buscado sería de la forma $5x-4y+z=d$. Dado que $(1,2,3)\in\pi$, tendríamos que $d=0$. Entonces $\pi : 5x-4y+z=0$. Como el plano π contiene a la recta r_2, el punto $(2,3,1)$ debería satisfacer la ecuación del plano, lo cual no es cierto.

Por lo tanto, la opción correcta es la A.

Estudiemos ahora el concepto de **distancia entre dos vectores** en $\mathbb{R}^n$. Recordemos que el vector diferencia $u-v$ de $u,v\in\mathbb{R}^n$ es un vector que conecta los puntos finales de las flechas que representan a u y v. La norma de este vector es entonces una medida de la distancia que separa a los puntos u y v en el espacio $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, la definición que usaremos de distancia entre dos vectores en $\mathbb{R}^n$ es: dados $u,v\in\mathbb{R}^n$, definimos la distancia entre u y v, y la denotamos por $d(u,v)$, como:

$$d(u,v) = \|u-v\|.$$

Para $n=2$: La distancia entre los puntos $P_1=(x_1,y_1)$ y $P_2=(x_2,y_2)$ es $d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Para $n=3$: Si $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ y $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ son dos puntos en $\mathbb{R}^3$, entonces la distancia entre ellos es

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

5.9. Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

En esta sección estudiaremos un nuevo producto entre vectores en $\mathbb{R}^3$. Con él, podremos analizar de nuevo las ecuaciones de planos en $\mathbb{R}^3$. Una diferencia fundamental de este nuevo producto es que será un vector en $\mathbb{R}^3$, mientras que el producto punto es, como sabemos, un escalar.

Dados dos vectores $u = (x_1, y_1, z_1)$ y $v = (x_2, y_2, z_2)$ en $\mathbb{R}^3$ definimos el **producto vectorial** de u y v y lo denotamos por $u \wedge v$, de la siguiente manera:

$$u \wedge v := (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - x_2y_1)$$

Una regla mnemotécnica que facilita recordar la definición anterior es emplear el siguiente determinante.

$$u \wedge v = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Una de las propiedades fundamentales del vector $u \wedge v$ es que es perpendicular a ambos vectores u y v.

$$u \wedge v \cdot u = 0$$

$$u \wedge v \cdot v = 0$$

En efecto,

$$u \wedge v \cdot u = (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - x_2y_1) \cdot (x_1, y_1, z_1) = (y_1z_2 - z_1y_2)x_1 + (z_1x_2 - x_1z_2)y_1 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_1$$

$$u \wedge v \cdot u = y_1z_2x_1 - z_1y_2x_1 + z_1x_2y_1 - x_1z_2y_1 + x_1y_2z_1 - x_2y_1z_1 = 0$$

Además, de que el vector $u \wedge v$ es perpendicular a u y v, su dirección sigue la regla de la mano derecha: usando la mano derecha, coloque su dedo pulgar perpendicular a los demás dedos; alinee la dirección de los cuatro dedos con la del vector u de manera que, cerrando la mano, esta pueda seguir hacia el vector v. La dirección hacia donde apunta su dedo pulgar es la dirección de $u \wedge v$.

Ejemplo 5.10 *Sean $u = (1, 3, 5)$ y $v = (0, 5, 6)$. Se tiene*

$$u \wedge v = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (-7, -6, 5).$$

Teorema 5.3 *Sean u, u', v, v' vectores en $\mathbb{R}^3$ y λ un escalar. Entonces:*

1. $u \wedge v = -v \wedge u$ *(anticonmutatividad)*
2. $u \wedge (v + \lambda v') = u \wedge v + \lambda u \wedge v'$
3. $(u + \lambda u') \wedge v = u \wedge v + \lambda u' \wedge v$
4. $\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \sin t$, *donde t es el ángulo entre u y v.*

Demostración: Demostraremos solamente los items 1 y 4. Dejaremos los restantes a cargo del lector.

1. Sean $u = (x_1, y_1, z_1)$ y $v = (x_2, y_2, z_2)$.

$$u \wedge v = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} = -(v \wedge u)$$

2.

$$\begin{aligned}
\|u \times v\|^2 &= (y_1z_2 - z_1y_2)^2 + (z_1x_2 - x_1z_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\
&= y_1^2z_2^2 - 2y_1z_2z_1y_2 + z_1^2y_2^2 + z_1^2x_2^2 - 2z_1x_2x_1z_2 + x_1^2z_2^2 + x_1^2y_2^2 - 2x_1y_2x_2y_1 + x_2^2y_1^2 \\
&= (x_1 + y_1 + z_1)^2(x_2 + y_2 + z_2)^2 - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \\
&= \|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2 \\
&= \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2 \cos^2 t \\
&= \|u\|^2\|v\|^2(1 - \cos^2 t) \\
&= \|u\|^2\|v\|^2 sen^2 t
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \sin t$.

Ejemplo 5.11 *1.* ***Ejercicio 3. Examen GAL1 . Diciembre 2015.*** *Sean dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$. Entonces:*

(A) $(u + v) \wedge (u - v) = (u \wedge u) + (v \wedge v)$

(B) $(u + v) \wedge (u - v) = (u \wedge u) - (v \wedge v)$

(C) $(u + v) \wedge (u - v) = 2(u \wedge v)$

(D) $(u + v) \wedge (u - v) = -2(u \wedge v)$

Solución: *Opción D: En efecto, tenemos que*

$$(u+v)\wedge(u-v) = (u\wedge(u-v))+(v\wedge(u-v)) = (u\wedge u)-(u\wedge v)+(v\wedge u)-(v\wedge v) = -(u\wedge v)+(v\wedge u) = -2(u\wedge v)$$

2. ***Ejercicio 4. Examen GAL1 . Diciembre 2015.*** *Para todos los vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$:*

(A) $(u \cdot v)^2 + ||u \wedge v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$

(B) $(u \cdot v)^2 + ||u \wedge v||^2 = ||u||^2 + 2(u \cdot v) + ||v||^2$

(C) $(u \cdot v)^2 + ||u \wedge v||^2 = ||u||^2||v||^2$

(D) $(u \cdot v)^2 + ||u \wedge v||^2 = 2||u||^2||v||^2$

Solución: *Opción C: Sea θ el ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Tenemos que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cos(\theta)\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ y $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = |\sin(\theta)|\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$. Luego, tenemos que:*

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2 + \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 = \cos^2(\theta)\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 + \sin^2(\theta)\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 = (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2.$$

3. ***Ejercicio 6 (Verdadero-falso). Examen GAL1 . Febrero 2016.*** *Determinar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: Sean $u,\ v \in \mathbb{R}^3$. Si $||u|| = ||v|| = 2$, $u \cdot v \geq 0$ y $||u \times v|| = 2\sqrt{3}$, entonces $||u - v|| = 2$.*

   Solución: *La afirmación es verdadera. En efecto, sea $\alpha \in [0, \pi]$ el ángulo formado por los vectores u y v. Dado que $||u \wedge v|| = \sin\alpha\|u\|\|v\|$, obtenemos $\sin\alpha = \frac{||u\wedge v||}{|u||v|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. En consecuencia, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ o $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Sin embargo, al considerar que $u \cdot v \geq 0$, concluimos que $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ $(= 60°)$. Dado que los vectores u y v tienen la misma norma $\|u\| = \|v\| = 2$, forman un triángulo equilátero. De esta manera, el tercer lado del triángulo, representado por el vector $u - v$, tiene igual norma: $\|u - v\| = 2$.*

4. ***Ejercicio 3. Examen GAL1 interactiva. Diciembre 2023.*** *Sea s la recta tal que $(1, 1, 1) \in s$, $s \perp (1, 1, 0)$ y $s \perp (1, -1, 1)$, y sea π el plano de ecuación reducida $x + y + z = 1$.*

   a*) Hallar una ecuación vectorial para s. Justificar paso a paso el resultado.*

   b*) Hallar la intersección entre s y π. Justificar paso a paso el resultado.*

   Solución: *Tenemos que calcular un vector director de s. Un tal vector de coordenadas (a, b, c) debe cumplir que $0 = \langle(a, b, c),(1, 1, 0)\rangle = a + b$ y $0 = \langle(a, b, c),(1, -1, 1)\rangle = a - b + c$. Estas dos condiciones dan un sistema lineal homogéneo en a, b, c y hay que buscar alguna solución no nula (ejercicio). Una forma alternativa de hallar directamente un vector ortogonal a los dos vectores dados es mediante un producto vectorial:*

$$(1, 1, 0) \times (1, -1, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k} = (1, -1, -2).$$

   Una ecuación vectorial para esta recta es: $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, -1, -2)$.

   Para hallar la intersección $\pi \cap s$ basta con hallar una ecuación reducida para s y resolver el sistema lineal correspondiente a la intersección con π:

   Una ecuación paramétrica para s es

$$\begin{cases} x = 1 + 1\lambda \\ y = 1 + (-1)\lambda \\ z = 1 + (-2)\lambda \end{cases}$$

   Despejando λ de la primera ecuación y sustituyendo en las otras dos se obtiene la ecuación reducida:

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ z = 3 - 2x \end{cases}$$

   La intersección corresponde entonces a resolver el sistema lineal:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y = 2 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$$

   cuya única solución es (el punto de coordenadas): $(2, 0, -1)$.

5.10. Práctico 6.

Ejercicios sugeridos:

Práctico 6

Producto escalar y vectorial.

5.11. Producto escalar y producto vectorial.

1. Dados los vectores $u = (2, -1, 7)$, $v = (1, 1, -3)$ y $w = (1, -1, 2)$ calcular:

   a) $\|u\|$, $\|v\|$, $\langle u, v\rangle$, $u \wedge v$, $\|u \wedge v\|$.

   b) $u \wedge (v \wedge w)$ y $(u \wedge v) \wedge w$. Observar que el producto vectorial no es asociativo.

2. **Productos notables.**

   Sean x e y vectores de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Demostrar que se satisfacen las igualdades

   a) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$.

   b) $\langle x + y, x - y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$.

   c) **Regla del paralelogramo.** $\frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2\right) = \|x\|^2 + \|y\|^2$

3. Sean u y v dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

   a) Hallar $\|v\|$ sabiendo que el ángulo entre u y v es igual a $\pi/4$, $\|u\| = 3$ y que $u - v$ es perpendicular a u.

   b) Hallar $\|v\|$ y $\|u + v\|$ sabiendo que el ángulo entre u y v es $\pi/4$, que $\|u\| = 3$ y que el ángulo entre $u + v$ y u es igual a $\pi/6$.

   c) ¿Es cierto que si v es un vector no nulo entonces la igualdad $\langle u, v\rangle = \langle w, v\rangle$ implica $u = w$? ¿Qué puede decirse de $u - w$?

4. Dados dos vectores u y v de $\mathbb{R}^3$, hallar:

   a) todos los vectores w para los que se satisface $u \wedge w = u \wedge v$.

   b) todos los vectores w para los que se satisface $\langle u, w\rangle = \langle u, v\rangle$.

5. Calcular el producto vectorial

   $$(a_{11}, a_{12}, 0) \wedge (a_{21}, a_{22}, 0)$$

   y usarlo para analizar la interpretación del determinante

   $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

   como un área orientada.

5.12. Revisitando ecuaciones de rectas y planos.

1. **Ecuaciones de planos y vectores normales.**

   a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-3,1,0)$ y es perpendicular a $(-1,2,3)$.

   b) Expresar el plano π de ecuación $x-y+3z=1$ como $\langle P-P_0, N\rangle = 0$, donde $P=(x,y,z)$ es un punto genérico, N es un vector perpendicular al plano, y P_0 es un punto a determinar.

   c) Hallar dos versores que sean perpendiculares al plano $2x+y=0$. Recordar que un versor es un vector de norma 1.

2. Probar que las rectas son ortogonales.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-3z-1=0, \\ 2x-y-9z-2=0 \end{array}\right., \left\{\begin{array}{l} 2x+y+2z+5=0, \\ 2x-2y-z+2=0, \end{array}\right.$$

3. **Trazado de perpendiculares.** Hallar ecuaciones paramétricas y reducidas de la recta que pasa por el punto $(4,4,4)$ y es perpendicular al plano $2x+y=0$.

4. En cada caso, hallar las ecuaciones reducida y paramétrica de la recta que satisface las condiciones especificadas:

   a) pasa por el punto $(1,0,1)$ y es perpendicular al plano $2x+y+3z-1=0$.

   b) Pasa por el punto $(-1,2,-3)$, se intersecta con la recta

$$P=(1,-1,3)+\lambda(3,2,-5),$$

   y es ortogonal a la recta

$$\left\{\begin{array}{l} x=-1+6\lambda, \\ y=-3-2\lambda, \\ z=2-3\lambda. \end{array}\right. .$$

   c) Pasa por el punto $(1,1,1)$ e intersecta perpendicularmente a la recta

$$\left\{\begin{array}{l} x=4+3\lambda \\ y=-2-2\lambda \\ z=2-\lambda \end{array}\right. .$$

   d) Pasa por el punto $(-4,-5,3)$ e intersecta perpendicularmente a la recta de ecuación paramétrica

$$P=(-1,-3,2)+\lambda(3,-2,-1).$$

5.13. Distancias entre elementos geométricos.

1. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ una función que preserva las distancias, es decir, que para cualquier par de puntos P,Q se cumple $d(P,Q)=d(f(P),f(Q))$. Observar que esto es lo mismo que $\|P-Q\|=\|f(P)-f(Q)\|$, es decir, preserva la norma de los vectores. Se sabe además que $f(O)=O$.

   Probar que f preserva ángulos, es decir que si el ángulo entre dos vectores no nulos u y v es α entonces el ángulo entre $f(v)$ y $f(u)$ también es α.

2. Determinar la distancia entre los plano π_1 y π_2 siendo

$$a) \quad \pi_1 : x+y+z=1,\ \pi_2 : x+y+z=5 \qquad b) \quad \pi_1 : x+2y-z=1,\ \pi_2 : 2x+4y-2z=-1$$

3. Determinar la distancia entre el plano π y el punto P, siendo

$$a) \quad \pi : x+y+z=0,\ P=(2,2,4) \qquad b) \quad \pi : x=0,\ P=(2,3,4)$$

4. Hallar la distancia entre las rectas r y s donde

$$a) \quad r : (x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(1,0,0),\ s : (x,y,z)=(3,0,0)+\mu(0,1,1)$$

$$b) \quad r = \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+2z=1 \end{cases},\ s = \begin{cases} x+y+z=5 \\ x-y+2z=10 \end{cases}$$

5. Hallar la distancia entre la recta r y el punto P siendo

$$a) \quad P=(1,3,2),\ r : (x,y,z)=(1,1,1)+\lambda(1,3,2) \qquad b) \quad P=(1,0,1),\ s = \begin{cases} y+z=2 \\ y-z=10 \end{cases}$$

5.13.1. Solución a ejercicios seleccionados del Práctico 6.

Producto escalar y producto vectorial.

1 Recordar que la norma de un vector v está definida como $||v|| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$. Si $v \in \mathbb{R}^3$, $v=(v_1,v_2,v_3)$ entonces $||v|| = \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$

   a. $||u|| = \sqrt{54}$, $||v|| = \sqrt{11}$, $\langle u,v\rangle = -20$, $u \wedge v = (-4,13,3)$, $||u \wedge v|| = \sqrt{194}$.
   b. $u \wedge (v \wedge w) = (37,-3,-11)$, $(u \wedge v) \wedge w = (29,11,-9)$.

2 a. Sabemos que $||v||^2 = \langle v,v\rangle$, por lo tanto, tenemos que

$$||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

donde usamos vale la propiedad distributiva. Además, sabemos que el producto interno es conmutativo, por lo que concluimos que

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x,y\rangle + ||y||^2$$

   b. Razonando de forma análoga a la parte anterior

$$\langle x+y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,-y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,-y\rangle$$

Usando ahora la linealidad del producto escalar y el hecho de que es conmutativo, tenemos que

$$\langle x+y, x-y\rangle = ||x||^2 - ||y||^2$$

3 a. El hecho de que $u - v$ es perpendicular a u implica que $\langle u - v, u\rangle = 0$. Utilizando la propiedad distributiva, esto es equivalente a

$$\langle u, v\rangle - ||u^2|| = 0$$

Por lo tanto, $\langle u, v\rangle = 9$.

Por otro lado, $\langle u, v\rangle = ||u||||v||cos(\theta)$ donde θ es el ángulo que forman u y v. De esta parte concluimos que

$$9 = 3||v||\sqrt{3}/2$$

y por lo tanto $||v|| = 3\sqrt{2}$

b. Por un lado tenemos que $\langle u, v\rangle = ||u||||v||cos\pi/4 = 3||v||/\sqrt{2}$ donde $\pi/4$ es el ángulo que forman los vectores u y v.

Por otro lado,

$$\langle u + v, u\rangle = ||u + v||||u||cos\pi/6 = ||u + v||3\sqrt{3}/2.$$

pero también se cumple que

$$\langle u + v, u\rangle = ||u||^2 + \langle u, v\rangle$$

A partir de estas dos ecuaciones, tenemos que $3\sqrt{3}/2||u + v|| = 9 + \langle u, v\rangle$.

$||u|| = 3(1 + \sqrt{3})$

c. No es necesario que $u = w$. Se tiene que $u - w$ debe ser ortogonal a v

4 a. Si $w \in \mathbb{R}^3$ cumple que $u \wedge w = u \wedge v$, entonces, $u \wedge (w - v) = 0$. Recordar que el producto vectorial de dos vectores es nulo si estos son colineales, es decir, $w - v = \alpha u$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

6 a. Para esta parte alcanza hacer el producto AA^{-1} y ver que da la identidad:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u, u\rangle & \langle u, v\rangle & \langle u, w\rangle \\ \langle v, u\rangle & \langle v, v\rangle & \langle v, w\rangle \\ \langle w, u\rangle & \langle w, v\rangle & \langle w, w\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ||u||^2 & 0 & 0 \\ 0 & ||v||^2 & 0 \\ 0 & 0 & ||w||^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b. La única diferencia con la parte anterior es que ahora no podemos hacer el último paso, por lo tanto, para conseguir unos en la diagonal, podemos tomar la inversa como

$$\begin{pmatrix} \frac{u_1}{||u||^2} & \frac{v_1}{||v||^2} & \frac{w_1}{||w||^2} \\ \frac{u_2}{||u||^2} & \frac{v_2}{||v||^2} & \frac{w_2}{||w||^2} \\ \frac{u_3}{||u||^2} & \frac{v_3}{||v||^2} & \frac{w_3}{||w||^2} \end{pmatrix}$$

c. Para simplificar las cuentas, podemos asumir que una de las tapas del paralelepípedo está apoyada sobre el plano $z = 0$. Esto equivale a suponer que $u = (u_1, u_2, 0), v = (v_1, v_2, 0)$ y como los vectores son ortogonales, $w = (0, 0, w_3)$.

Recordar que calcular el volumen del paralelepípedo, equivale a calcular el área de la base y luego multiplicar por la altura. Usando el ejercicio 1.5, tenemos que el valor absoluto de

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

es el área del paralelogramo determinado por los vectores $(a_{11}, a_{12}, 0)$ y $(a_{21}, a_{22}, 0)$.
Desarrollando $\det(A)$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{vmatrix} = w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Es decir, $|\det(A)|$ es el volumen del paralelepípedo.

Revisitando ecuaciones de rectas y planos.

1 a. Recordar que la ecuación implícita de un plano es de la forma $ax + by + cz = d$. Por lo visto en el teórico, sabemos que (a, b, c) son las coordenadas de un vector normal al plano. Como sabemos, por letra, que el plano debe ser perpendicular a $(-1, 2, 3)$, la ecuación de éste debe ser de la forma

$$\pi : -x + 2y + 3x = d$$

Para encontrar d usamos que el punto $(-3, 1, 0) \in \pi$, por lo que debe verificar la ecuación anterior y concluimos que la ecuación del plano es $\pi : -x + 2y + 3z = 5$

b. Nuevamente, dado que conocemos la ecuación implícita del plano, tenemos que un vector perpendicular a éste es $N = (1, -1, 3)$. Además, el punto $P_0 = (1, 0, 0)$ verifica la ecuación del plano, por lo tanto, la ecuación del plano es

$$\pi : \langle (x - 1, y, z), (1, -1, 3) \rangle$$

c. De la ecuación implícita tenemos que un vector perpendicular al plano es $N = (2, 1, 0)$. Por lo tanto $n = N/||N|| = (2, 1, 0)/\sqrt{5}$ y $-n$ son versores perpendiculares al plano.

2 Para que dos rectas sean ortogonales, el producto interno de sus vectores directores debe ser nulo. Buscamos entonces vectores directores de cada una de ellas.

Un vector director de la primera recta es $v = (4, -1, 1)$ y uno de la segunda es $w = (1, 2, -2)$. Entonces

$$\langle v, w \rangle = \langle (4, -1, 1), (1, 2, -2) \rangle = 0$$

y concluimos que las rectas efectivamente son ortogonales.

3 a. Para que la rects que buscamos sea perpendicular al plano, alcanza con que tenga el mismo sentido que el vector normal a éste. Teniendo en cuenta que pasa por el punto $(1, 0, 1)$, la ecuación paramétrica de la misma es entonces

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

Para pasar a la implícita, despejamos λ de una de las ecuaciones y sustituimos en las otras:

$$r : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ z - 3y = 1 \end{cases}$$

b. Vamos a buscar la ecuación paramétrica de la recta que llamaremos r. Dado que ésta pasa por el punto $(-1, 2, -3)$, sabemos que será de la forma $\begin{cases} x = -1 + v_1\mu \\ y = 2 + v_2\mu \\ z = -3 + v_3\mu \end{cases}$

Lo que falta es buscar el vector director. Para esto, podemos observar que como r debe ser ortogonal a la recta $\begin{cases} x = -1 + 6\lambda \\ y = -3 - 2\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}$

debe estar contenida en un plano π cuya normal es el vector directo de esta recta, es decir $\pi : 6x - 2y - 3z = d$. Para saber cuál es el valor de d, notar que el punto $(-1, 2, -3) \in \pi$ por lo que debe verificar la ecuación de π. De acá sacamos que $\pi : 6x - 2y - 3z = -1$ Por último, sabemos existe un valor de λ tal que el punto $P = (1, -1, 3) + \lambda(3, 2, -5)$ verifica la ecuación de la recta y por lo tanto la del plano. Sustituyendo, encontramos que este valor es $\lambda = 0$, es decir, el punto P que verifica la ecuación es $(1, -1, 3)$.

Concluimos que la recta r pasa por los puntos $(1, -1, 3)$ y $(-1, 2, -3)$ y por lo tanto su ecuación paramétrica es

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = -3 + 6\lambda \end{cases}$$

c. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$

Distancias entre elementos geometricos .

1 a. $d(\pi_1, \pi_2) = \frac{4}{\sqrt{3}}$

b. $(\pi_1, \pi_2) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

2 a. $d(\pi, P) = \frac{8}{\sqrt{3}}$

b. $d(\pi, P) = 2$

3 a. $d(r, s) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b. $d(r, s) = \frac{\sqrt{229}}{\sqrt{7}}$

4 a. $d(r, P) = \sqrt{\frac{3}{7}}$

b. $d(s, P) = \sqrt{61}$

Revisar en el teórico los procedimientos o fórmulas para el cálculo de las distancias que se piden

CAPÍTULO 6

EVALUACIONES: PRIMER PARCIAL.

6.1. Año 2007.

6.2. Primer semestre. Primer parcial: 8 Mayo 2007.

Verdadero-falso.

1. Si $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, entonces $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_3, \ldots, v_1 + v_n\}$ también es un conjunto linealmente independiente.

2. Si A es una matriz con distinta cantidad de filas que de columnas, entonces el rango de A es distinto del rango de A^t.

3. Si A es una matriz $n \times n$ y E es cualquier forma escalonada de A, entonces $\det(A) = \det(E)$.

4. La matriz A es invertible para todo a, b, $c \in \mathbb{R}$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{pmatrix}$$

5. Si u y v son vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $\|u \wedge v\| = \|u\|\|v\|$, entonces u y v son ortogonales.

6. Considere los vectores $u = (1, 2, -1)$, $v = (3, -1, 2)$ y $w = (0, 1, 1)$. Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $u \wedge (v + aw) = (0, 0, 0)$

7. La distancia del punto $(3, 2, 1)$ al plano de ecuación $4x - 5y - 3z = 1$ es $\frac{2}{5\sqrt{2}}$.

8. Si A es una matriz cuadrada $n \times n$ invertible que cumple $A^2 = -A$, entonces $\det(A) = (-1)^n$.

9. Si A y B son dos matrices cuadradas no nulas tales que AB es la matriz nula, entonces A y B no son invertibles.

10. La recta de ecuaciones $\begin{cases} x+y=1 \\ x-z=0, \end{cases}$ es paralela al plano de ecuación $x+y=0$.

Múltiple opción.

1. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   a) Si $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, entonces $\det(A) = -1$.
   b) Si $\beta = 2$, entonces $\det(A) = 0$ si y solo si $\alpha = 2$ o $\alpha = -1$.
   c) Si $\alpha = 0$, entonces $\det(A) < 0$ para todo $\beta \in \mathbb{R}$.
   d) Si $\alpha = 1$ y $\beta = -1$, entonces $\det(A) = 0$.
   e) Si $\beta = \alpha^2$, entonces $\det(A) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Considere los planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 - \lambda + \mu, \end{cases}$$

$$\pi_2 : x + z = 5$$

$$\pi_3 : \begin{cases} x = -3 + \lambda + \mu \\ y = -\mu \\ z = 1 + 2\lambda - 3\mu \end{cases}$$

   Entonces:

   a) π_1 es paralelo a π_3 y π_1 no es paralelo a π_2.
   b) π_1 es paralelo a π_2 y $\pi_2 \cap \pi_3$ es una recta.
   c) $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ es un punto.
   d) π_1, π_2 y π_3 son paralelos.
   e) π_2 es paralelo a π_3 y $\pi_1 \cap \pi_2$ es una recta.

3. Sean A una matriz real $m \times n$ y B una matriz real $n \times p$.

   a) Si la primera y la última columna de B son iguales, entonces la primera y la última columna de AB son iguales.
   b) Si la primera y la última fila de B son iguales, entonces la primera y la última fila de AB son iguales.
   c) Si la primera columna de A es nula, entonces la primera columna de AB es nula.
   d) Si la primera y la última columna de A son iguales, entonces la primera y la última columna de AB son iguales.

e) Si la primera fila de B es nula, entonces la primera fila de AB es nula.

4. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha & 2 \\ -1 & 0 & 0 & \beta \\ 1 & 1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Si $\beta = \frac{2}{3}$, entonces rango$(A) = 2$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Si $\alpha = 0$, entonces rango$(A) = 2$ para todo $\beta \in \mathbb{R}$.

c) Si $\beta \neq \frac{2}{3}$, entonces rango$(A) = 3$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) Si $\beta = -2$, entonces rango$(A) = 2$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

e) Si $\alpha = 0$ y $\beta = 2$, entonces rango$(A) = 2$.

5. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^n$ y A una matriz $n \times n$. Considere las siguientes afirmaciones:

a) Si B es linealmente independiente y A es invertible, entonces $\{Av_1, Av_2, Av_3\}$ también es linealmente independiente.

b) Si B es linealmente dependiente, entonces $\{Av_1, Av_2, Av_3\}$ también es linealmente dependiente para toda matriz A.

c) Si B es linealmente independiente y A es invertible, entonces $\{Av_1, A(v_1 + v_2), A(v_1 + v_2 + v_3)\}$ también es linealmente independiente.

Entonces:

a) Las tres afirmaciones son verdaderas.

b) Sólo (I) y (II) son verdaderas.

c) Sólo (I) y (III) son verdaderas.

d) Sólo (I) es verdadera.

e) Sólo (II) es verdadera.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	F	F	V	V	F	V	V	V	V

1	2	3	4	5
B	B	A	C	A

6.3. Año 2008.

6.3.1. Primer semestre. Primer parcial: 3 Mayo 2008.

Múltiple opción.

1. Sea π_1 el plano de ecuación $2x + y - z = 1$, el plano π_2:

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3\lambda + 2\mu \end{cases}$$

   y la recta r:

$$\begin{cases} x = 2 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 5\alpha \end{cases}$$

   Se cumple que:

   (A) $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ y $r \subset \pi_1$.
   (B) $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ y $r \cap \pi_2 = \emptyset$.
   (C) $\pi_1 \cap \pi_2$ es una recta y $r \cap \pi_2 = \emptyset$.
   (D) $\pi_1 \cap \pi_2$ es una recta y $r \cap \pi_1 = \emptyset$.
   (E) $\pi_1 \cap \pi_2$ es un plano y $r \cap \pi_1 = \emptyset$.

2. Sean u, v, w tres vectores en $\mathbb{R}^3$. Se define el vector $z = (u \wedge v) \wedge w$. Se verifica que:

   (A) Necesariamente z es colineal a v.
   (B) Necesariamente z es colineal a u.
   (C) Necesariamente $z \perp w$.
   (D) Necesariamente $z \perp u$.
   (E) Necesariamente $z \perp v$.

3. Sea el siguiente conjunto $B = \{(1, 2, 3, 0), (1, -1, 1, 1)\}$ y las 4-uplas $v = (1, 1, 1, 1)$ y $w = kv$ con $k \in \mathbb{R}$. Indicar la opción correcta.

   (A) v no es combinación lineal de los vectores de B y entonces w tampoco lo es, excepto si $k = 0$.
   (B) v no es combinación lineal de los vectores de B y entonces w tampoco lo es para todo $k \in \mathbb{R}$.
   (C) Ninguna de las restantes opciones es correcta.
   (D) v es combinación lineal de los vectores de B y entonces w también lo es para todo $k \in \mathbb{R}$.
   (E) v es combinación lineal de los vectores de B, pero w no lo es.

4. Sean $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & c & 2b \\ d & f & 2e \\ g & i & 2h \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} a & b & a+b \\ d & e & d+e \\ g & h & g+h \end{pmatrix}$. Si $\det(A) = 2$ entonces:

   (A) $\det(B) = -1/8$ y $\det(C) = 2$.

(B) $\det(B) = -32$ y $\det(C) = 0$.
(C) $\det(B) = -16$ y $\det(C) = 0$.
(D) $\det(B) = -8$ y $\det(C) = 0$.
(E) $\det(B) = -32$ y $\det(C) = 2$.

5. Sean A y B matrices $n \times n$ tales que AB no es invertible. Entonces:
   (A) Debe cumplirse que $\det(A) = \det(B) = 0$.
   (B) A es invertible o B es invertible.
   (C) Ambas matrices deben ser invertibles o ambas deben ser no invertibles.
   (D) Si A es invertible entonces $\det(B) = 0$.
   (E) Necesariamente $\det(A) \neq 0$ o $\det(B) \neq 0$.
6. Sea A una matriz $n \times n$ tal que $A^3 = A$ y $\det(A) \neq 0$. Entonces:
   (A) $|\det(A)| = 1$ y $A = I$ o $A = -I$.
   (B) $\det(A) = 1$ y $A = I$.
   (C) Ninguna de las restantes opciones es correcta.
   (D) $\det(A) = 1$ y $A = A^{-1}$.
   (E) $|\det(A)| = 1$ y $A = A^{-1}$.
7. Calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$$

   (A) 5.
   (B) 25.
   (C) 25!.
   (D) 5!.
   (E) 0.
8. Sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ un conjunto L.D. de $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$ y M una matriz con n filas y n columnas. Se consideran las siguientes afirmaciones:
   (I) $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ es L.D.
   (II) $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ es L.I.
   (III) $\{M \cdot v_1, M \cdot v_2, M \cdot v_3\}$ es L.D.

   Entonces,
   (A) Solo la afirmación (I) es verdadera.
   (B) Solo las afirmaciones (I) y (II) son verdaderas.

(C) Ninguna de las afirmaciones es verdadera.

(D) Las tres afirmaciones son verdaderas.

(E) Solo las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.

9. Sea el conjunto $A = \{(1, -2, m), (2, 0, 2), (2, 4, -4)\}$ donde $m \in \mathbb{R}$. Indicar la opción correcta:

   (A) Si $m \neq 4$, el conjunto A es L.D.

   (B) Si $m \neq 4$, el conjunto A es L.I.

   (C) Ninguna de las restantes opciones es correcta.

   (D) El conjunto A es L.I. para todo valor de m.

   (E) El conjunto A es L.D. para todo valor de m.

10. Sea el sistema

$$S = \begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

   donde λ es un número real. Indicar la opción correcta:

   (A) S es compatible determinado si y solo si $\lambda \neq -2$.

   (B) S es incompatible si y solo si $\lambda = 1$.

   (C) S es compatible indeterminado si $\lambda = 1$ e incompatible si $\lambda = -2$.

   (D) S es compatible determinado para todo valor de λ.

   (E) S es compatible indeterminado si y solo si $\lambda = -2$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

6.4. Año 2009.

6.4.1. Primer semestre. Primer parcial: 2 Mayo 2009.

Múltiple opción.

1. Sean A, B y C tres matrices cuadradas de dimensión n. Se consideran las siguientes afirmaciones y posteriormente se analiza su validez:

   (I) Si $|A| \neq 0$ y $AB = AC$ entonces $B = C$.

   (II) Si $\exists k > 1$ tal que $A^k = 0 \Rightarrow |A| = 0$.

   (III) Si $|A| \neq 0$ entonces $\frac{\overline{A}}{|A|} = I$.

   Indicar la opción correcta.

   (A) Sólo las afirmaciones (I) y (III) son correctas.

   (B) Sólo la afirmación (I) es correcta.

   (C) Las tres afirmaciones son correctas.

   (D) Sólo las afirmaciones (I) y (II) son correctas.

   (E) Sólo las afirmaciones (II) y (III) son correctas.

2. Se consideran los planos $\pi_1 : x + 2y - z = 0$ y π_2 :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2 - 2\lambda + \mu \\ z = 3 + \lambda - \mu \end{cases}$$

   Indicar la opción correcta.

   (A) Los planos se intersectan en una recta que pasa por el punto $(1, 2, 3)$.

   (B) Los planos se intersectan en una recta con dirección $(1, 0, 1)$.

   (C) Los planos se intersectan en una recta con dirección $(1, 1, 1)$.

   (D) $\pi_1 = \pi_2$.

   (E) Los planos son paralelos pero distintos.

3. Sea r una recta y π un plano de ecuaciones:

$$r : P + \lambda v \quad \pi : Q + \mu u + \beta w$$

   donde:

$$u = (u_1, u_2, u_3), \quad v = (v_1, v_2, v_3), \quad w = (w_1, w_2, w_3)$$

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

   Entonces:

   (A) Necesariamente $r \subset \pi$.

(B) Necesariamente $r \cap \pi = \emptyset$ o $r \subset \pi$.
(C) Necesariamente $r \cap \pi = \emptyset$.
(D) Necesariamente $P \in \pi$.
(E) Necesariamente r y π se cortan solamente en un punto.

4. Sea la matriz $A_{m\times n}(\mathbb{R}) = ((a_{ij}))$ y el sistema $AX = B$, $B \in \mathbb{R}^m$. Sea $C = \{A_1, \ldots, A_n\}$ el conjunto de columnas de A. Entonces:

(A) Ninguna de las otras afirmaciones es correcta.
(B) Si C es linealmente independiente, el sistema $AX = B$ es compatible determinado si y solo si B es combinación lineal de las columnas de A.
(C) Si C es linealmente independiente, el sistema $AX = B$ es compatible indeterminado para todo B.
(D) Si C es linealmente dependiente, el sistema $AX = B$ es incompatible para todo B.
(E) Si C es linealmente dependiente, el sistema $AX = B$ es compatible determinado si y solo si B es combinación lineal de las columnas de A.

5. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Se consideran las siguientes afirmaciones:

a) $\det(A) > 0$
b) La entrada en el lugar $(1, 2)$ de A^{-1} es 3.
c) $\det(A) \leq 0$

Seleccione la opción correcta:

(A) Solamente c) y b) son verdaderas.
(B) Solamente b) es verdadera.
(C) Solamente c) es verdadera.
(D) Solamente a) es verdadera.
(E) Solamente a) y b) son verdaderas.

6. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces:

(A) El espacio generado por las columnas de A es algún plano de $\mathbb{R}^3$.
(B) El espacio generado por las columnas de A es $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + y + 2z = 0\}$.
(C) El espacio generado por las filas de A es $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z + t = 0\}$.
(D) Cualquier vector $X \in \mathbb{R}^3$ se puede escribir de forma única como combinación lineal de las columnas de A.
(E) Cualquier vector $X \in \mathbb{R}^4$ se puede escribir de forma única como combinación lineal de las filas de A.

7. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \cdots & a_{3(n-2)} & 0 & 0 \\ \vdots & a_{(n-1)2} & 0 & 0 & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

con n par. Seleccione la opción correcta:

(A) Ninguna de las otras afirmaciones es correcta.

(B) $\det(A) = 0$ independientemente de los valores a_{ij}.

(C) $\det(A) = -a_{1n}a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}$.

(D) $\det(A) = a_{1n}a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}$.

(E) $\det(A) = (-1)^{\frac{n}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}$.

8. Consideremos la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$$

Entonces:

(A) Hay valores de m tales que $B^2 = 2B + I$ y para ellos B es invertible.

(B) Hay algún valor de m tal que $B^2 = 2B + I$ para el cual B no es invertible.

(C) B es invertible para todo m.

(D) $B^2 \neq 2B + I$ para todo m.

(E) Hay un único valor de m tal que $B^2 = 2B + I$.

9. Sean

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

y

$$N = \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ a+2d & b+2e & c+2f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

con $|M| = 2$. Indicar la opción correcta:

(A) $|N| = -4$.

(B) $|N| = 1/2$.

(C) $|N| = 2$.

(D) $|N| = 0$.

(E) $|N| = 4$.

10. Sea el sistema

$$(S) = \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2x + \lambda y + z = 9 \\ \lambda x + 10y + 4z = 6 \end{cases}$$

Indicar la opción correcta:

(A) (S) es compatible para todo λ.

(B) (S) es incompatible para todo λ.

(C) Existen sólo finitos valores de λ para los cuales (S) es compatible determinado.

(D) Existen exactamente dos valores de λ para los cuales (S) es incompatible.

(E) Existe exactamente un valor de λ para el cual (S) es compatible indeterminado.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	B	B	B	D	C	E	A	C	D

6.5. Año 2010.

6.5.1. Primer semestre. Primer parcial: 29 Abril 2010.

Múltiple opción.

1. Sea la matriz $A \in M_{2\times 2}$ tal que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{2}$, y sea $B = A^2$. Si se conoce que $\det((2A+2B)(2A-2B)) = 32$, entonces $\det(I - A^2)$ vale:

   (A) $\frac{1}{4}$.

   (B) 1.

   (C) $\frac{1}{2}$.

   (D) 2.

   (E) 4.

2. Sean la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$, el vector $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ y el vector de incógnitas $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Entonces:

   (A) Si $a = 1$, el sistema $AX = b$ es incompatible para todo vector b.

   (B) Existen valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $AX = b$ es compatible indeterminado para todo vector b.

   (C) Si $a = 0$, el sistema $AX = b$ es incompatible para todo vector b.

   (D) El sistema $AX = b$ es compatible determinado cualquiera sean $a \in \mathbb{R}$ y el vector b.

   (E) Existen valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $AX = b$ es compatible determinado para todo vector b.

3. Sean los planos:

$$\pi_1 : ax + y - z = a$$

$$\pi_2 : \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = (1-a) + \lambda - 2\mu \\ z = a + 2\lambda - 3\mu \end{cases}$$

$$\pi_3 : x + ay + 2az = a - 2$$

   Entonces:

   (A) Si $a = 1$, los planos se cortan en una recta.

   (B) Si $a \neq 0$, los planos se cortan en un único punto.

   (C) Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ es un punto.

   (D) Si $a = 0$; $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$; $r : \begin{cases} x = 2 + y + z \\ y = z \end{cases}$.

   (E) Los planos se cortan para todo a.

4. Sea π el plano que contiene al punto $P = (0,0,1)$ y es paralelo a las rectas:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 + 5\alpha \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Una ecuación que represente al plano π es:

(A) $x + z = 1$.
(B) $x + y = 0$.
(C) $x - y = 0$.
(D) $x + y + z = 1$.
(E) $x + y + 5z = 1$.

5. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2+\beta \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

y $C = A \cdot B$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

I) $\det(A) = \alpha(6 - \beta)$ y $\det(B) = -\beta$.
II) C es invertible $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$ y $\beta \neq 6$.
III) $\det(C) = \alpha\beta(6 - \beta)$.

Indicar la opción correcta:

(A) Las tres afirmaciones son correctas.
(B) Solamente las afirmaciones I y II son correctas.
(C) Solamente la afirmación I es correcta.
(D) Solamente la afirmación III es correcta.
(E) Solamente las afirmaciones II y III son correctas.

6. Sean v_1, v_2 y v_3 tres vectores del espacio. Consideremos $w = (v_1 \wedge v_2) \wedge v_3$ y $s = v_1 \wedge (v_2 \wedge v_3)$. Entonces, para todos v_1, v_2, v_3:

(A) Si v_2 es perpendicular a v_1 y v_3, $s = w$.
(B) Si uno de ellos es nulo, $s \neq w$.
(C) Si v_2 es perpendicular a v_1, $s = w$.
(D) $s = w$.
(E) Si v_1 y v_2 son colineales, $s \neq w$.

7. Sean A, B matrices invertibles. Consideremos las siguientes afirmaciones:

I) Ninguna columna de $A \cdot B$ es combinación lineal de las restantes.

II) $A + \alpha B$ es invertible $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

III) $A^2 B^{-1} \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

IV) $\mathrm{Rg}(A + B) = \mathrm{Rg}(A) + \mathrm{Rg}(B)$.

Entonces:

(A) Solamente la afirmación II) es verdadera.

(B) Solamente las afirmaciones I), II) y IV) son verdaderas.

(C) Solamente la afirmación I) es verdadera.

(D) Solamente las afirmaciones I) y II) son verdaderas.

(E) Solamente las afirmaciones I) y III) son verdaderas.

8. Considere el plano π de vectores directores (u, v) y el plano π_0 de vectores directores (u_0, v_0). Si π y π_0 son paralelos, el rango del conjunto $\{u, v, u_0, v_0\}$ es:

(A) No se puede determinar.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 1.

(E) 2.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8
C	E	C	C	E	A	E	E

6.6. Año 2011.

6.6.1. Primer semestre. Primer parcial: 14 Mayo 2011.

Múltiple opción.

1. Sea el sistema:
$$\begin{cases} ax + by + 4z = 0 \\ ax + 2y + 3 = -4z \\ 2(x + y) + 2az = 0 \end{cases}$$
   Donde a y b son números reales. Entonces,
   (A) El sistema nunca es compatible indeterminado.
   (B) El sistema es compatible indeterminado para un único valor de a y un único valor de b.
   (C) Existen al menos dos valores de b para los cuales el sistema es incompatible para todo a.
   D El sistema es compatible determinado solo para una cantidad finita de valores de a y de b.
   (E) Existen únicos valores de a y de b tales que el sistema es compatible indeterminado.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ \beta & c & d \\ \gamma & a & b \end{pmatrix}$. Si $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 3$, entonces $\det(A)$ es:
   (A) $-3\alpha + 3\gamma$
   (B) $3\alpha + 3\gamma$
   (C) $3(\alpha - \beta + \gamma)$
   (D) $3(\alpha + \beta + \gamma)$
   (E) $3\alpha + 3\beta$

3. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Entonces:
   (A) $AB = BA$ y AB es invertible, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
   (B) Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\text{rango}(AB) = 2$.
   (C) $AB = BA$ y existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\text{rango}(AB) = 1$.
   (D) $AB \neq BA$ y $\text{rango}(AB) = 3$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
   (E) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(AB)^n = 0$.

4. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces,
   (A) $A^{-1}v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(B) $A^{-1}v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(C) $A^{-1}v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(D) $A^{-1}v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(E) A no es invertible.

5. Se consideran los planos:

$$\pi_1 \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\pi_2 : x + y + z = 1 \quad \text{y} \quad \pi_3 : x - y = 0$$

y la recta $s : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$. Si Q es el punto de intersección entre el plano π_3 y la recta s, entonces la recta r paralela a $\pi_1 \cap \pi_2$ que pasa por el punto Q es:

(A) $r : \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

(B) $r : \begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$

(C) $r : \begin{cases} x + y = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$

(D) $r : \begin{cases} x - z = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

(E) $r : \begin{cases} x + 2z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$

6. Sean u y v dos vectores. Se sabe que $\|u\| = 3$, el ángulo entre u y v es $\frac{\pi}{4}$ y $u - v$ es ortogonal a u. Entonces $\|v\|$ es:

(A) $\sqrt{2}$

(B) $9\sqrt{2}$

(C) $3\sqrt{2}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(E) $\frac{1}{3}\sqrt{2}$

Desarrollo.

1. Sea $A = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ Demostrar la equivalencia de las siguientes afirmaciones

   Se demuestra la equivalencia entre las siguientes afirmaciones:

   (I) Existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$.

   (II) Existe $\mathbf{v}_{i_0} \in A$ tal que $\mathbf{v}_{i_0}$ es combinación lineal de los restantes vectores del conjunto A.

2. Dada la matriz M:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & 2 & a \\ -1 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

   Llenamos el cuadro indicando todos los valores de a para los cuales el rango es el indicado:

Rango(M)	Valores de a
3	
2	
1	

Solución.

1	2	3	4	5	6
B	A	C	B	A	C

1. Ver Teórico.

2. Rango$(M) = 3 \Leftrightarrow a \notin \{-1, 0\}$. Rango$(M) = 2 \Leftrightarrow a = -1$ o $a = 0$. Para ningún valor de a se cumple que Rango$(M) = 1$.

6.7. Año 2012.

6.7.1. Primer semestre. Primer parcial: 30 Abril 2012.

Múltiple opción.

1. Se consideran los planos $\pi_1 : x + y - z = 1$ y π_2:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$$

Sea $r = \pi_1 \cap \pi_2$ la recta intersección de dichos planos. La recta r_0 paralela a r que pasa por el punto $Q = (1, 1, 1)$ es:

(A) $r_0 : \begin{cases} x = z \\ y = 1 \end{cases}$

(B) $r_0 : \begin{cases} x - y - z = -1 \\ y = z \end{cases}$

(C) $r_0 : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

(D) $r_0 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \dfrac{\lambda}{2} \\ z = 1 + \frac{\lambda}{2} \end{cases}$

(E) $r_0 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

2. Se consideran los planos π_1 $3x - 2y + z = 1)$ y $\pi_2 : P = (-1, 0, 0) + \rho(3, 0, 1) + \mu(0, 1, 0)$ y la recta r:

$$P = (1, 1, 0) + \lambda(3a, -2, a), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Entonces:

(A) $\pi_2 \cap r = \emptyset$ para todo a y si $a = -\frac{2}{5}$, entonces $r \subset \pi_1$.

(B) $\pi_2 \cap r = \emptyset$ para todo a y si $a = -\frac{2}{5}$, entonces $\pi_1 \cap r = \emptyset$.

(C) $\pi_2 \cap r = \emptyset$ para todo a y $\pi_1 \cap r = \{(1, 1, 0)\}$ para todo a.

(D) $\pi_2 \cap r \neq \emptyset$ para todo a y si $a = -\frac{2}{5}$, entonces $r \subset \pi_1$.

(E) $\pi_2 \cap r \neq \emptyset$ para todo a y si $a = -\frac{2}{5}$, entonces $\pi_1 \cap r = \emptyset$.

3. Se considera el sistema:

$$\begin{cases} x+y+t=0 \\ x+y+2z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

Sean las matrices: A y B:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

(A) El sistema es incompatible.
(B) El sistema es compatible indeterminado y una matriz escalonada del sistema es la matriz A.
(C) El sistema es compatible indeterminado y una matriz escalonada del sistema es la matriz B.
(D) El sistema es compatible determinado.
(E) El sistema es compatible indeterminado y ni A ni B son matrices escalonadas del sistema.

4. Sean las matrices A y B:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} a-2d & b-2e & 4c-8f \\ 3d & 3e & 12f \\ g+a & b+h & 4(i+c) \end{pmatrix}.$$

Entonces el determinante de B es:

(A) $12\cdot\det(A)$
(B) $3\cdot\det(A)$
(C) 0
(D) $\frac{1}{3}\cdot\det(A)$
(E) $\frac{1}{12}\cdot\det(A)$

5. Sea $P=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ con $a\in\mathbb{R}$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

a) Para todo $a\in\mathbb{R}$, el rango de P es mayor o igual que 2.
b) Existe $a\in\mathbb{R}$ para el cual el rango de P es 2.
c) Existe $a\in\mathbb{R}$ para el cual el rango de P es 3.

Entonces:

(A) Solo la afirmación II) es correcta.
(B) Solo la afirmación III) es correcta.
(C) Solo las afirmaciones I) y II) son correctas.
(D) Solo la afirmación I) es correcta.

(E) Solo las afirmaciones II) y III) son correctas.

6. Dado el sistema de ecuaciones $Ax = b$ con A una matriz cuadrada se consideran las siguientes afirmaciones:

   I Si existe b tal que $Ax = b$ es incompatible, entonces $\det(A) = 0$.

   II Existe b tal que $Ax = b$ es compatible determinado si y solo si $\det(A) = 0$.

   III $\det(A) \neq 0$ si y solo si el rango por filas de A es igual al rango por columnas de A.

   Entonces:

   (A) Todas las afirmaciones son falsas.
   (B) Solo las afirmaciones I) y II) son verdaderas.
   (C) Solo la afirmación II) es verdadera.
   (D) Solo la afirmación I) es verdadera.
   (E) Solo la afirmación III) es verdadera.

Desarrollo.

1. Sea A una matriz $n \times n$

   a) Definir rango de A.

   b) Probar que si el rango de A es n entonces A es invertible.

2. Se considera el conjunto $A = \{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\-0\end{pmatrix} \}$.

   a) ¿Se puede escribir algún vector como combinación lineal de los restantes? En caso afirmativo hallar una combinación lineal.

   b) Se considera la matriz $MA = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\0 & 1 & 0 & -1\\1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ formada por los vectores de A y las submatrices de tamaño 3×3, A_1, A_2, A_3, A_4, que se obtienen eliminando la primera, segunda, tercera y cuarta columna de MA respectivamente. Indicar cuáles son invertibles y cuáles no, indicando su rango en cada caso.

Solución.

1	2	3	4	5	6
A	A	C	A	E	D

1. Ver teórico

2. Parte a: Se considera el sistema lineal homogéneo cuya matriz asociada tiene por columnas a los vectores de A, es decir $M_A X = 0$ siendo MA la matriz:

$$M_A = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\0 & 1 & 0 & -1\\1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Una matriz escalonada de este sistema es:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado. Esto significa que el conjunto A es linealmente dependiente y, por tanto, existe algún vector del conjunto que es combinación lineal de los restantes.

Observando que el conjunto solución es de la forma $\text{Sol} = \{(-2\alpha, \alpha, 0\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Por lo tanto, una posible combinación lineal es elegir $\alpha = 1$, y entonces se tiene que:

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Parte b: Se considera la matriz M_A formada por los vectores de A y las submatrices 3×3, A_1, A_2, A_3, A_4, que se obtienen eliminando la primera, segunda, tercera y cuarta columna de MA respectivamente. Indicar cuáles son invertibles y cuáles no, indicando su rango en cada caso.

Para analizar el rango de las submatrices indicadas, basta analizar el sistema lineal de la parte anterior al quitar la columna correspondiente.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es invertible y $\text{rango}(A_1) = 3$.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es invertible y $\text{rango}(A_2) = 3$.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

no es invertible y $\text{rango}(A_3) = 2$.

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

es invertible y $\text{rango}(A_4) = 3$.

6.7.2. Segundo semestre. Primer parcial: 22 de Septiembre 2012.

Múltiple opción.

1. Dado $A = \{u, v, w\}$ un conjunto de tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$. Se consideran los conjuntos:
$$A_1 = \{w - u, 3v, u + v + w\},$$
$$A_2 = \{w - u, w - v\},$$
$$A_3 = \{u, v, u + v + w, u - v - w\},$$
$$A_4 = \{u - v, w - v, w - u\}.$$
Se consideran las siguientes afirmaciones sobre los cuatro conjuntos.
(A) Todos los conjuntos son linealmente independientes.
(B) Sólo los conjuntos A_1 y A_2 son linealmente independientes.
(C) Sólo el conjunto A_1 es linealmente independiente.
(D) Sólo los conjuntos A_1 y A_4 son linealmente independientes.
(E) Al tener menos vectores que A, necesariamente A_2 es linealmente dependiente.

2. Se considera una matriz A de dimensiones $n \times n$ tal que $I + A + A^2 + A^3 = 0$. Indicar la opción correcta:
(A) A es invertible y la inversa es $I + A^2 + A^3$.
(B) A es invertible y la inversa es $(-1)(A + A^2 + A^3)$.
(C) A es invertible y la inversa es $(-1)(I + A + A^2)$.
(D) A no es invertible.
(E) Existen matrices A que satisfacen la igualdad y son invertibles y otras que la satisfacen y no son invertibles.

3. Se considera una matriz cuadrada A de dimensiones $n \times n$ y las siguientes afirmaciones:
(I) Si A es antisimétrica ($A^t = -A$) e invertible, entonces n es par.
(II) Si A es nilpotente ($A^k = 0$ para algún k), entonces A no es invertible.
(III) Si A conmuta con todas las matrices cuadradas $n \times n$, entonces A es un múltiplo de la identidad.
Indicar la opción correcta:
(A) Las tres afirmaciones son verdaderas.
(B) (I) y (II) son falsas y (III) es verdadera.
(C) (I) y (III) son falsas y (II) es verdadera.
(D) (III) y (II) son falsas y (I) es verdadera.
(E) Las tres son falsas.

4. Sea la recta r dada por la intersección de los planos $2x + y = -5$ y $z - 3y = 1$. Consideremos el plano π generado por r y el punto $P = (1, 1, 1)$. Entonces la intersección de π con el eje de coordenadas de las x es:

(A) el punto $\left(-\frac{7}{6}, 0, 0\right)$.

(B) el punto $(4, 0, 0)$.

(C) el punto $(-3, 0, 0)$.

(D) el eje de las x.

(E) ninguna de las opciones anteriores es correcta.

5. Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 7y - 2z = 5 \\ 3x - 2y + z = 6 \\ 2x + 5y + 3z = 1 \\ 6x + 15y + 9z = 3 \\ 4x + 10y + 6z = 2 \end{cases}$$

Considere S el conjunto de los (x, y, z) tales que son solución del sistema.

(A) S es todo el espacio.

(B) S geométricamente, representa un plano.

(C) S geométricamente representa una recta.

(D) S es un punto.

(E) S es el conjunto vacío.

6. Se considera el sistema $m \times n$ dado por $S : AX = b$ y las afirmaciones siguientes:

(I) Si $\text{rango}(A) = \text{mín}\{m, n\}$ entonces S es compatible determinado para todo vector $b \in \mathbb{R}^m$.

(II) Si $m = n$ y $\text{rango}(A) = n$ entonces $\det(A) \neq 0$.

(III) Si S es compatible determinado para todo vector $b \in \mathbb{R}^m$ entonces $m \leq n$.

(IV) Si $m < n$, existen vectores $b \in \mathbb{R}^m$ para los cuales S es compatible determinado.

Entonces:

(A) Sólo las afirmaciones (I) y (II) son correctas.

(B) Sólo la afirmación (II) es correcta.

(C) Las cuatro afirmaciones son correctas.

(D) Sólo las afirmaciones (II) y (III) son correctas.

(E) Sólo las afirmaciones (III) y (IV) son correctas.

Desarrollo

Ejercicio 1

1. Definir matriz invertible.
2. Probar que si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$ es invertible entonces $\det(A) \neq 0$ y $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
3. Si se sabe que $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 3$, calcular $\det\begin{pmatrix} 2d & 10e & 2f \\ a & 5b & c \\ a-3g & 5b-15h & c-3i \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2

1. Definir producto escalar entre dos vectores de $\mathbb{R}^3$, y norma de un vector de $\mathbb{R}^3$.
2. Probar que $|\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}| \leq \|\mathbf{X}\|\cdot\|\mathbf{Y}\|$ para todos $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ vectores de $\mathbb{R}^3$. ¿En qué caso se da la igualdad?

Solución.

1	2	3	4	5	6
B	C	A	A	C	D

Ejercicio 1.

1) $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ es invertible si y solo si existe una matriz $B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ tal que $AB = BA = I_n$.

2) Recordamos que si A es invertible, su inversa es única y se denota como A^{-1}. Si $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ es invertible, entonces $AA^{-1} = I_n$. Aplicando la función determinante se tiene:

$$\det(AA^{-1}) = \det(I_n) \Rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1$$

Entonces, $\det(A) \neq 0$ y por lo tanto $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

3)

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 2d & 10e & 2f \\ a & 5b & c \\ a-3g & 5b-15h & c-3i \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 2d & 10e & 2f \\ a & 5b & c \\ a & 5b & c \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2d & 10e & 2f \\ a & 5b & c \\ -3g & -15h & -3i \end{pmatrix} \\
&= (-3)\cdot\det\begin{pmatrix} 2d & 10e & 2f \\ a & 5b & c \\ g & 5h & i \end{pmatrix} \\
&= -3\cdot 2\cdot 5\cdot\det\begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
&= 90
\end{aligned}$$

Ejercicio 2:

1) El producto escalar de dos vectores X e Y en $\mathbb{R}^3$ se define como $\langle X, Y\rangle = ||X||||Y||\cos(\theta)$ o $\langle X, Y\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, donde $X = (x_1, y_1, z_1)$ e $Y = (x_2, y_2, z_2)$.

   La norma de un vector en $\mathbb{R}^3$ es una función $||\cdot|| : \mathbb{R}^3 \to [0, +\infty)$ que cumple:

- $||X|| \geq 0$, para todo $X \in \mathbb{R}^3$, y $||X|| = 0 \Leftrightarrow X = \mathbf{0}$.
- $||\lambda X|| = |\lambda| ||X||$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $X \in \mathbb{R}^3$.
- $||X + Y|| \leq ||X|| + ||Y||$ para todo $X, Y \in \mathbb{R}^3$.

Otra manera de definir la norma de un vector $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ es $||X|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2)
$$|\langle X, Y \rangle| = ||X|| ||Y|| \cos(\theta) \leq ||X|| ||Y||$$

La igualdad se da si y solo si $\cos(\theta) = 1$ si y solo si $\theta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6.8. Año 2013.

6.8.1. Primer semestre. Primer parcial: 06 Mayo 2013.

Múltiple opción.

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & 0 \\ 2 & 2\alpha & \beta & 1 \\ 2 & 3 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde α y β son parámetros reales. Entonces:

   a) $rango(A) = 4$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   b) $rango(A) \leq 3$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   c) Existen infinitos valores de α y β para los cuales $rango(A) = 4$. Pero sólo un número finito de valores de α para los cuales $rango(A) = 3$.

   d) Existe un único valor de α y un único valor de β para los cuales $rango(A) = 3$.

   e) Existen valores de α y β para los cuales $rango(A) = 2$.

2. Sean $A, B \in M_{3\times 3}$ con $det(A) = 12$ y $det(B) = 3$. Entonces $det(2A^2B^{-1})$ vale:

   a) $\frac{1}{6}$

   b) $\frac{2}{3}$

   c) $\frac{1}{3}$

   d) 6

   e) $\frac{3}{2}$

3. Se considera el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ con $A \in M_{n\times n}$. Se sabe que existe b_0 tal que $Ax = b$ es incompatible. Se consideran las siguientes afirmaciones:

   (I) $det(A) = 0$.

   (II) El sistema $Ax = b$ nunca es compatible determinado.

   (III) Existe b_1 tal que $Ax = b_1$ es compatible indeterminado.

   Entonces:

   a) Sólo la afirmación (I) es verdadera.

   b) Todas las afirmaciones son verdaderas.

   c) Sólo las afirmaciones (II) y (III) son verdaderas.

   d) Sólo las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.

   e) Todas las afirmaciones son falsas.

4. Sean $U = \{u_1, u_2, u_3\} \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto L.I y $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ invertible. Si $V = \{Au_1, Au_2, Au_3\}$, entonces:

   a) V es L.D.

   b) V es L.I.

c) No podemos afirmar si V es L.I o L.D con estas hipótesis.
d) El conjunto $\{Au_1, Au_2\}$ es L.D.
e) La matriz cuyas columnas son u_1, u_2, u_3 tiene determinante nulo.

5. Siendo $a, b, c \in \mathbb{R}$, consideremos el sistema $AX = 0$ con $A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Entonces:

a) Para todo a, b, c el sistema es compatible indeterminado.
b) Para todo a, b, c el sistema es compatible determinado.
c) Existen valores a, b, c para los cuales el sistema es compatible determinado y otros para los que el sistema es compatible indeterminado.
d) Sólo $a = b = c = 0$ admite una solución no trivial.
e) Existen valores de a, b y c tales que el sistema es incompatible.

6. Se consideran tres vectores v, w y z en $\mathbb{R}^3$ tales que: $\|z\| = 2$, $\|w+z\| = \sqrt{20}$, $w \perp z$, $\|v\| = 1$, $\|v+w\| = \sqrt{21}$ Entonces el ángulo que forman los vectores v y w es:

a) $\frac{\pi}{3}$
b) $\frac{\pi}{2}$
c) $\frac{\pi}{6}$
d) $\frac{\pi}{4}$
e) 0

7. Sean $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tales que $A^2 = 4A + I$ y $B^tB = I$ donde B^t es la traspuesta de B. Entonces:

a) $2B^tA$ es invertible y su inversa es $\frac{1}{2}AB - 2B$.
b) $2B^tA$ es invertible y su inversa es $\frac{1}{2}AB^t - 2B^t$.
c) AB es invertible y su inversa es $AB - 4B$.
d) AB es invertible y su inversa es $B^tA - 4A$.
e) AB no es invertible.

8. Se considera el plano π de ecuación $x + ay + z = 1$, con $a > 0$, la recta r:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

y el punto $Q = (1, 0, 0)$. Si P es el punto de intersección de r con π, entonces el valor de a para el cual la distancia de P a Q es igual a $\sqrt{44}$ es:

a) 0
b) 2
c) 4
d) 6
e) 8

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8
C	B	B	B	A	A	A	C

6.8.2. Segundo semestre. Primer parcial: 30 Septiembre 2013.

Verdadero-falso.

1. Todo elemento del conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0\}$ se puede escribir como combinación lineal del conjunto $\{(1, 1, 1), (3, 0, 1), (1, -2, -1)\} \subset \mathbb{R}^3$.
2. Si $\{u, v\} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto L.I., entonces $\{5u + v, -2v\}$ es un conjunto L.I.
3. Sean $A, B \in \mathbf{M}_{n\times n}$. Si $3A^tB$ es invertible, entonces A y B^2 son invertibles.
4. Si $A \in \mathbf{M}_{n\times n}$ es invertible, entonces A se puede escribir como el producto de matrices elementales.
5. Si $u, v \in \mathbb{R}^3$ cumplen $\|u - 3v\| = 5$ y $\|u\| = \|-2v\| = 2$, entonces $\langle u, v\rangle = -2$.
6. Si $A \in \mathbf{M}_{n\times n}$ cumple $A^2 + A = I$, entonces el rango de A es n.
7. Si $A = ((a_{ij}))_{i,j=1,\ldots,n}$ es tal que $A^t = -A$, entonces $a_{ii} = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
8. Existen sistemas lineales con más incógnitas que ecuaciones que son compatibles determinados.

Múltiple opción.

1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2a & 2d & 6g \\ c & f & 3i \\ b & e & 3h \end{pmatrix}$, entonces el determinante de B es:
   a) $\frac{1}{6}\det(A)$.
   b) $6\det(A)$.
   c) $-6\det(A)$.
2. Se considera el sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + \lambda y + z = 1 \\ -x + y + \lambda z = 2 \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:
   a) El sistema es compatible determinado para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
   b) Si $\lambda = 0$ el sistema es incompatible.
   c) Si $\lambda = 2$ el sistema es compatible indeterminado.
3. Se considera el conjunto $U = \{(1, 1, 2), (1, 1, 3), (a, a^2, 5)\} \subset \mathbb{R}^3$ con $a \in \mathbb{R}$. Entonces:
   a) U es LI para todo valor de a.
   b) U es LD para sólo un valor de a.
   c) U es LD para sólo dos valores de a.

4. Sea r la recta que pasa por los puntos $A = (1, 2, -1)$ y $B = (2, 0, 2)$, y sea s la recta determinada por la intersección de los planos π_1 y π_2, donde

$$\pi_1 : x - y - z = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 : \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -1 - 2\lambda - 3\mu \\ z = 2 + 3\lambda + 2\mu \end{cases}$$

Entonces:

a) r y s son secantes (se intersecan en un solo punto).
b) r y s son paralelas no coincidentes.
c) r y s se cruzan (no son ni secantes ni paralelas).

5. Sea $\pi : x - 2y + 3z = 3$ y L:

$$L : \begin{cases} x = 1 - a^2\lambda \\ y = 2 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 4\lambda \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Entonces:

a) $L \cap \pi = \varnothing$ solo para un valor de a.
b) $L \cap \pi = \varnothing$ solo para dos valores de a.
c) $L \cap \pi = \varnothing$ para todo valor de a.

6. Sea $A \in M_{3\times 3}$ invertible. Entonces $\det(2A^2A^tA^{-1}) =$

a) $8\det(A^t)^2$.
b) $2\det(A^t)^2$.
c) $2\det(A^{-1})^3$.

7. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Entonces:

a) Si $b = 0$, existen valores de a para los cuales $\langle AX, X\rangle < 0$.
b) Para todos a y b, $\langle AX, X\rangle \geq 0$.
c) $\langle AX, X\rangle > 0$ si y solo si $a = b$.

8. Se considera el plano $\pi : x + y + z = 0$ y el punto $Q = (1, 0, -1) \in \pi$. Sea $P = (a, b, c)$ tal que la recta (PQ) es perpendicular a π y $d(P, Q) = \sqrt{3}$. Entonces:

a) a, b y c son todos números positivos.
b) $a + b + c = 0$.
c) $b \neq 0$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8
V	V	V	V	V	V	F	F

1	2	3	4	5	6	7	8
C	B	C	B	B	A	B	C

6.9. Año 2014.

6.9.1. Primer semestre. Primer parcial: 10 Mayo 2014.

Múltiple opción.

1. El sistema lineal de ecuaciones (S) es:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + ay = 2a \\ y - z = a \\ 2x + 2y = a \end{cases}$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(A) Es compatible para algunos valores de a pero no para todos.
(B) Es compatible determinado para todo $a \in \mathbb{R}$.
(C) Es compatible indeterminado para todo $a \in \mathbb{R}$.
(D) Es incompatible para todo $a \in \mathbb{R}$.
(E) Es siempre compatible. Tiene solución única para algunos valores de a pero no para todos.

2. Sean A, B y C matrices de tamaño 3×3 tales que:

- A tiene determinante 1.
- B tiene rango 2.
- C tiene determinante 3.

Entonces, si $d_1 = \det(2AC)$ y $d_2 = \det(BC^{-1})$, ¿cuál de las siguientes opciones es verdadera?

(A) $d_1 = 6$ y $d_2 = 0$.
(B) $d_1 = 6$ y $d_2 = \frac{1}{3}$.
(C) $d_1 = 24$ y $d_2 = 0$.
(D) $d_1 = 24$ y d_2 no necesariamente está definido, ya que C puede no ser invertible.
(E) $d_2 = 0$ y d_1 no se puede determinar a partir de los datos dados.

3. Consideremos los puntos $A = (1, 1, 1)$ y $B = (1, 2, 0)$, y las cinco ecuaciones siguientes:

(a) $\mathbf{P} = (1, 1, 1) + \lambda(1, 2, 0)$.
(b) $\mathbf{P} = (1, 1, 1) + \lambda(0, 1, -1)$.
(c) $\mathbf{P} = (1, 2, 0) + \lambda(0, 2, -2)$.
(d) $x = 1, \quad y + z = 2$.
(e) $x + y + z = 3$.

Las ecuaciones que representan a la recta AB son:

(A) (a), (b), (c) y (d).

(B) (b) y (c).
(C) (b) y (d).
(D) (b), (c) y (d).
(E) (b), (c), (d) y (e).

(Nota: Decimos que una ecuación representa a la recta AB si las soluciones de la ecuación son exactamente los puntos de la recta. Se pide indicar cuáles son todas las ecuaciones de la lista que representan a la recta AB. Hay una sola respuesta correcta entre las opciones dadas.)

4. Consideremos el plano π de ecuación $x + 2y + az = 1$, donde a es un parámetro que varía en $\mathbb{R}$, y la recta r dada por $(x, y, z) = (3, 4, 2) + \lambda(1, -1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

   (A) r no corta a π si $a = 1$ y lo corta en un único punto en otro caso. Para $a = 1$, la distancia de r a π es $2\sqrt{6}$.
   (B) r no corta a π si $a = 1$ y lo corta en un único punto en otro caso. Para $a = 1$, la distancia de r a π es 6.
   (C) r está contenida en π si $a = -1$, no corta a π si $a = 1$ y lo corta en un único punto en otro caso. Para $a = 1$, la distancia de r a π es $2\sqrt{6}$.
   (D) r está contenida en π si $a = -1$, no corta a π si $a = 1$ y lo corta en un único punto en otro caso. Para $a = 1$, la distancia de r a π es 6.
   (E) Para todos los valores de a, r y π se cortan en un único punto.

5. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores en el espacio. Si $\|\mathbf{u}\| = 2$, el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\frac{\pi}{6}$, y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es perpendicular a $\mathbf{v}$, entonces

   (A) $\|\mathbf{v}\|$ no puede ser determinada a partir de los datos del problema.
   (B) $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3}$ o $\|\mathbf{v}\| = 2\sqrt{3}$, y ambas opciones son posibles.
   (C) $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3}$ o $\|\mathbf{v}\| = -\sqrt{3}$, y ambas opciones son posibles.
   (D) $\|\mathbf{v}\| = 2\sqrt{3}$.
   (E) $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3}$.

   (Nota: $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$).

6. Consideremos las siguientes afirmaciones, en las cuales A y B son matrices de tamaño 3×3:

   (a) Es posible que $A \neq 0$, $B \neq 0$ y $AB = 0$.
   (b) Es posible que A sea invertible, B no sea invertible y AB sea invertible.
   (c) Es posible que A y B sean invertibles pero AB no lo sea.
   (d) Es posible que el rango de $A + B$ sea menor que el de A y que el de B.
   (e) El rango de AB necesariamente es menor o igual que el de A y que el de B.

   Entonces:

   (A) Todas las afirmaciones anteriores son ciertas.
   (B) Sólo las afirmaciones (a), (d) y (e) son ciertas.
   (C) Sólo las afirmaciones (a) y (d) son ciertas.
   (D) Sólo las afirmaciones (b), (c) y (d) son ciertas.
   (E) Sólo la afirmación (a) es cierta.

Desarrollo.

Ejercicio 7

1. Sean X e Y dos vectores cualesquiera. Hallar $\|X+Y\|^2+\|X-Y\|^2$ en función de $\|X\|$ y $\|Y\|$.
2. Si $\|X\|=5$, $\|Y\|=12$ y $\|X+Y\|=13$, hallar $\langle X,Y\rangle$ y el ángulo entre los vectores X e Y.

Ejercicio 8

1. Determinar el rango de la matriz
$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\4&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}.$$
¿Es A invertible? Justificar la respuesta.
2. Se recuerda que el núcleo de A es
$$N(A)=\{X\in\mathbb{R}^3 : AX=0\}.$$
Hallar el núcleo de A, siendo A la matriz dada en el inciso anterior.

Solución.

1	2	3	4	5	6
A	C	D	A	E	B

6.10. Año 2015.

6.10.1. Primer semestre. Primer parcial: 02 Mayo 2015.

Verdadero falso: Letra y solución.

1. Un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas solo puede ser compatible determinado si $n = m$.
   Respuesta: FALSO. Contraejemplo: en el caso donde $m = 3$, $n = 1$, el sistema

   $$\begin{cases} x = 0 \\ 2x = 0 \\ 3x = 0 \end{cases}$$

   es compatible determinado, pero $n \neq m$.

2. La matriz

   $$\begin{pmatrix} a & b & 2b-3 \\ 0 & 2 & a+b \\ a & b & -4 \\ -2a & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

   tiene rango 2 para todos los $a, b \in \mathbb{R}$.
   Respuesta: VERDADERO. Escalerizándola, tenemos:

   $$\begin{pmatrix} a & b & 2b-3 \\ 0 & 2 & a+b \\ a & b & -4 \\ -2a & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b & 2b-3 \\ 0 & 2 & a+b \\ 0 & 4 & -2a-2b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b & 2b-3 \\ 0 & 2 & a+b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Entonces, dicha matriz tiene rango a lo sumo igual a 2, y es claro que tiene rango exactamente igual a 2 cuando $a \neq 0$. Entonces, solo consideramos el caso $a = 0$. Tenemos:

   $$\begin{pmatrix} 0 & b & 2b-3 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   tiene rango dos si y solo si

   $$\begin{pmatrix} b & 2b-3 \\ 2 & b \end{pmatrix}$$

   tiene rango dos, si y solo si $b^2 - 4b + 6 \neq 0$. El discriminante del polinomio es: $(-4)^2 - 4(1)(6) = -8$. Entonces, este polinomio nunca se anula, y la matriz inicial tiene rango 2 en todos los casos.

3. Si A y B son matrices simétricas, entonces $AB = BA$.
   Respuesta: FALSO. Contraejemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. En este caso, $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ y $BA = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Toda matriz cuadrada tiene el mismo determinante que cualquiera de sus formas escalerizadas. Respuesta: FALSO. Durante el proceso de escalonamiento, se puede multiplicar por una matriz elemental de determinante distinto de uno. (Por ejemplo: multiplicar cualquier fila por un número distinto de 1.)

5. Es posible elegir a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ de modo que el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación $ax + by + cz = d$ sea una recta.
Respuesta: FALSO. Distinguimos tres casos: (a) Si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, este conjunto es un plano. (b) Si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ y $d \neq 0$, este conjunto es vacío. (b) Si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ y $d = 0$, este conjunto es $\mathbb{R}^3$.

6. El plano de ecuación $(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(1, -2, 1) + \mu(3, 0, -1)$ y la recta de ecuación $(x, y, z) = (1, c, c^2) + \lambda(1, -1, 2)$ no son perpendiculares para ningún valor de $c \in \mathbb{R}$.
Respuesta: VERDADERO. Por definición, $u = (1, -2, 1)$ es un vector director del plano, y $v = (1, -1, 2)$ es un vector director de la recta. Como $u \cdot v = 5$, no pueden ser perpendiculares. (El valor de c no tiene importancia.)

7. La distancia entre el punto $P = (1, 0, 0)$ y la recta de ecuación $(x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda(1, 2, 3)$ es $\sqrt{2}$.
Respuesta: FALSO. Observemos que el punto $Q = (0, 1, 0)$ está en la recta dada y que la distancia entre P y Q es $\sqrt{2}$. La distancia de P a la recta solo puede ser $\sqrt{2}$ si $\vec{PQ}$ es perpendicular a la recta. Pero $\vec{PQ} \cdot (1, 2, 3) = (-1, 1, 0) \cdot (1, 2, 3) = 1$, por lo que esto no sucede. (Alternativamente, se podría calcular la distancia de P a la recta, lo que da $\sqrt{\frac{27}{14}}$.)

8. Si u, v y w son vectores no nulos tales que $u \cdot v = 0$ y $(u - v) \times w = 0$, entonces u y w no pueden ser colineales.
Respuesta: VERDADERO. Supongamos que u, w son colineales, es decir: $u \times w = 0$. Entonces $v \times w = (u - (u - v)) \times w = u \times w - (u - v) \times w = 0$, por lo que v y w son colineales. Pero como w no es nulo, u y v son colineales. Y como u, v no son nulos: $u \cdot v \neq 0$. Contradicción.

Múltiple opción: Letra y solución.

1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones con parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} (\lambda^2 - 1)x + (\lambda - 1)y + (\lambda - 1)z = \lambda - 1 \\ (\lambda^2 - 1)x + (2\lambda - 1)y + (\lambda + 1)z = 2\lambda - 1 \\ (\lambda^2 - 1)x - y + (3\lambda - 1)z = 3 \end{cases}$$

Indicar cuál de las siguientes opciones es verdadera:

(A) El sistema es incompatible solamente para un valor de λ.
(B) El sistema es compatible determinado solamente para tres valores de λ.
(C) El sistema es compatible indeterminado solamente para un valor de λ.
(D) El sistema es incompatible solamente para tres valores de λ.
(E) El sistema es compatible indeterminado solamente para dos valores de λ.

Respuesta: La matriz ampliada del sistema dado es

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & \lambda - 1 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ \lambda^2 - 1 & 2\lambda - 1 & \lambda + 1 & 2\lambda - 1 \\ \lambda^2 - 1 & -1 & 3\lambda - 1 & 3 \end{pmatrix},$$

que tras la aplicación de transformaciones elementales se transforma en

$$\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cuando $\lambda \neq -1, 0, 1$, esta matriz está escalonada. En este caso, tanto la matriz como la matriz ampliada tienen 3 escalones, y por lo tanto el sistema es compatible determinado.

Cuando $\lambda = -1$, la última fila da origen a la ecuación $0z = 2$, por lo que el sistema es incompatible.

Cuando $\lambda = 0$, al escalerizar la matriz obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Por lo tanto, en este caso el sistema es incompatible.

Cuando $\lambda = 1$, al escalerizar la matriz obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

y el sistema es compatible indeterminado.

Concluimos que la respuesta correcta es: El sistema es compatible indeterminado solamente para un valor de λ.

2. Sean A y B matrices de 3×3 con coeficientes en R tales que

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} d & e & f \\ 2a & 2b & 2c \\ g+3d & h+3e & i+3f \end{pmatrix}, \quad \det(A) = -5.$$

(A) $\det(2AB^{-1}) = 1$

(B) $\det(2AB^{-1}) = -\frac{8}{3}$

(C) $\det(2AB^{-1}) = 2$

(D) $\det(2AB^{-1}) = -\frac{4}{5}$

(E) $\det(2AB^{-1}) = \frac{2}{3}$

Respuesta: La matriz B se obtiene a partir de A haciendo las siguientes operaciones:

a) Intercambiando dos filas.

b) Multiplicando una fila por 2.

c) Sumando a una fila un múltiplo de otra.

La operación (i) cambia el signo del determinante, la (ii) multiplica el determinante por 2 y la (iii) no afecta el determinante. Por lo tanto, $\det(B) = -2\det(A) = 10$. Entonces,

$$\det(2AB^{-1}) = 2^3\det(AB^{-1}) = 2^3\det(A)\det(B^{-1}) = 2^3\frac{\det(A)}{\det(B)} = -4.$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es **(D)**, $\det(2AB^{-1}) = -4$.

3. Sea

$$B = \begin{pmatrix} b+2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & b+2 & 0 & 2 \\ b-1 & 0 & b-1 & 0 \\ b+2 & 1 & 2 & b \end{pmatrix} \quad b \in \mathbb{R}.$$

(A) Si $b \geq 2$, el rango de la matriz B es 4.
(B) Si $b \leq -2$, el rango de la matriz B es 4.
(C) Si $b \geq 0$, el rango de la matriz B es 4.
(D) Si $b < 0$, el rango de la matriz B es 4.
(E) Si $b \geq 1$, el rango de la matriz B es 4.

Respuesta: El determinante de la matriz dada es $b^2(b+2)(b-1)$, que es distinto de cero para $b \neq -2, 0, 1$. Por lo tanto, el rango de esta matriz es 4 para $b \neq -2, 0, 1$ y menor que 4 para $b = -2, 0, 1$. Concluimos que la respuesta correcta es: Si $b \geq 2$, el rango de la matriz B es 4.

4. Se consideran los planos $\pi_1 : 2x + 3y + z = 1$ y π_2:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 1 + \lambda + 5\mu \\ z = 2 + \lambda - \mu \end{cases}$$

(A) Los planos π_1 y π_2 son paralelos y su distancia vale 2.
(B) Los planos π_1 y π_2 son coincidentes y contienen los puntos $P = (0, 0, 1)$ y $Q = (1, -1, 2)$.
(C) Los planos π_1 y π_2 son coincidentes y contienen los puntos $P = (0, 0, 1)$ y $Q = (1, -3, 2)$.
(D) Los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta cuya dirección está dada por el vector $v = (-1, 1, -1)$.
(E) Los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta cuya dirección está dada por el vector $v = (-1, 3, -3)$.

Respuesta: La dirección normal a π_1 está dada por el vector $n_1 = (2, 3, 1)$. El plano π_2 tiene como vectores directores a $(1, 1, 1)$ y $(-1, 5, -1)$, por lo que la dirección normal a π_2 está dada por su producto vectorial:

$$(1, 1, 1) \wedge (-1, 5, -1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (-6, 0, 6),$$

que es colineal con $n_2 = (-1, 0, 1)$.

Como n_1 y n_2 no son colineales, los planos π_1 y π_2 ni son el mismo ni son paralelos, y deben intersectarse en una recta. Dicha recta tiene dirección dada por:

$$n_1 \wedge n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3, -3, 3),$$

que es colineal con $(-1, 1, -1)$.

5. Sean v y w dos vectores en $\mathbb{R}^3$ que cumplen que $2v - w$ es perpendicular a w, $||5v|| = 10$, y que el ángulo entre v y w es $\frac{\pi}{4}$.

   (A) $||w|| = \sqrt{2}$.
   (B) $||w|| = \sqrt{8}$.
   (C) $||w|| = \sqrt{5}$.
   (D) $||w|| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
   (E) $||w|| = 2$

   Respuesta: Si $||5v|| = 10$, tenemos que $||v|| = 2$. Por otro lado, si $2v - w \perp w$, entonces $0 = \langle 2v - w, w\rangle = 2\langle v, w\rangle - \langle w, w\rangle = 2\langle v, w\rangle - ||w||^2$, y entonces $2\langle v, w\rangle = ||w||^2$. Esto es, $2||v|| ||w|| \cos(\frac{\pi}{4}) = ||w||^2$, o $2||v|| \cos(\frac{\pi}{4}) = ||w||$. Como $||v|| = 2$ y $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tenemos que $||w|| = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$.

6. Sea π el plano perpendicular a la recta $r : \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$ y que contiene a la recta $s : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$.

   Consideremos el punto $Q = (3, 2, 1)$. Entonces la distancia del punto Q al plano π vale:

   (A) $8/\sqrt{11}$.
   (B) $8/\sqrt{6}$.
   (C) $2/\sqrt{11}$.
   (D) $2/\sqrt{6}$.
   (E) $4/\sqrt{11}$

   Respuesta: Dos puntos de la recta r son $P = (1, 0, -2)$ y $P_0 = (0, -1, 1)$, por lo que la dirección de esta recta está dada por el vector $\vec{P_0P} = \vec{P} - \vec{P_0} = (1, 1, -3)$. Como el plano π es perpendicular a r, la dirección normal a π está dada por $\vec{P_0P}$. Como s está contenido en π, el punto $Q_0 = (1, 2, 3)$ pertenece a π. Entonces la distancia de Q a π está dada por:

$$d(Q, \pi) = \frac{\left|\langle \vec{Q_0Q}, \vec{P_0P}\rangle\right|}{\|\vec{P_0P}\|} = \frac{|\langle (2, 0, -2), (1, 1, -3)\rangle|}{\|(1, 1, -3)\|} = \frac{8}{\sqrt{11}}$$

6.11. Año 2016.

6.11.1. Segundo semestre. Primer parcial: 24 Septiembre 2016.

Múltiple opción.

1. Considere el sistema
$$\begin{cases} (1+\alpha)x + y + 2z = 0 \\ -x + (1+\alpha)y + 3z = 0 \\ -2x - 3y + (1+\alpha)z = 1 \end{cases}$$
donde α es un parámetro real. Indique la opción correcta:
   (A) El sistema no tiene solución para ningún valor de α.
   (B) Si $\alpha \neq -1$ el sistema tiene solución única, pero si $\alpha = -1$ tiene infinitas soluciones.
   (C) Si $\alpha \neq -1$ el sistema tiene solución única, pero si $\alpha = -1$ no tiene solución.
   (D) El sistema tiene solución única para todo valor de α.
   (E) El sistema tiene infinitas soluciones para todo valor de α.

2. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es correcta. Un sistema de ecuaciones lineales con más incógnitas que ecuaciones:
   (A) Nunca tiene solución.
   (B) Si tiene solución, no es única.
   (C) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.
   (D) Siempre tiene solución.
   (E) Siempre tiene solución única.

3. Dadas las rectas r:
$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$$
s:
$$\begin{cases} x - y + z = -10 \\ x - y = -11 \end{cases}$$
y el plano π por los puntos $P = (2, 1, 0)$, $Q = (-1, 2, 1)$ y $R = (0, 5, -2)$. Se considera t, la recta paralela al eje z que pasa por $r \cap s$.
Entonces, t corta a π en:
   (A) (2, -4, 2)
   (B) (3, 4, -2)
   (C) (3, 4, -3)
   (D) (-2, 9, 1)
   (E) (-2, 9, -4)

4. Edinson Cavani se encuentra practicando tiros libres, su objetivo es meter la pelota en un agujero en la pared. La pared se modelará como el siguiente plano:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 2\mu \\ y = -3 + \lambda - \mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$$

En el décimo intento, Cavani se encuentra parado en el punto (5, 0, 1) y patea en la dirección (1, -1, 1). Se podrá suponer que la pelota viaja en línea recta. Si el agujero se encuentra en el punto (3, -2, 1), entonces (suponiendo todas las distancias en metros) le erra por:

(A) $\sqrt{10}\,\mathrm{m}$
(B) 5 m.
(C) $\sqrt{20}\,\mathrm{m}$
(D) $\sqrt{3}\,\mathrm{m}$
(E) $\sqrt{15}\,\mathrm{m}$

5. Sean X e Y dos vectores tales que $||X|| = 3$, $||Y|| = 2$ y $||X - Y|| = \sqrt{7}$. Entonces:

(A) $\langle X, Y\rangle = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$
(B) $\langle X, Y\rangle = 6$ y $\theta = \frac{\pi}{3}$
(C) $\langle X, Y\rangle = 3$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$
(D) $\langle X, Y\rangle = 3$ y $\theta = \frac{\pi}{3}$
(E) $\langle X, Y\rangle = 6$ y $\theta = \frac{\pi}{6}$

6. Dada $A \in M_{n\times n}$, una matriz no invertible, se consideran las siguientes afirmaciones:

I) $rango(A) = n$.
II) A^t es no invertible (donde A^t es la traspuesta de A).
III) Dado $b \in M_{n\times 1}$, el sistema $(A|b)$ nunca puede ser compatible determinado.

Entonces:

(A) Solo las afirmaciones II) y III) son verdaderas.
(B) Solo las afirmaciones I) y II) son verdaderas.
(C) Las tres afirmaciones son verdaderas.
(D) Solo la afirmación III) es verdadera.
(E) Las tres afirmaciones son falsas.

7. Sean u y v dos vectores de $\mathbb{R}^3$ no colineales. Se consideran las siguientes afirmaciones:

I) Existen infinitos vectores w que cumplen que $u \wedge v = u \wedge w$.
II) Sea $w \in \mathbb{R}^3$, con $w \neq \vec{0}$. Entonces $(u \wedge v) \wedge w = \vec{0} \Leftrightarrow$ existen α y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que $w \perp (\alpha u + \beta v)$.
III) $\langle u, u \wedge v\rangle \geq 0$.

Entonces:

(A) Solo la afirmación III) es verdadera.
(B) Las tres afirmaciones son verdaderas.
(C) Solo las afirmaciones I) y III) son verdaderas.
(D) Solo las afirmaciones II) y III) son verdaderas.
(E) Las tres afirmaciones son falsas.

8. Se consideran las rectas: (r):
$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$$
(r'):
$$\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-3\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
Indicar cuál de las siguientes opciones es correcta:

(A) Las rectas (r) y (r') son paralelas pero no coinciden.
(B) Las rectas (r) y (r') se cortan.
(C) Las rectas (r) y (r') coinciden.
(D) Ninguna de las restantes opciones es correcta.
(E) Las rectas (r) y (r') se cruzan.

9. Sean A y B dos matrices $n \times n$ invertibles y $\lambda \neq 0$ un número real. Indicar cuál de las siguientes opciones es correcta:

(A) λAB es invertible y su inversa es $\frac{1}{\lambda}B^{-1}A^{-1}$.
(B) λAB es invertible y su inversa es $\lambda A^{-1}B^{-1}$.
(C) λAB es invertible y su inversa es $\lambda B^{-1}A^{-1}$.
(D) λAB puede no ser invertible.
(E) λAB es invertible y su inversa es $\frac{1}{\lambda}A^{-1}B^{-1}$.

10. Sean dos matrices A y B de dimensiones 2×2 tales que $3A^{-1}B^2 = 2I$. Entonces, si $\det(B) = 2$, el determinante de A es:

(A) 3
(B) 4
(C) 9
(D) 2
(E) 1

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	E	C	B	A	C	C	A	C

6.12. Año 2017.

6.12.1. Primer semestre: Primer parcial: 29 Abril 2017.

Verdadero-falso.

1. Si $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{5\times 7}$ entonces existe b tal que el sistema $AX = b$ es compatible determinado.
2. Si $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ y el sistema $AX = 0$ es compatible determinado, entonces A es invertible y $A^{-1}b$ es solución del sistema $AX = b$ cualquiera sea b.
3. Si r y s son dos rectas en $\mathbb{R}^3$ tales que $r \cap s = \emptyset$, entonces r y s son paralelas.
4. Si u y v son vectores en $\mathbb{R}^3$, entonces $u \wedge v = v \wedge u$.
5. Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente dependiente, entonces v_n es combinación lineal de $v_1, \dots, v_{n-1}$.
6. Si $A^2 = I_n$, entonces A es invertible.
7. Si $\det(A) = 0$, entonces A tiene una fila o una columna formada por ceros.
8. Si $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$, entonces AA^t es simétrica y $\det(AA^t) \geq 0$.

Múltiple opción.

1. Se considera el sistema
$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ -x + ay + z = b \end{cases}$$
   (A) Es compatible determinado para todo a y b reales.
   (B) Si $a = 1$ y $b \neq \frac{2}{5}$, es incompatible.
   (C) Si $a = -1$ y $b = \frac{2}{5}$, el sistema es compatible indeterminado.
   (D) Si $a = 1$ y $b \neq \frac{5}{2}$, el sistema es incompatible.
   (E) Si $a = 1$ y $b = \frac{2}{5}$, el sistema es compatible determinado.

2. Sean A, B y C tres matrices 3×3. Se consideran las siguientes afirmaciones:
   (I) Si $AB = AC$, entonces $B = C$.
   (II) Si $B^2 = O$, entonces $B = O$.
   (III) $\det(\det(A)) = \det(A)^2$.
   (IV) Si A y B son invertibles, entonces $A + B$ es invertible.

   Indicar cuál de las siguientes opciones es correcta:

   (A) Solamente (I), (II) y (III) son verdaderas.
   (B) Solamente (II) y (III) son verdaderas.
   (C) Solamente (III) es verdadera.
   (D) Solamente (I) y (III) son verdaderas.

(E) Todas son falsas.

3. Sean

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & w \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2b & 6(e+h) & 2h \\ 6a & 18(d+g) & 6g \\ 2c & 6(f+w) & 2w \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

tales que $\det(A) = 5$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) $\det(C^{-1}B) = -15$
(II) $\det\left(\frac{1}{2}B\right) = -45$
(III) $\det(CB) = 360$

Indicar cuál de las siguientes opciones es correcta:

(A) Las tres afirmaciones son verdaderas.
(B) Solamente (I) y (II) son verdaderas.
(C) Solamente (I) y (III) son verdaderas.
(D) Solamente (II) y (III) son verdaderas.
(E) Solamente (I) es verdadera.

4. Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) Si A es invertible entonces A es el producto de matrices elementales.
(II) El determinante de cualquier matriz elemental vale 1 o -1.
(III) Toda matriz elemental es invertible.

Indicar cuál de las siguientes opciones es correcta:

(A) Sólo la afirmación (I) es verdadera.
(B) Solamente las afirmaciones (I) y (II) son verdaderas.
(C) Solamente las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.
(D) Solamente las afirmaciones (II) y (III) son verdaderas.
(E) Todas son verdaderas.

5. Sabiendo que el conjunto $A = \{(1,1,2),(2,1,2),(1,2,a)\}$ es linealmente dependiente, entonces el conjunto $B = \{(1,1,1),(2,0,1),(2,a,b)\}$ es:

(A) Linealmente independiente sólo si $b = 3$.
(B) Siempre linealmente dependiente.
(C) Linealmente independiente sólo si $b = 6$.
(D) Linealmente dependiente sólo si $b = 3$.
(E) Linealmente dependiente sólo si $b = 6$.

6. Se consideran el plano π de ecuación $x + 2y - z = -1$ y la recta r que pasa por los puntos $P = (2,1,1)$ y $Q = (3,2,a)$. Entonces:

(A) Hay infinitos valores de a que hacen que π y r sean paralelos.

(B) No existe ningún a de manera que π y r sean paralelos.

(C) π y r son paralelos solamente si $a = 4$.

(D) π y r son paralelos solamente si $a = 1$.

(E) π y r son paralelos solamente si $a = 0$.

7. Sean u y v dos vectores en el espacio. Si $\|u\| = 2$, el ángulo entre u y v es $\frac{\pi}{3}$, y $u + v, 2v = 24$, entonces:

(A) $\|v\|$ no puede determinarse con los datos del problema.

(B) $\|v\| = 9$.

(C) $\|v\| = 3$.

(D) $\|v\| = 12$.

(E) $\|v\| = -12$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8
F	V	F	F	F	V	F	V

1	2	3	4	5	6	7
B	E	B	C	D	C	C

6.12.2. Segundo semestre. Primer parcial: 23 Septiembre 2017.

Múltiple opción.

1. Sean A y B dos matrices de tamaño $n \times n$. Sabiendo que:

   a) $\det(A^2 + AB - BA - B^2) = 4$

   b) $\det(A^2 + AB) = 6$

   c) $\det(A) = 3$

   Entonces, $\det(A - B)$ vale:

   (A) 1.

   (B) 2.

   (C) 6.

   (D) 4.

   (E) 8.

2. Sean las rectas r y s, donde r está definida por:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

y s está definida por:

$$s : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

y el plano π está definido por:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 2\delta \\ y = 1 + \delta - \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$$

Entonces, la distancia entre $r \cap s$ y $r \cap \pi$ es:

(A) 6.
(B) 3.
(C) $3\sqrt{6}$.
(D) $\sqrt{6}$.
(E) $\sqrt{3}$.

3. A, B y C son tres matrices cualesquiera de tamaño $n \times n$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) Si $A \neq O_n$ y $AB = AC \Rightarrow B = C$
(II) $(AB)^2 = A^2B^2$
(III) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$

Entonces, las afirmaciones verdaderas son:

(A) Sólo (I) y (III) son verdaderas.
(B) Todas son verdaderas.
(C) Sólo la (III) es verdadera.
(D) Sólo (II) y (III) son verdaderas.
(E) Sólo (I) y (II) son verdaderas.

4. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4g + 4h & 4d + 4e & 4a + 4b \\ g + 2h & d + 2e & a + 2b \\ \frac{i}{2} & \frac{f}{2} & \frac{c}{2} \end{pmatrix}$. Sabiendo que $\det(A) = 2$, entonces $\det(2B)$ es:

A. -8
B. -32
C. -12
D. 32
E. 8

5. Se consideran las siguientes afirmaciones sobre conjuntos en $\mathbb{R}^n$:

I. Si $\{u, v, w\}$ es linealmente dependiente entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $u = av + bw$.
II. Todos los conjuntos linealmente dependientes tienen al menos dos vectores.

III. El conjunto $\{(\alpha,\alpha,3),(2,1,0),(2,0,\alpha)\}$ es linealmente independiente para cualquier $\alpha\in\mathbb{R}$.

Entonces:

A) Sólo la afirmación (I) es correcta.
(B) Sólo la afirmación (I) es falsa.
(C) Sólo la afirmación (II) es falsa.
(D) Sólo la afirmación (III) es correcta.
(E) Todas las afirmaciones son correctas.

6. Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ k & 1 & k+2\\ -6 & k+3 & 4\end{pmatrix}$. Entonces

A) $\det A>0$ para todo $k\in\mathbb{R}$.
(B) Existen $k_1<k_2$, con $k_1,k_2\in\mathbb{R}$ tales que si $k\in(k_1,k_2)$, $\det A<0$.
(C) Existen $k_1<k_2$, con $k_1,k_2\in\mathbb{R}$ tales que si $k\in(k_1,k_2)$, $\det A>0$.
(D) $\det A<0$ para todo $k\in\mathbb{R}$.
(E) Existe un único $k_0\in\mathbb{R}$ tal que $\det A=0$.

NOTA. Este ejercicio quedó mal redactado. $\det(A)=-2k^2+8k+24=0$ si y sólo si $k=-2$ y $k=6$. El signo del determinante queda negativo para $k<-2$, positivo para $k\in(-2,6)$ y negativo para $k>6$. Por lo tanto, tomando $k_1=-2$ y $k_2=6$ se cumple que $\det(A)>0$ para $k\in(k_1,k_2)$, por lo que la opción C es verdadera. Sin embargo, tal como está redactada, la opción B también es verdadera ya que se puede tomar, por ejemplo, $k_1=7$ y $k_2=8$ y entonces $\det(A)<0$ para $k\in(k_1,k_2)$. Por lo tanto, consideraremos respuesta correcta a cualquiera que haya contestado cualquiera de estas dos opciones.

7. Dados α y β en $\mathbb{R}$, se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & \alpha\\ \beta & \alpha & 2\beta & 2\\ -1 & 0 & 2 & 3-\alpha\\ 1 & 0 & 2 & 2\alpha\end{pmatrix}$.

(A) Existe un único $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que $\mathrm{rg}(A)=3$.
(B) Existe más de un $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que $\mathrm{rg}(A)=3$.
(C) Para cualquier $\beta\neq 0$ y un único $\alpha\in\mathbb{R}$, $\mathrm{rg}(A)=4$.
(D) Para cualquier α y β en $\mathbb{R}$, $\mathrm{rg}(A)<4$.
(E) Para todo $\alpha\in\mathbb{R}$, existe un $\beta\in\mathbb{R}$ tal que $\mathrm{rg}(A)=3$.

8. Sean $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$. Sabemos $\|\mathbf{v}\|=3$, $\|\mathbf{w}\|=2$, $\langle 2\mathbf{v}+\mathbf{w},2\mathbf{w}\rangle=12$. Entonces $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}$ es igual a:

(A) 11.
(B) $\sqrt{15}$.
(C) $\sqrt{13}$.
(D) $\sqrt{11}$.
(E) 15.

9. Se consideran las siguientes afirmaciones sobre matrices A y B de tamaño $n \times n$:

   I. Si A y B son invertibles, entonces AB también lo es.

   II. Si AB es invertible, entonces A y B también lo son.

   III. Si $\mathrm{rg}(A) < n$, entonces $\mathrm{rg}(A^k) < n$ cualquiera sea $k = 1, 2, 3, \ldots$.

   Entonces:

   (A) Sólo la afirmación (I) es correcta.
   (B) Sólo la afirmación (II) es falsa.
   (C) Sólo las afirmaciones (I) y (II) son correctas.
   (D) Sólo la afirmación (III) es correcta.
   (E) Todas las afirmaciones son correctas.

10. Se considera el conjunto $U = \{(1, -2, 1, 1), (1, -1, 0, 1), (2, -3, 1, 2)\}$. Entonces los vectores $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ que son combinación lineal del conjunto U son aquellos que cumplen:

   (A) $3x + y + z = 2t$.
   (B) $x = t$.
   (C) Todas las $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.
   (D) $z = -t - y$ y además $x = t$.
   (E) $2x + y + z - t = 0$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	C	B	D	B/C	B	B	E	D

6.13. Año 2018.

6.13.1. Primer semestre. Primer parcial: 28 Abril 2018.

Verdadero-falso.

1. Considere un sistema lineal (S) de m ecuaciones con n incógnitas. Si (S) es compatible determinado entonces necesariamente debe cumplirse $m = n$.

2. El producto vectorial en $\mathbb{R}^3$ es asociativo. Esto es: $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$ para cualquier terna de vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

3. Sean $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$. Si A tiene una columna de ceros entonces AB también tiene una columna de ceros.

4. Si $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ cumple $\det(AB) = \det(AC)$ para todas las matrices $B, C \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ entonces $\det(A) = 0$.

5. El siguiente sistema lineal 3×3 (S)

$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = m - 1 \end{cases}$$

   es compatible determinado para todo $m \in \mathbb{R}$.

6. La matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ es invertible.

7. Considere $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$. Si se cumple $\mathrm{Rg}(AB) = n$ entonces $\mathrm{rango}(A) = n$ y $\mathrm{rango}(B) = n$.

8. Considere un sistema de ecuaciones lineales (S) escrito en forma matricial, $AX = b$, donde $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$, $X \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times 1}$ y $b \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times 1}$. Si X_1 y X_2 son soluciones de (S) entonces $\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$ también es solución de (S).

9. Si $\{t, u, v, w\} \subseteq \mathbb{R}^4$ es un conjunto L.I. entonces el conjunto $\{u - t, v - u, w - v, t - w\}$ también es L.I.

10. La recta r:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

   y el plano π:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda - \mu \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -\lambda + \mu \end{cases}$$

   no se intersecan.

Múltiple opción.

1. Considere el siguiente sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$(S)\begin{cases} ax+3y+2z &= 1\\ x+z &= -2\\ 3y+az &= b+1\end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Indique la opción correcta:

(A) El sistema S es compatible determinado para todos los valores de a y b.

(B) Para $a = 1$ el sistema S es compatible indeterminado para todo valor de b.

(C) El sistema S es incompatible para $b = 1$ y cualquier valor de a.

(D) Existen únicos valores de a y b para los cuales el sistema S es compatible indeterminado.

2. Sean $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ tales que $\det(B) = 2$ y $B^{-1}A(B^t)^2 + 2I = O$, donde I y O son respectivamente la matriz identidad y la matriz nula 3×3. Entonces:

(A) $\det(A) = 2$.

(B) $\det(A) = -2$.

(C) $\det(A) = -4$.

(D) $\det(A) = 8$.

3. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & v_1 & w_1\\ 2 & v_2 & 2\\ 1 & v_3 & w_3\end{pmatrix}$$

donde $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$. Asuma que se cumplen las siguientes condiciones:

- $\text{traza}(A) = 6$.
- $\text{rango}(A) = 2$.
- La tercera columna de la matriz A es un vector ortogonal al plano $\pi : -x + 2y + 5z = 0$.
- $\langle (v_1, v_2, v_3), (2, -4, 0)\rangle = -2$.

Entonces:

(A) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$

(C) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & 10 & 2\\ 1 & 2 & -5\end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

4. Sea $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$, con n impar, una matriz antisimétrica (esto es: $A^t = -A$) distinta de la matriz nula. Indique la opción correcta:

   (A) A no es invertible pero A^tA sí lo es.

   (B) Ni A ni A^tA son invertibles.

   (C) A y A^tA son invertibles.

   (D) A es invertible pero A^tA no lo es.

5. Considere los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$:

$$A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\}, \quad B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}.$$

   Indique la opción correcta:

   (A) Si $\mathrm{Rg}(A) = 3$ entonces B es L.I.

   (B) Si B es L.I. entonces $\mathrm{Rg}(A) = 3$.

   (C) Si B es L.I. entonces $\mathrm{Rg}(A) = 4$ si y solo si $\mathbf{v}_4$ no es combinación lineal de los elementos de B.

   (D) Si B es L.I. entonces $\mathrm{Rg}(A) = 4$ para cualquier $\mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^4$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	F	F	V	F	F	V	V	F	V

1	2	3	4	5
D	C	D	B	C

6.13.2. Segundo semestre. Primer parcial: 22 Septiembre 2018.

Múltiple opción.

1. ean A y B matrices 3×3 tales que $\det(A) = 3$ y $\det(B) = 2$. Entonces:

   (A) $\det((2A)^t B^{-1} A^2) = 27$.

   (B) $\det(2A - 3B) = 0$.

   (C) Existen números naturales n y m tales que $\det(A^n B^m) = 31$.

   (D) $\det(2A) - \det(3B) = 0$.

   (E) $\det((2A)^{-1} B^3 A^4) = 27$.

2. Consideramos el conjunto $S = \{(-1,1,1), (1,1,1), (1,-1,a)\}$, donde a es un número real. Entonces:

   A) S es linealmente independiente para todo $a \in \mathbb{R}$.

   (B) S es linealmente dependiente para todo $a \in \mathbb{R}$.

   (C) Existe un único $a \in \mathbb{R}$ tal que S es linealmente dependiente.

(D) Existe un único $a \in \mathbb{R}$ tal que S es linealmente independiente.

(E) S es linealmente independiente si y solo si $a = 1$ o $a = -1$.

3. Sean r la recta por los puntos $Q = (-5, -2, -2)$ y $R = (-4, -4, -4)$, y π el plano que pasa por $P = (4, 3, 2)$ y tiene las direcciones $\mathbf{v} = (-2, 1, -2)$ y $\mathbf{w} = (4, 1, 1)$. Entonces, la intersección entre π y r es:

   (A) El conjunto vacío.

   (B) El punto $(-1, 2, 2)$.

   (C) El punto $(0, 1, 1)$.

   (D) El punto $(-6, 0, 0)$.

   (E) El punto $(-2, -4, -4)$.

4. Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

   y

$$B = \begin{pmatrix} 4g + 4h & 4d + 4e & 4a + 4b \\ g + 2h & d + 2e & a + 2b \\ i/2 & f/2 & c/2 \end{pmatrix}$$

   Sabiendo que $\det(A) = 2$, entonces $\det(B)$ es:

   (A) -1.

   (B) -4.

   (C) -12.

   (D) 4.

   (E) 1.

5. Sea un sistema de ecuaciones escrito en la forma matricial

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 24 \\ 28 \end{pmatrix}$$

   y cuya solución general es de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Entonces, la segunda columna de A es:

   (A) $\begin{pmatrix} 4 \\ 24 \\ 28 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} -8 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}$

(E) El vector nulo.

6. En este ejercicio se utilizará la notación F_i para denotar la fila i de una matriz A y C_j para denotar la columna j. Sea A una matriz 4×3 cuyas columnas verifican $C_3 = 2C_1 + C_2$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

   (I) $\text{Rg}(A) \leq 2$.

   (II) Existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $F_3 = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$.

   (III) Si $\{F_1, F_2\}$ es L.I., entonces $\text{rango}(A) = 2$.

   Entonces:

   (A) Sólo (I) y (II) son verdaderas.

   (B) Sólo (I) y (III) son verdaderas.

   (C) Sólo (II) y (III) son verdaderas.

   (D) Las 3 afirmaciones son verdaderas.

   (E) Sólo (I) es verdadera.

7. Sean A y B matrices $n \times n$ siendo $n \geq 2$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

   (I) $\det(2A) = 2\det(A)$.

   (II) Si A y B son semejantes (es decir, existe P matriz $n \times n$ invertible tal que $A = PBP^{-1}$), entonces A es invertible si y sólo si B es invertible.

   (III) Si $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(B) = n$ entonces $\text{Rg}(AB) = n$.

   Entonces:

   (A) Solamente (II) es correcta.

   (B) Solamente (I) y (II) son correctas.

   (C) Solamente (II) y (III) son correctas.

   (D) Solamente (I) y (III) son correctas.

   (E) Las tres son correctas.

8. Sean $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Sabemos $\|\mathbf{v}\| = 3$, $\|\mathbf{w}\| = 2$, $\langle 2\mathbf{v} + \mathbf{w}, 2\mathbf{w} \rangle = 12$. Entonces $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ es igual a:

   A) 11.

   (B) $\sqrt{15}$.

(C) $\sqrt{13}$.
(D) $\sqrt{11}$.
(E) 15.

9. Considere la siguiente familia de sistemas de ecuaciones lineales:

$$S_{\alpha,\beta} = \begin{cases} x + \alpha y + z = 1 \\ 2y - z = 2 \\ (\alpha^2 - 1)z = \beta \end{cases}$$

Indique la opción correcta:

(A) El sistema es compatible determinado sin importar los valores de α y β.
(B) El sistema es compatible indeterminado si y solo si $|\alpha| = 1$ y $\beta = 0$.
(C) El sistema es incompatible sin importar los valores de α y β.
(D) El sistema es incompatible si y solo si $\beta \neq 0$.
(E) El sistema es compatible indeterminado si y solo si $\beta = 0$.

10. Se considera el conjunto $U = \{(1,-2,1,1),(1,-1,0,1),(2,-3,1,2)\}$. Entonces los vectores $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ que son combinación lineal del conjunto U son aquellos tales que cumplen:

(A) $3x + y + z = 2t$.
(B) $x = t$.
(C) Todas los $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.
(D) $z = -t - y$ y además $x = t$.
(E) $2x + y + z - t = 0$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	C	D	B	B	B	C	D	B	D

6.14. Año 2019.

6.14.1. Primer semestre. Primer parcial: 27 Abril 2019.

Verdadero- falso.

1. Un sistema lineal de 15 ecuaciones y 20 incógnitas siempre es compatible.

2. Para todas matrices A y B de tamaño 5×5, tenemos que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

3. El rango de una matriz A es la cantidad de filas no nulas de A.

4. Para toda matriz elemental E de tamaño 7×7, se cumple que $\det(E) = 1$.

5. Para todos vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$, tenemos que $(u+v)\cdot(u+v) = (u \cdot u) + 2(u \cdot v) + (v \cdot v)$.

Múltiple opción.

1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones con parámetro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (k^2-1)x_1 + (k-1)x_2 + (k-1)x_3 = k-1 \\ (k^2-1)x_1 + (2k-1)x_2 + (k+1)x_3 = 2k-1 \\ (k^2-1)x_1 - x_2 + (3k-1)x_3 = 3 \end{cases}$$

(A) El sistema es incompatible solamente para un valor de k.
(B) El sistema es compatible determinado solamente para tres valores de k.
(C) El sistema es compatible indeterminado solamente para un valor de k.
(D) El sistema es incompatible solamente para tres valores de k.

2. En el espacio $\mathbb{R}^3$, la intersección de los tres planos

$$\begin{aligned} &\pi_1 : x + y - z = 2 \\ &\pi_2 : x + 3y - 2z = 0 \\ &\pi_3 : (x, y, z) = (2, -2, 2) + \lambda(0, 0, 1) + \mu(1, 1, 0) \end{aligned}$$

es:
(A) un plano.
(B) una recta.
(C) un punto.
(D) el conjunto vacío.

3. Sea M la matriz de tamaño $2n \times 2n$ definida por $M = \begin{pmatrix} A & O_n \\ C & D \end{pmatrix}$, donde A, B y D son bloques de tamaño $n \times n$. Si las matrices A y D son invertibles, entonces M es invertible y:
(A) $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O_n \\ -CA^{-1}D^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$.
(B) $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O_n \\ -A^{-1}CD^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$.

(C) $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O_n \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$.
(D) $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O_n \\ -D^{-1}A^{-1}C & D^{-1} \end{pmatrix}$.

4.

5. El determinante de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
es:
(A) 4
(B) -4
(C) 8
(D) -8

6. Sean $A = (a_{i,j})$ y $B = (b_{i,j})$ las matrices de tamaño $n \times n$ (con $n \geq 1$) definidas por $a_{i,j} = (-1)^{i+j}\pi^j$ y $b_{i,j} = (-1)^{i+j}\pi^{-i}$ para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Se escribe $C = (c_{i,j}) = AB$. Entonces:
(A) $c_{i,j} = (-1)^{i+j}$ para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$
(B) $c_{i,j} = n(-1)^{i+j}$ para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$
(C) $c_{i,j} = \pi^{j-i}$ para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$
(D) $c_{i,j} = (-1)^{i+j}\pi^{j-i}$ para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$

7. Sean A y B matrices cuadradas de tamaño $n \times n$, donde $n \geq 1$ es un entero impar. Se supone que A es simétrica, B es antisimétrica y que AB es antisimétrica. Entonces:
(A) Si A es invertible, entonces AB es invertible, y además $AB = BA$.
(B) Si A es invertible, entonces AB es invertible, y además existen ejemplos donde $AB \neq BA$.
(C) AB no es invertible, y además $AB = BA$.
(D) AB no es invertible, y además existen ejemplos donde $AB \neq BA$.

Solución.

1	2	3	4	5
F	F	F	F	V

Justiifcación:

1. Falso. Contraejemplo: cualquier sistema lineal de 15 ecuaciones y 20 incógnitas de la siguiente forma:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{19} + x_{20} = 0 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{19} + x_{20} = 1 \\ \text{(más 13 ecuaciones cualesquiera)} \end{cases}$$
incompatible debido a las primeras dos ecuaciones.

2. Falso. En todos los casos, tenemos que

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A(A+B) + B(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Pero cuando $AB \neq BA$ (es decir: cuando las matrices A y B no conmutan entre sí), tenemos que $AB + BA \neq 2AB$, y luego:

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

Contraejemplo concreto: Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

pero

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Falso. El rango de una matriz A es la cantidad de filas no nulas de cualquier forma escalonada de A (pero no necesariamente de A). Contraejemplo: la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con forma escalonada A_0:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene 3 filas no nulas, pero tiene rango 1 (= número de filas no nulas de A_0).

4. Falso. Contraejemplo: la matriz elemental

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(”multiplicar la fila 3 por 5”) tiene determinante $\det(E) = 1 \times 1 \times 5 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 5 \neq 1$.

5. Verdadero. Al contrario del producto de matrices, el producto escalar (o producto interno) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ es conmutativo, es decir, tenemos que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ para todos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

   Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u}+\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned}$$

   para todos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7
C	B	C		D	B	C

Justifiación:

1. Al escalerizar el sistema (S) obtenemos los sistemas sistemas equivalentes

$$(S_1): \begin{cases} (k^2-1)x_1 + (k-1)x_2 + (k-1)x_3 = k-1 \\ kx_2 + 2x_3 = k \\ -kx_2 + 2kx_3 = -k+4 \end{cases} \qquad (F_2 \leftharpoondown F_2 - F_1,\ F_3 \leftharpoondown F_3 - F_1)$$

$$(S_2): \begin{cases} (k^2-1)x_1 + (k-1)x_2 + (k-1)x_3 = k-1 \\ kx_2 + 2x_3 = k \\ (2k+2)x_3 = 4 \quad (F3 \leftharpoondown F3 + F2) \end{cases}$$

Para ir más adelante en el proceso de escalonamiento, se necesita determinar si los coeficientes diagonales $k^2-1 = (k+1)(k-1)$, k y $2k+2$ son nulos o no. Para ello, se distinguen 4 casos:

- Caso $k=-1$. Cuando $k=-1$, el sistema (S_2) es:

$$(S_2): \begin{cases} -2x_2 - 2x_3 = -2 \\ -x_2 + 2x_3 = -1 \\ 0 = 4 \end{cases}$$

Debido a la tercera ecuación, el sistema es incompatible.

- Caso $k=1$. Cuando $k=1$, el sistema (S_2) es:

$$(S_2): \begin{cases} 0 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Reordenando las tres ecuaciones, se obtiene el sistema escalonado

$$(S_3): \begin{cases} x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_3 = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

que es claramente compatible indeterminado.

- Caso $k=0$. Cuando $k=0$, el sistema (S_2) es:

$$(S_2): \begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_3 = 0 \\ 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Escalonando un paso más, se obtiene el sistema:

$$(S_3): \begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_3 = 0 \\ 0 = 4 \quad (F_3 \leftharpoondown F_3 - F_2) \end{cases}$$

que es claramente incompatible, debido a la última ecuación.

- Caso $k \notin \{-1, 0, 1\}$. En este caso, los tres coeficientes diagonales del sistema

$$(S_2): \begin{cases} (k^2-1)x_1 + (k-1)x_2 + (k-1)x_3 = k-1 \\ kx_2 + 2x_3 = k \\ (2k+2)x_3 = 4 \end{cases}$$

son no nulos. Por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Para resumir:

- $k = -1$ incompatible
- $k = 0$ incompatible
- $k = 1$ compatible indeterminado
- $k \notin \{-1, 0, 1\}$ compatible determinado

Por lo tanto, la única opción que se aplica es:

El sistema es compatible indeterminado solamente para un valor de k.

2. En primer lugar, se determina una ecuación implícita del plano π_3 definido por el punto $A = (2, -2, 2)$ y los vectores directores $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1)$ y $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$ (no colineales). Para todo punto $\mathbf{X} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tenemos que:

$$\mathbf{X} \in \pi_3 \Leftrightarrow \det(\mathbf{X} - \mathbf{A}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 1 \\ y+2 & 0 & 1 \\ z-2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + y + 4 = 0,$$

lo que nos da la ecuación $\pi_3 : x - y = 4$. Luego, se determina la intersección de los planos π_1, π_2 y π_3, resolviendo el sistema lineal (S):

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 3y - 2z = 0 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Por escalerización, el sistema anterior es equivalente a los sistemas:

$$(S_0): \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2y - z = -2 \\ -2y + z = 2 \end{cases} \qquad (F_2 \leftharpoondown F_2 - F_1,\ F_3 \leftharpoondown F_3 - F_1)$$

$$(S_1): \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2y - z = -2 \\ 0 = 0 \quad (F_3 \leftharpoondown F_3 + F_2) \end{cases}$$

y por "sustitución hacia atrás", se deduce que $y = -1 + \frac{1}{2}z$ y $x = 2 + z - y = 3 + \frac{1}{2}z$. Por lo tanto, el conjunto solución del sistema (S) es el conjunto:

$$\{(3 + \frac{1}{2}z, -1 + \frac{1}{2}z, z) : z \in \mathbb{R}\},$$

es decir, la recta $R : (x, y, z) = (3, -1, 0) + \lambda(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.

En conclusión, la intersección de los tres planos π_1, π_2 y π_3 es: una recta R.

3. Para determinar si la matriz M es invertible y su matriz inversa M^{-1}, basta con verificar que $MM^{-1} = I_{2n}$. Se testean las cuatro matrices propuestas en las opciones:

   - $$\begin{pmatrix} A & O_n \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A^{-1} & O_n \\ -CA^{-1}D^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^{-1} + O_n(-CA^{-1}D^{-1}) & AO_n + O_nD^{-1} \\ CA^{-1} + D(-CA^{-1}D^{-1}) & CO_n + DD^{-1} \end{pmatrix}$$
     $$= \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ CA^{-1} - DCA^{-1}D^{-1} & I_n \end{pmatrix} \neq I_{2n}$$
   - $$\begin{pmatrix} A & O_n \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A^{-1} & O_n \\ -A^{-1}CD^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ CA^{-1} - DA^{-1}CD^{-1} & I_n \end{pmatrix} \neq I_{2n}$$
   - $$\begin{pmatrix} A & O_n \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A^{-1} & O_n \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ CA^{-1} - DD^{-1}CA^{-1} & DD^{-1} \end{pmatrix}$$
     $$= \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ CA^{-1} - CA^{-1} & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$
   - $$\begin{bmatrix} A & O_n \\ C & D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A^{-1} & O_n \\ -D^{-1}A^{-1}C & D^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & O_n \\ CA^{-1} - A^{-1}C & I_n \end{bmatrix} \neq I_{2n}$$

   Así, la única opción posible es:
   $$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O_n \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

5. Restando la fila 1 a las filas restantes, se observa que:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

   Y como la matriz por la derecha es triangular superior, tenemos que:

$$\det(A) = 1 \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times 1 \times 1 = -8$$

   Por lo tanto, la única opción que se aplica es: -8.

6. El término general de la matriz $(c_{i,j}) = AB$ está dado por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}((-1)^{i+k}\pi^k)((-1)^{k+j}\pi^{-k}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+2k+j}\pi^{k-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+j} = n(-1)^{i+j}$$

Por lo tanto, la única opción que se aplica es: $c_{ij} = n(-1)^{i+j}$.

7. Dada una matriz antisimétrica M de tamaño $n \times n$, se observa que $\det(M) = \det(M^t) = \det(-M) = (-1)^n \det(M) = -\det(M)$ (pues n es impar), luego: $\det(M) = 0$. Así, demostramos que cuando n es impar, las matrices antisimétricas de tamaño $n \times n$ son no invertibles. Y como según los datos del problema, la matriz AB es antisimétrica, se deduce que AB no es invertible. Además, se observa que:

$$AB = -(AB)^t = -B^tA^t = (-B^t)A^t = BA$$

Por lo tanto, la única opción que se aplica es: AB no es invertible, y además $AB = BA$.

6.14.2. Segundo semestre. Primer parcial: 21 Septiembre 2019.

Verdadero- falso.

1. Si $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{5\times5}$ es tal que $|A| = 2$, entonces

$$|2A^{-1}| = 1.$$

2. Un sistema lineal de 20 ecuaciones y 30 incógnitas no puede ser compatible determinado.

3. Si P, Q y R son tres puntos tales que los vectores $P - Q$ y $Q - R$ son colineales, entonces los tres puntos P, Q y R están alineados.

4. Si $v \in \mathbb{R}^3$ es un vector no nulo, entonces $\langle v, v\rangle > 0$.

5. Para todos $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$, AB es invertible si y solo si A y B son invertibles.

Múltiple Opción.

1. Sea $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ cuya gráfica pasa por los puntos $p(2) = 0, p(1) = 1, p(-1) = 1, p(-2) = 2$ Después de haber determinado los coeficientes a, b, c y d, indicar la opción correcta:

   (A) $a - b - c + d = \frac{5}{3}$
   (B) $a - b - c + d = -\frac{7}{3}$
   (C) $a - b - c + d = 2$
   (D) $a - b - c + d = -1$

2. Sea la matriz invertible

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 4 & -4 \\ 3 & -8 & -7 & 6 \\ -1 & 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Después de haber determinado su inversa $(b_{i,j}) = A^{-1}$, indicar la opción correcta:

(A) $b_{1,2} + b_{1,3} + b_{4,2} + b_{4,3} = 16$

(B) $b_{1,2} + b_{1,3} + b_{4,2} + b_{4,3} = 3$

(C) $b_{1,2} + b_{1,3} + b_{4,2} + b_{4,3} = -1$

(D) $b_{1,2} + b_{1,3} + b_{4,2} + b_{4,3} = -20$

3. 3. El determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es:

(A) 81

(B) 192

(C) -81

(D) -192

4. Sean los planos $\pi_1 : x - 2y - z = 0$, $\pi_2 : (0,0,0) + \alpha(1,-1,0) + \beta(0,0,2)$ y la recta $r : (x,y,z) = (-1,0,2) + \lambda(1,1,1)$. Dado un parámetro $a \in \mathbb{R}$, se denota s_a a la recta paralela a la recta $\pi_1 \cap \pi_2$ y que pasa por el punto $(0,a,1)$. Entonces la intersección $r \cap s_a$ no es vacía...

(A) ... para ningún valor de $a \in \mathbb{R}$.

(B) ... sólo para $a = 3$.

(C) ... sólo para $a = 2$.

(D) ... para todo valor de $a \in \mathbb{R}$.

5. Se considera la matriz M de tamaño 20×20 definida por

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ O_{10} & D \end{pmatrix}$$

donde A, B y D son bloques de tamaño 10×10. Si $n_1 = \mathrm{Rg}(A)$, $n_2 = \mathrm{Rg}(D)$ y $m = \mathrm{Rg}(M)$, entonces:

(A) $m = n_1 + n_2$ para toda matriz M en estas condiciones.

(B) $m \geq n_1 + n_2$ y hay ejemplos donde $m > n_1 + n_2$.

(C) $m \leq n_1 + n_2$ y hay ejemplos donde $m < n_1 + n_2$.

(D) No hay relación entre m y n_1+n_2 (es decir: hay ejemplos donde $m < n_1+n_2$, otros donde $m = n_1+n_2$, y otros donde $m > n_1 + n_2$).

6. Sea $A = (a_{i,j})$ la matriz de tamaño 5×5 definida por $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j \\ 1 & \text{si } i < j \end{cases}$. Denotamos $B = (b_{i,j}) = A^2$.

Entonces:

(A) $b_{i,j} > 0$ si y solo si $i < j$; y además $A - I_5$ es invertible.

(B) $b_{i,j} > 0$ si y solo si $i < j$; y además $A - I_5$ no es invertible.

(C) $b_{i,j} > 0$ si y solo si $i < j - 1$; y además $A - I_5$ es invertible.

(D) $b_{i,j} > 0$ si y solo si $i < j - 1$; y además $A - I_5$ no es invertible.

Solución.

1	2	3	4	5
F	V	V	V	V

1	2	3	4	5	6
B	D	A	B	B	C

6.15. Año 2022.

6.15.1. Segundo semestre. Primer parcial: 24 Septiembre 2022.

Múltiple opción.

1. Sean $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$ y $b \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times 1}$ con $m > n$, y el sistema de ecuaciones lineales dado por la ecuación
$$(S) : Ax = b,$$
donde $x \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times 1}$. Indique la opción correcta:

   (A) El sistema (S) es compatible para toda A y b.
   (B) Si $\mathrm{Rg}(A) = n$ entonces (S) tiene solución única.
   (C) No existe b tal que (S) tiene solución para todo A.
   (D) Si (S) es incompatible, entonces $\mathrm{Rg}(A) \geq n$.
   (E) Si (S) es incompatible, entonces la suma de las entradas de b es 0.
   (F) Si $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A|b)$ entonces (S) es incompatible.

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} x + y + 2z = 1, \\ 3y - 4z = 2, \\ -x - 4y + 2z = -3, \end{cases}$$
y las restricciones $x, y, z \in \mathbb{Z}$, $5 \leq x \leq 9$. Entonces, $x + y + z$ es igual a:

   (A) 1
   (B) 2
   (C) 3
   (D) 4
   (E) 5
   (F) 6

3. Para $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$, indicar la opción correcta:

   (A) Si $AB = 0_n$ entonces $A = 0_n$ o $B = 0_n$.
   (B) Si $B = I_n + A + A^2 + A^3$, entonces $\mathrm{tr}(B) = n + \mathrm{tr}(A) + [\mathrm{tr}(A)]^2 + [\mathrm{tr}(A)]^3$.
   (C) Si A es simétrica (es decir, $A^t = A$), entonces A es invertible.
   (D) Si $B = I_n + A + A^2 + A^3$, entonces $AB \neq BA$.
   (E) Si $B = I_n + A + A^2 + A^3$ y $A^4 = 0_n$, entonces B es invertible y $B^{-1} = I_n - A$.
   (F) Si $B = I_n - A + A^2 - A^3$ y $A^4 = 0_n$, entonces B no es invertible.

4. Para la matriz
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
se tiene que:
   (A) A no es invertible.
   (B) A es invertible y si $A^{-1} = (b_{ij})$ entonces $b_{11} + b_{32} + b_{13} = -3$.
   (C) A es invertible y si $A^{-1} = (b_{ij})$ entonces $b_{11} + b_{32} + b_{13} = 1$.
   (D) A es invertible y si $A^{-1} = (b_{ij})$ entonces $b_{11} + b_{32} + b_{13} = 5$.
   (E) A es invertible y si $A^{-1} = (b_{ij})$ entonces $b_{11} + b_{32} + b_{13} = 9$.
   (F) A es invertible y si $A^{-1} = (b_{ij})$ entonces $b_{11} + b_{32} + b_{13} = -1$.
5. Considere la matriz de Vandermonde
$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$
donde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Entonces:
   (A) $\mathrm{Rg}(V) = 1$ si y sólo si $a = b = c$.
   (B) $\mathrm{Rg}(V) = 1$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.
   (C) V siempre es invertible.
   (D) $\mathrm{Rg}(V) = 2$ si $a = b = c$.
   (E) $\mathrm{Rg}(V) = 3$ si $b \neq a$ y $c \neq a$.
   (F) $\mathrm{Rg}(V) = 2$ si y sólo si $a \neq b$ y $a = c$.

Desarrollo.

1. Enuncie el teorema de Rouché-Frobenius.
2. Considere el sistema de ecuaciones lineales
$$(S) = \begin{cases} \alpha x + y + z = \beta, \\ x + \alpha y + z = \beta, \\ x + y + \alpha z = \beta, \end{cases}$$
donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Hallar el conjunto de valores que toman α y β para que:
   (i) (S) sea incompatible.
   (ii) (S) sea compatible indeterminado.
   (iii) (S) sea compatible determinado.

   Para las partes (ii) y (iii), indicar cuáles son los respectivos conjuntos de soluciones.

Solución.

1	2	3	4	5
F	C	E	B	A

6.16. Año 2023.

6.16.1. Primer semestre. Primer parcial-matutino: 27 Abril 2023.

Múltiple opción.

1. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones cuyas expresiones analíticas son

$$f(x) = ax + b \quad \text{y} \quad g(x) = cx^3 + dx^2 + ex,$$

donde $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ son constantes a determinar. Sabiendo que las gráficas en $\mathbb{R}^2$ de las funciones anteriores se intersectan en los puntos $(-1, 4)$, $(1, 0)$ y $(2, -2)$, entonces:

(A) $f(-2) = 6$ y $g(-2) = 2$.
(B) $f(-2) = 3$ y $g(-2) = 16$.
(C) $f(-2) = 6$ y $g(-2) = 18$.
(D) $f(-2) = -2$ y $g(-2) = 18$.

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales dado por

$$\begin{cases} 2x + y + kz = 1 \\ 2x + 4y + (k+1)z = 3 \\ 4x - y + k^2 z = 2 \end{cases}$$

donde $k \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Entonces:

(A) El sistema es compatible para todo $k \in \mathbb{R}$.
(B) El sistema es incompatible únicamente para un valor de k.
(C) El sistema es incompatible para todo $k \in \mathbb{R}$.
(D) El sistema es incompatible únicamente para dos valores de k.

3. Sea $B = (b_{ij}) \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ la matriz con coeficientes dados por

$$b_{ij} := \begin{cases} i & \text{si } i \leq j, \\ 0 & \text{si } i > j, \end{cases}$$

con $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Si $\delta(i_0, j_0) \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ es la matriz con coeficientes dados por

$$[\delta(i_0, j_0)]_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0 \text{ y } j = j_0, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con $i, j \in \{1, 2, 3\}$, entonces $\det(\delta(2,2) + B)$ es igual a:

(A) 0.
(B) 9.
(C) 7.
(D) 6.

4. Sea $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ tal que
$$A^2 - 2A + 5I_3 = 0_3,$$
. Entonces:

(A) A es invertible y $A^{-1} = \frac{1}{5}(2I_3 - A)$.

(B) A es invertible y $A^{-1} = \frac{1}{5}(A - 2I_3)$.

(C) A es invertible y $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - 2I_3)$.

(D) A no es invertible.

5. Sea $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{4\times 4}$ la matriz definida como el producto
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
Entonces, $\det(A)$ es igual a:

(A) -10.

(B) 10.

(C) 7.

(D) -7.

6. Sean $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ matrices cuadradas tales que
$$\det(2A) = 64, \quad \det(A^2 + 2AB) = 32, \quad \text{y} \quad \det(A^2 + 2AB - 2BA - 4B^2) = 24.$$
Entonces, $\det(A - 2B)$ es igual a:

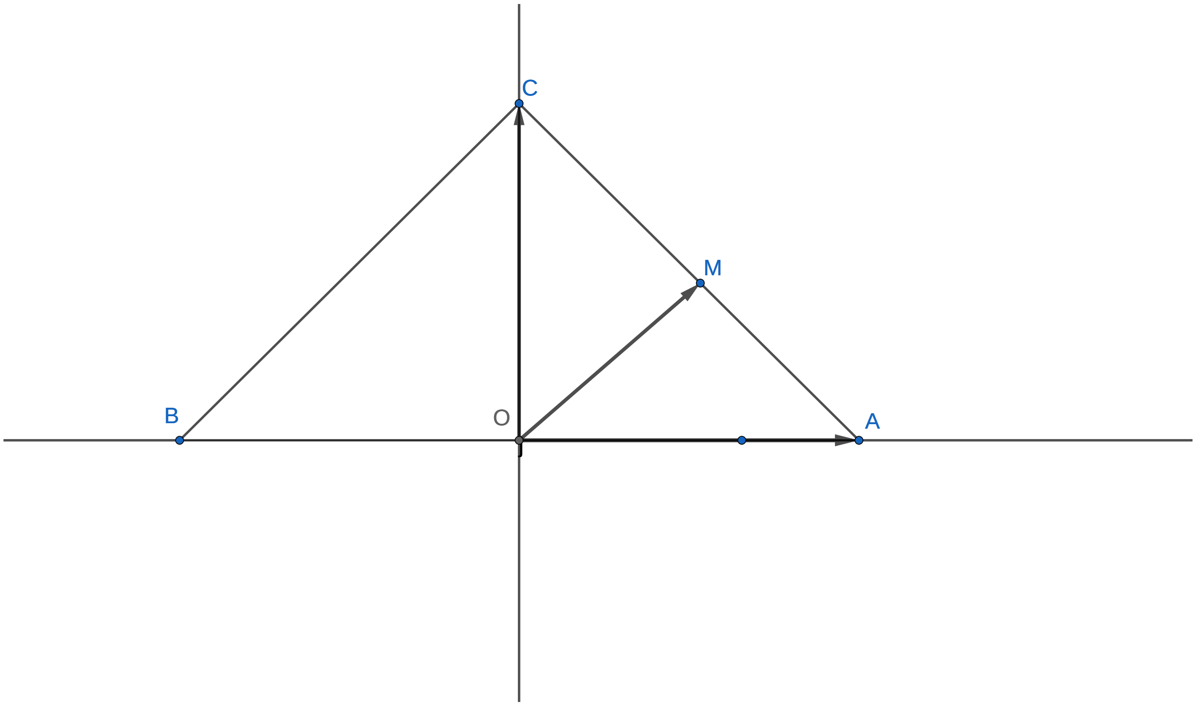
(A) 8.

(B) 12.

(C) 6.

(D) 4.

7. La figura muestra un triángulo equilátero ABC en $\mathbb{R}^2$, donde $O = (0,0)$, y los ejes punteados son los ejes coordenados.



Si M es el punto medio del lado $\overrightarrow{AC}$, entonces $\overrightarrow{OM}$ puede expresarse como:

(A) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$.

(B) $\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})/2$.

(C) $\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$.

(D) $\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA})/2$.

8. Considere la recta r en $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $A = (1, 2, 3)$ y $B = (4, 1, -3)$. Entonces, respecto a los puntos $C = (7, 0, -9)$ y $D = (-5, 5, 15)$, se puede concluir que:

(A) $C \in r$ y $D \notin r$.

(B) $C \notin r$ y $D \in r$.

(C) $C \in r$ y $D \in r$.

(D) $C \notin r$ y $D \notin r$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8
C	B	B	A	D	C	D	A

6.16.2. Primer semestre. Primer parcial-vespertino: 27 Abril 2023.

Múltiple opción.

1. Para un almuerzo en el IMERL, la dirección compró diferentes piezas de sushi: 30 de Philadelphia, 20 de Nueva York y 50 de California. Se repartirán en diferentes tablas de 8, 12 y 24 unidades como se describe a continuación:

    - La tabla Lagrange tiene: 4 piezas de Philadelphia, 3 de Nueva York y 5 de California.
    - La tabla Hausdorff tiene: 2 piezas de Philadelphia, 1 de Nueva York y 5 de California.
    - La tabla Gauss contiene: 6 piezas de Philadelphia, 3 de Nueva York y 15 de California.
    - La tabla Kolmogorov tiene: 8 piezas de Philadelphia, 6 de Nueva York y 10 de California.

    Si se quieren armar tablas de sushi, usando todas las piezas compradas, garantizando que haya exactamente una tabla Lagrange y al menos una tabla de cada tipo restante dentro de la lista anterior, entonces la cantidad de tablas de cada tipo corresponde a:

    (A) 1 Lagrange, 2 Hausdorff, 2 Gauss, 1 Kolmogorov.
    (B) 1 Lagrange, 2 Hausdorff, 2 Gauss, 2 Kolmogorov.
    (C) 1 Lagrange, 1 Hausdorff, 2 Gauss, 2 Kolmogorov.
    (D) 1 Lagrange, 2 Hausdorff, 1 Gauss, 2 Kolmogorov.

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales dado por

$$\begin{cases} 3x + k^2y + z = 1 \\ 3x + 4y + z = 4 \\ 6x + 8y + kz = 3 \end{cases}$$

    donde $k \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Entonces:

    (A) (S) es compatible para todo $k \in \mathbb{R}$.
    (B) (S) es incompatible únicamente para un valor de k.
    (C) (S) es incompatible para todo $k \in \mathbb{R}$.
    (D) (S) es incompatible únicamente para dos valores de k.

3. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ la matriz con coeficientes dados por $a_{ij} := i + j$ con $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Si $\delta(i_0, j_0) \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ es la matriz con coeficientes dados por

$$\begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0 \text{ y } j = j_0, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

    con $i, j \in \{1, 2, 3\}$, entonces $\operatorname{tr}(A \cdot \delta(1, 1))$ (la traza de $A \cdot \delta(1, 1)$) es igual a:

    (A) 3.
    (B) 4.
    (C) 2.

(D) 0.

4. Para la matriz fila $U = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$, considere la matriz

$$H = I_3 - 2U^tU.$$

Entonces:

(A) H antisimétrica pero no invertible.

(B) H es simétrica e invertible.

(C) H antisimétrica e invertible.

(D) H es simétrica pero no invertible.

5. Sea $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{5\times 5}$ la matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces, $\det(A)$ (el determinante de A) es igual a:

(A) 2.

(B) -2.

(C) 6.

(D) -6.

6. Sean $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ matrices tales que $\det(A) = 1$, $\det(B) = 3$ y $\det(B^3A^3B^{-1} + B^4A^2B^{-1}) = 36$. Entonces, $\det(A + B)$ (el determinante de $A + B$) es igual a:

(A) 2.

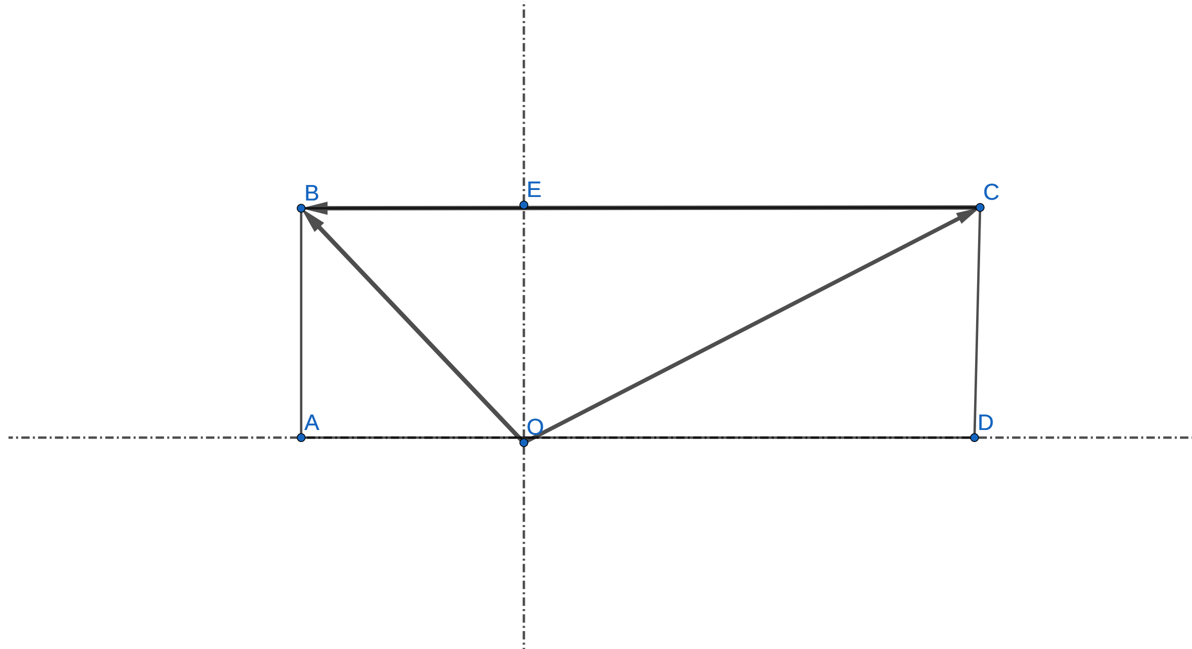
(B) 4.

(C) 12.

(D) 8.

7. La figura muestra un rectángulo $ABCD$ en $\mathbb{R}^2$, donde $O = (0, 0)$, y los ejes punteados son los ejes coordenados.

Si E es el punto de intersección entre el eje coordenado vertical y el lado BC, entonces $\overrightarrow{OB}$ puede expresarse como:



(A) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EB}$.

(B) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EB}$.

(C) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EB}$.

(D) $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EB}$.

8. Considere en $\mathbb{R}^3$ la recta r_1 con dirección $\mathbf{u}_1 = (3, -1, -6)$ y que pasa por el punto $P_1 = (-5, 4, 15)$, y la recta r_2 con dirección $\mathbf{u}_2 = (-6, 2, 12)$ y que pasa por el punto $P_2 = (-2, 3, 9)$. Entonces, se puede concluir que:

   (A) r_1 y r_2 son la misma recta.

   (B) r_1 y r_2 no son paralelas y tienen un punto en común.

   (C) r_1 y r_2 no son paralelas y no tienen puntos en común.

   (D) r_1 y r_2 son paralelas y no tienen puntos en común.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8
D	D	C	B	A	B	C	A

6.16.3. Segundo semestre. Primer parcial: 16 Septimebre 2023.

Múltiple opción.

1. En un depósito hay tres cajas que juntas pesan 18 kg. Las dos más pequeñas juntas pesan igual que la más grande. Se sabe además que el peso de la más grande es el triple de la diferencia entre los pesos de las otras dos. ¿Cuánto pesa la caja más grande?

(A) 7 kg.
(B) 9 kg.
(C) 10 kg.
(D) 12 kg.
(E) 15 kg.

2. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ x + 2(a-1)y + 2z = 4 \\ (a-2)y + az = 5 \end{cases}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

El sistema es:

(A) Compatible indeterminado para $a = 0$ y $a = 1$, incompatible para $a = 2$, y compatible determinado para los otros a.
(B) Incompatible para $a = 1$ y $a = 2$, y compatible determinado para los otros a.
(C) Incompatible para $a = 0$, compatible indeterminado para $a = 1$ y $a = 2$, y compatible determinado para los otros a.
(D) Compatible indeterminado para $a = 1$, y compatible determinado para los otros a.
(E) Incompatible para $a = 1$, compatible indeterminado para $a = 2$, y compatible determinado para los otros a.

3. Para $a = 3$, sea S el conjunto solución del sistema anterior. Entonces:

(A) $S = \emptyset$.
(B) $S = \{(-1, 4, 3)\}$.
(C) $S = \{(-6, 2, 1)\}$.
(D) $S = \{(-1, 4, 3), (-6, 2, 1)\}$.
(E) $S = \{(-6 + 5z, 2 + 2z, 2z) : z \in \mathbb{R}\}$.

4. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de A es

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.

(E) 4.

5. El determinante de A es

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.
(E) 4.

6. Sea $B = A + A^t$. Entonces

(A) B no es invertible.
(B) B es invertible y la última fila de B^{-1} es $\begin{bmatrix}-2 & 1/2 & 6/13 & 0\end{bmatrix}$.
(C) B es invertible y la última fila de B^{-1} es $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & -2/3\end{bmatrix}$.
(D) B es invertible y la última fila de B^{-1} es $\begin{bmatrix}0 & 2/13 & 3/13 & -2/13\end{bmatrix}$.
(E) B es invertible y la última fila de B^{-1} es $\begin{bmatrix}1/6 & 2/3 & -2 & -2/3\end{bmatrix}$.

7. Se consideran las siguientes rectas:

$$r_1 : \begin{cases} x + y = 3 \\ z = 2 \end{cases} \quad , \quad r_2 : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Las rectas r_1 y r_2

(A) Se cortan y son perpendiculares.
(B) Se cortan pero no son perpendiculares.
(C) Son paralelas.
(D) No se cortan y no son paralelas.
(E) Son iguales.

8. Sea π el plano que contiene a r_2 y al punto $(1, 2, 3)$. Un vector normal de π es

(A) $(1, -1, 0)$.
(B) $(2, 3, 1)$.
(C) $(1, 1, -1)$.
(D) $(5, -4, 1)$.
(E) $(7, -5, 1)$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8
B	B	C	D	A	D	A	A

6.17. Año 2024.

6.17.1. Primer semestre. Primer parcial: 27 Abril 2024.

Múltiple opción.

Ejercicio 1.

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 3 & a+1 \\ -1 & 1 & 1 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

Pregunta 1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?

(A) Existen infinitos valores de a para los cuales $\text{rango}(A) = 3$, pero existe un único valor de a para el cual $\text{rango}(A) = 2$.

(B) Existe un único valor de a para el cual $\text{rango}(A) = 3$, pero existen infinitos valores de a para los cuales $\text{rango}(A) = 2$.

(C) No existen valores de a para los cuales $\text{rango}(A) = 3$, pero sí existen infinitos valores de a para los cuales $\text{rango}(A) = 2$.

(D) Existen infinitos valores de a para los cuales $\text{rango}(A) = 3$, pero existen exactamente dos valores de a para los cuales $\text{rango}(A) = 2$.

(E) Existe un único valor de a para el cual $\text{rango}(A) = 1$, pero existen infinitos valores de a para los cuales $\text{rango}(A) = 3$.

Pregunta 2: Para $a = 1$, considerar el sistema de ecuaciones

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Entonces, el valor de z es:

(A) -2

(B) $\dfrac{5}{3}$

(C) $-\frac{7}{3}$

(D) 2

(E) $-\frac{5}{3}$

Pregunta 3: Considerar la matriz

$$B = \begin{pmatrix} a-1 & 3 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ a & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, $\det((A-B)^t(A+B))$ es:

(A) 0

(B) $192a$

(C) $96a$

(D) $-192a$

(E) -32

Ejercicio 2.

Se consideran el plano π dado por la ecuación $(b+1)x+(b-1)y+2z=b+2$, donde $b\in\mathbb{R}$, y la recta r:

$$\begin{cases} x=-\lambda+1 \\ y=\lambda+1 \\ z=\lambda \end{cases}$$

Pregunta 4: ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?

(A) Existe un único valor de $b\in\mathbb{R}$ para el cual la recta r está contenida en el plano π.

(B) Para todo $b\in\mathbb{R}$, se tiene que $r\cap\pi=\emptyset$.

(C) Existe un único valor de $b\in\mathbb{R}$ para el cual $r\cap\pi=P$, donde P es un punto.

(D) Para todo $b\in\mathbb{R}$, se tiene que $r\cap\pi=P$, donde P es un punto que depende de b.

(E) Para todo $b\in\mathbb{R}$, la recta r está contenida en el plano π.

Pregunta 5: Considerando $b=0$ y π' el plano que contiene a r y pasa por el punto $(1,0,0)$. Entonces, los planos π y π' son:

(A) No se cortan.

(B) Son iguales.

(C) Se cortan en la recta s:

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-\lambda+1 \end{cases}$$

(D) Se cortan en la recta s:

$$\begin{cases} 2x-2y=3 \\ 4z=1 \end{cases}$$

(E) Se cortan en la recta s:

$$\begin{cases} x=-\lambda+4 \\ y=\lambda \\ z=\lambda-5 \end{cases}$$

Ejercicio 3.

Considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$$

y $B = (b_{ij})$ la matriz inversa de A.

Pregunta 6: $b_{31}b_{32}$ es:

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $-\frac{1}{4}$

(C) $-\frac{1}{2}$

(D) 0

(E) $\frac{1}{2}$

Ejercicio 4.

Sean $\langle , \rangle$ el producto escalar y $\| \ \|$ la norma en $\mathbb{R}^3$. Considerar las siguientes afirmaciones:
1. $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ para todos $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.
2. $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ para todos $u, v \in \mathbb{R}^3$.
3. $\langle u+v, u-v\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$ para todos $u, v \in \mathbb{R}^3$.

Pregunta 7: Indicar la opción correcta:

(A) Todas las afirmaciones son verdaderas.

(B) Solo las afirmaciones 1. y 2. son verdaderas.

(C) Ninguna de las afirmaciones es verdadera.

(D) Solo las afirmaciones 1. y 3. son verdaderas.

(E) Solo la afirmación 1. es verdadera.

Ejercicio 5.

Considerar la recta r:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Pregunta 8: El plano perpendicular a r que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ es:

(A) $x - y = 0$.

(B) $x - y + z = 1$.

(C) $2y + z = 3$.

(D) $x + y = 2$.

(E) $x + y + z = 3$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8
D	A	D	A	C	B	D	A

Ejercicio 1.

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 3 & a+1 \\ -1 & 1 & 1 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

Pregunta 1: ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?

(D) Existen infinitos valores de a para los cuales $\mathbf{rango(A) = 3}$, pero existen exactamente dos valores de a para los cuales $\mathbf{rango(A) = 2}$.

Solución: Primero realizamos la siguiente sucesión de transformaciones elementales:

1. $F_1 \leftarrow F_1 - F_2$
2. $F_1 \leftarrow F_1 - F_3$
3. $F_2 \leftarrow F_2 + aF_1$

y obtenemos una matriz de la forma: $E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & a+2 & a-1 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$. Observamos que la matriz E está escalerizada siempre que $a \neq -2$. A partir de aquí analizamos los siguientes casos.

Caso 1: $a = -2$. En este caso la matriz E tiene la forma: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Realizamos la operación elemental $F_3 \leftarrow F_3 - \frac{1}{3}F_2$ y obtenemos la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ que tiene dos escalones, es decir, el rango de A es 2.

Caso 2: $a = -1$. En este caso la matriz E está escalerizada y tiene la forma: $E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Luego E tiene dos escalones, por lo que el rango de A es 2.

Caso 3: $a \neq -1, a \neq -2$. En este caso la matriz E está escalerizada y tiene 3 escalones. Luego el rango de A es 3.

Pregunta 2: Para $a = 1$, considerar el sistema de ecuaciones $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Entonces el valor de z es:

(A) -2.

Solución: Primero hallamos la matriz inversa de A mediante el método de Rouché-Frobenius. Para eso realizamos las siguientes transformaciones elementales:

1. $F_1 \leftrightarrow F_3$

2. $F_2 \leftarrow F_2 + F_1$

3. $F_3 \leftarrow F_3 + (-1)F_2$

4. $F_2 \leftarrow \frac{1}{2}F_2$

5. $F_3 \leftarrow \frac{1}{3}F_3$

6. $F_1 \leftarrow F_1 + F_3$

7. $F_1 \leftarrow F_1 + (-2)F_2$

Obtenemos que la matriz A^{-1} es igual a: $\begin{pmatrix} 1/2 & -7/6 & -1/6 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Luego, $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ si y sólo si $A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Realizamos el producto y nos da $z = -2$.

Pregunta 3: Considerar la matriz $B = \begin{pmatrix} a-1 & 3 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ a & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Entonces $\mathbf{det}\big((A-B)^t(A+B)\big)$ es: **(D)** $-192a$.

Solución: Primero hallamos las matrices $A+B$ y $A-B$:

$$A + B = \begin{pmatrix} a-1 & 3 & a+1 \\ -1 & 1 & 1 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-1 & 3 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ a & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-2 & 6 & 2a+1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2a & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $\mathbf{det}(A+B) = 24a$. Por otro lado $A - B$ es igual a:

$$A - B = \begin{pmatrix} a-1 & 3 & a+1 \\ -1 & 1 & 1 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a-1 & 3 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ a & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego $\mathbf{det}(A-B) = -8$. Finalmente:
$\mathbf{det}\big((A-B)^t(A+B)\big) = \mathbf{det}\big((A-B)^t\big)\,\mathbf{det}\big(A+B\big) = \mathbf{det}\big(A-B\big)\,\mathbf{det}\big(A+B\big) = (24a)(-8) = -192a.$

Ejercicio 2.

Se consideran el plano $\pi : (b+1)x + (b-1)y + 2z = b+2$, donde $b \in \mathbb{R}$ y la recta

$$r : \left\{ \begin{array}{rcrl} x & = & - & \lambda + 1 \\ y & = & & \lambda + 1 \\ z & = & & \lambda \end{array} \right.$$

Pregunta 4: ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?

(A) Existe un único valor de $b \in \mathbb{R}$ para el cual la recta r está contenida en el plano π.

Resolución: Observamos que $r \subset \pi$ si y sólo si $(b+1)(-\lambda+1)+(b-1)(\lambda+1)+2\lambda = b+2$. Desarrollamos la ecuación arriba, y obtenemos: $b=2$. Es decir, $b=2$ si y solo si r está contenida en el plano π.

Pregunta 5: Considerar $b=0$ y π' el plano que contiene a r y pasa por el punto $(1,0,0)$. Entonces los planos π y π'

(C) se cortan en la recta $s : \begin{cases} x &= & \lambda \\ y &= - & \lambda \\ z &= - & \lambda+1 \end{cases}$

Solución: Para $b=0$, el plano π tiene la ecuación reducida: $x-y+2z=2$. Por otro lado vamos a hallar una ecuación paramétrica del plano π'. Para eso, tomamos dos puntos distintos de la recta r (cualquier par de puntos distintos sirve). Para hallar dichos puntos, tomamos los valores $\lambda=0$ y $\lambda=1$ en la ecuación reducida de r, y obtenemos los puntos $B=(1,1,0)$ y $C=(0,2,1)$ respectivamente. Denotamos por A al punto $(1,0,0)$. Luego, $X \in \pi'$ si y sólo si $X = A+\lambda(B-A)+\mu(C-A)$ para algún valor de λ y μ reales. Notar que: $(B-A)=(0,1,0)$ y $(C-A)=(-1,2,1)$. Para hallar la forma reducida de π' resolvemos la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y & 1 & 2 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

y obtenemos $\pi' : x+z=1$. Para hallar la intersección entre π y π' resolvemos el sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas:

$$S : \begin{cases} x-y+2z &= 2 \\ x+z &= 1 \end{cases}$$

El conjunto solución de este sistema es: $\mathrm{Sol}(S) = \{(-z+1, z-1, z) : z \in \mathbb{R}\}$ que depende de un parámetro, luego $\pi \cap \pi'$ es una recta que denotamos por r'. El vector director de r' es $(-1,1,1)$, por lo que las únicas opciones posibles (hasta aquí) son (C) y (E). Finalmente para chequear cual de las dos opciones es la correcta, basta con tomar un punto de cada una de las dos rectas de las opciones (C) y (E), y chequear cuál de los dos pertenece a r'. Por ejemplo el punto $(0,0,1)$ pertenece a la recta de la opción (C) y a la recta r', por lo que obtenemos la opción (C).

Ejercicio 3.

Considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$$

y $B=(b_{ij})$ la matriz inversa de A.

Pregunta 6: $b_{31}b_{32}$ es: **(B)** $-\dfrac{1}{4}$.

Solución: Hallamos la matriz A^{-1} mediante el método de Rouché-Frobenius. Para eso realizamos la siguiente sucesión de transformaciones elementales:

1. $F_2 \leftrightarrow F_3$.
2. $F_3 \leftarrow F_3 - F_1$.
3. $F_3 \leftarrow -\frac{1}{2}F_3$.

4. $F_1 \leftarrow F_1 - F_2$

5. $F_1 \leftarrow F_1 - F_3$

Obtenemos que la matriz $B = A^{-1}$ es igual a: $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ por lo que $b_{31}b_{32} = (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$.

Ejercicio 4.

Sean $\langle\ ,\ \rangle$ el producto escalar y $\|\ \|$ la norma en $\mathbb{R}^3$. Considerar las siguientes afirmaciones:

1. $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ para todos $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.
2. $\| u+v \|^2 = \| u \|^2 + \| v \|^2$ para todos $u, v \in \mathbb{R}^3$.
3. $\langle u+v, u-v\rangle = \| u \|^2 - \| v \|^2$ para todos $u, v \in \mathbb{R}^3$.

Pregunta 7: Indicar la opción correcta:

(D) Sólo las afirmaciones 1. y 3. son verdaderas.

Solución: La afirmación 1 es verdadera porque el producto escalar es lineal. La afirmación 2 es falsa, la igualdad se da, solo cuando u y v son colineales. La afirmación 3 es verdadera, porque el producto escalar es lineal y conmutativo:

$$\langle u+v, u-v\rangle = \langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle - \langle v, v\rangle = \langle u, u\rangle - \langle v, v\rangle = \| u \|^2 - \| v \|^2 .$$

Ejercicio 5.

Considerar la recta

$$r : \begin{cases} x+y &= 2 \\ z &= 1 \end{cases}$$

Pregunta 8: El plano perpendicular a r que pasa por el punto $(1,1,1)$ es:

(A) $x - y = 0$.

Solución: Primero hallamos una forma paramétrica de la recta r para obtener su vector director. Para eso, resolvemos el sistema de ecuaciones dado por la recta r:

$$S : \begin{cases} x+y &= 2 \\ z &= 1 \end{cases}$$

Luego, $\mathrm{Sol}(S) = \{(x, -x+2, 1) : x \in \mathbb{R}\}$. El vector $(1,-1,0)$ es director de la recta r. Como el plano buscado π tiene que ser perpendicular a r, podemos tomar como vector normal de π a $(1,-1,0)$. Luego la ecuación reducida del plano π es de la forma: $\pi : x - y = d$ con $d \in \mathbb{R}$. Para hallar el valor de d, tenemos que usar la hipótesis de que el punto $(1,1,1,)$ pertenece a π. Luego, $(1,1,1) \in \pi$ si y solo si $d = 0$. El plano buscado es $\pi : x - y = 0$.

Parte II

Introducción a los espacios vectoriales.

Esta segunda parte del curso aborda los temas de espacios vectoriales y transformaciones lineales. Al igual que en la primera parte, se incluyen evaluaciones correspondientes al segundo parcial desde el año 2008. Al final de esta segunda parte, los estudiantes deben alcanzar los siguientes objetivos:

- Determinar si un conjunto de vectores con dos operaciones forma un espacio vectorial y reconocer ejemplos estándar de espacios vectoriales.
- Identificar los subconjuntos de un espacio vectorial que sean subespacios vectoriales.
- Verificar si un conjunto S de vectores en un espacio vectorial V es un conjunto generador de V.
- Determinar si un conjunto de vectores en V es linealmente independiente o dependiente.
- Identificar si un espacio vectorial es de dimensión finita o infinita.
- Determinar si una función de un espacio vectorial a otro es una transformación lineal.
- Encontrar el núcleo, la imagen y sus respectivas dimensiones de una transformación lineal T.
- Determinar si una transformación lineal es inyectiva o sobreyectiva.
- Identificar si dos espacios vectoriales son isomorfos.
- Determinar si una transformación lineal es invertible y encontrar su inversa, si existe.
- Encontrar la matriz de representación de una transformación lineal en relación con una base no estándar.

CAPÍTULO 7

ESPACIOS VECTORIALES.

La idea central de esta primera sección es presentar el concepto formal de un espacio vectorial. Este se define como un conjunto de elementos denominados vectores, y dos operaciones: una operación interna, generalmente llamada suma, y otra que involucra la multiplicación de estos vectores por escalares. En las secciones siguientes, consideraremos que los escalares son números reales. Sin embargo, la teoría que desarrollaremos puede abordarse de manera más abstracta al suponer que los escalares provienen de un conjunto cualquiera que satisface ciertos axiomas y que recibe el nombre de cuerpo o campo. En esta sección, formalizaremos el concepto de cuerpo y enunciaremos la definición de un espacio vectorial sobre un cuerpo arbitrario.

7.1. Cuerpos.

Definición 7.1 *Un conjunto no vacío $\mathbb{K}$ dotado de dos operaciones internas llamada suma y producto se denomina un **cuerpo** y se denota por $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ si cumple con las siguientes propiedades:*

1. *Cerradura bajo suma: Para todo $a, b \in \mathbb{K}$, la suma $a + b$ también pertenece a $\mathbb{K}$.*

2. *Cerradura bajo multiplicación: Para todo $a, b \in \mathbb{K}$, el producto ab también pertenece a $\mathbb{K}$.*

3. *Conmutatividad de la suma: Para todo $a, b \in \mathbb{K}$, se cumple que $a + b = b + a$.*

4. *Conmutatividad del producto: Para todo $a, b \in \mathbb{K}$, se cumple que $ab = ba$.*

5. *Asociatividad de la suma: Para todo $a, b, c \in \mathbb{K}$, se cumple que $(a + b) + c = a + (b + c)$.*

6. *Asociatividad del producto: Para todo $a, b, c \in \mathbb{K}$, se cumple que $(ab)c = a(bc)$.*

7. *Existencia de elemento neutro aditivo: Existe un elemento en $\mathbb{K}$, denotado como 0, tal que para todo $a \in \mathbb{K}$ se cumple que $a + 0 = a$.*

8. *Existencia de elemento neutro multiplicativo: Existe un elemento en $\mathbb{K}$, denotado como 1, tal que para todo $a \in \mathbb{K}$ se cumple que $a \cdot 1 = a$.*

9. *Existencia del inverso aditivo: Para cada $a \in \mathbb{K}$, existe un elemento en $\mathbb{K}$, denotado como $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.*

10. *Existencia del inverso multiplicativo: Para cada $a \in \mathbb{K}$, distinto de 0, existe un elemento en $\mathbb{K}$, denotado como a^{-1}, tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.*

11. *Ley distributiva: Para todo $a, b, c \in \mathbb{K}$, se cumple que $a(b + c) = ab + ac$.*

Ejemplo 7.1 *Mencionaremos ejemplos representativos de cuerpos. La verificación de los axiomas enunciados anteriormente queda a cargo del lector.*

1. *El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, equipado con las operaciones usuales de suma y producto, forma un cuerpo.*

2. *El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, que consiste en números de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son enteros y $q \neq 0$, también es un cuerpo. Las operaciones usuales de suma y producto de reales se aplican en este conjunto.*

3. *El conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$, representados como $a + ib$, donde a y b son números reales y i es la unidad imaginaria ($i^2 = -1$), es un cuerpo. Las operaciones usuales de suma y producto en los números complejos son:*

$$\text{Suma: } (a + ib) + (c + id) = (a + c) + (b + d)i$$
$$\text{Producto: } (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

7.1.1. Cuerpos finitos. (Opcional)

En los ejemplos anteriores, los conjuntos están formados por una cantidad infinita de elementos. Sin embargo, existen cuerpos formados por una cantidad finita de elementos. Los ejemplos más sencillos de cuerpos finitos, que son empleados esencialmente en teoría de números, se forman de la siguiente manera.

Consideremos un número natural n cualquiera, diferente de 1. Los números enteros a y b se llaman **congruentes módulo** n[1], y se denotan como $a \equiv b \pmod{n}$, si a y b tienen el mismo residuo cuando se dividen por n. En otras palabras, $a \equiv b \pmod{n}$ si y solo si $(a - b)$ es un múltiplo entero de n, es decir, si su diferencia es divisble por n. Este concepto de congruencia es fundamental en la teoría de números. Notemos que dos números a y b son congruentes módulo n si al dividirlos por n dan el mismo residuo.

Por ejemplo,

- $11 \equiv 6 \pmod{5}$, ya que ambos dejan un residuo de 1 al dividirse por 5.
- $26 \equiv 11 \pmod{5}$, ya que ambos dejan un residuo de 1 al dividirse por 5.
- $14 \equiv 2 \pmod{3}$, ya que ambos dejan un residuo de 2 al dividirse por 3.

Utilizando la idea de congruencia, podemos construir cuerpos finitos. Dos ejemplos notables son:

Construcción de $\mathbb{Z}_2$: Cuerpo de dos elementos o el cuerpo más pequeño.

El cuerpo finito más pequeño se denota como $\mathbb{Z}_2$. Este cuerpo consta de dos elementos distintos: [0], que actúa como el elemento neutro en la adición, y [1], que actúa como el elemento neutro en la multiplicación.

Intuitivamente, en $\mathbb{Z}_2$ agrupamos todos los enteros en dos conjuntos: [0] representa los enteros pares, y [1] representa los enteros impares. Esto se hace asociando en [0] a todos los enteros cuya división por 2 produce un residuo igual a cero, y en [1] a aquellos cuya división por 2 produce un residuo igual a uno.

[1] Ver Capítulo Preliminares.

Cuerpo Finito $\mathbb{Z}_3$.

El cuerpo finito $\mathbb{Z}_3$ consta de tres elementos distintos: [0], [1], y [2]. En $\mathbb{Z}_3$, agrupamos los enteros en tres conjuntos:

- [0] representa los enteros que son múltiplos de 3.
- [1] representa los enteros que, al dividirlos por 3, dejan un residuo de 1.
- [2] representa los enteros que, al dividirlos por 3, dejan un residuo de 2.

En otras palabras, [0] contiene los múltiplos de 3, [1] contiene enteros de la forma $3k+1$, donde k es un entero, y [2] contiene enteros de la forma $3k+2$. Abusando un poco de la notación, a menudo identificamos [0] con 0, [1] con 1, y [2] con 2.

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Estas tablas muestran cómo se suman y multiplican los elementos en $\mathbb{Z}_3$. Podemos notar que estas operaciones satisfacen los axiomas de cuerpo.

Observación 7.1 *Conjuntos que no son cuerpos.*

- *Existen conjuntos que no cumplen con los axiomas de un cuerpo. Por ejemplo, consideremos el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$. En este conjunto, todos los elementos diferentes de 1 no tienen inverso multiplicativo.*
- *Otro ejemplo es el conjunto de los enteros positivos $\mathbb{Z}^+$. En este conjunto, todos los elementos carecen de un opuesto aditivo.*
- *Incluso en el conjunto de todas las matrices cuadradas de tamaño 2×2, equipado con las operaciones usuales de suma y multiplicación de matrices, no todas las matrices no nulas tienen una inversa.*

7.2. Espacios vectoriales.

Definición 7.2 *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Un conjunto V dotado de dos operaciones:*

$$\begin{array}{cc} + : V \times V \to V & \cdot : \mathbb{K} \times V \to V \\ (v_1, v_2) \to v_1 + v_2 & (\lambda, v) \to \lambda \cdot v \end{array}$$

*llamadas suma y producto por escalar respectivamente, es un $\mathbb{K}$-**espacio vectorial** si además satisface las siguientes propiedades:*

V1. Conmutatividad de la suma: $u + v = v + u$ para todo $u, v \in V$.

V2. Asociatividad de la suma: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todo $u, v, w \in V$.

V3. Existencia de un elemento neutro para la suma: Existe un vector nulo, llamado el elemento neutro de la suma, denotado por $\mathbf{0}$, tal que $u + \mathbf{0} = u$ para todo $u \in V$.

V4. Existencia de un opuesto aditivo: Para todo vector $v \in V$ existe el ***vector opuesto****, denotado por $-v$, tal que $u + (-1)v = \mathbf{0}$.*

V5. Distributividad 1: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y para todo $u, v \in V$.

V6. Distributividad 2: $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y para todo $v \in V$.

V7. Asociatividad del producto: $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y para todo $v \in V$.

V8. Para todo vector $v \in V$, $1v = v$, donde 1 es la unidad de $\mathbb{K}$

Algunos comentarios y consecuencias de la definición anterior son:

1. A los elementos de un espacio vectorial se les llama **vectores**. La definición es lo suficientemente general como para permitir espacios vectoriales de objetos diversos, siempre y cuando en ese conjunto de objetos exista una operación de suma y una operación de producto por escalar, y los objetos o vectores satisfagan las propiedades V1-V8. Esto significa que podemos tener espacios vectoriales que contengan elementos como matrices, funciones, polinomios, entre otros.

2. Las funciones $+$ y $\cdot$ toman valores en V, lo cual indica que dichas operaciones son cerradas en el espacio vectorial. Con esto se garantiza que cada vez que sumamos dos vectores o multiplicamos un vector por un escalar, el resultado es, en ambos casos, nuevamente un elemento del espacio.

3. Para cada $\mathbb{K}$-espacio vectorial que estudiemos es importante identificar el cuerpo de escalares asociado así como las operaciones de suma y producto por escalar. La notación empleada será $V = (V, \mathbb{K}, +, \cdot)$

4. La operación de suma entre vectores se define inicialmente para cada par de vectores en el espacio vectorial V. Sin embargo, es posible extender esta operación a un número finito de vectores. Es decir, para un conjunto de n ($n \in \mathbb{N}$) vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ en el espacio vectorial V, podemos asociar un nuevo vector $v_1 + v_2 + \cdots + v_n \in V$, el cual se denomina la suma de $v_1, v_2, \cdots, v_n$.

   Esta definición de suma de varios vectores se realiza de manera inductiva, utilizando la propiedad asociativa de la suma. Es decir, podemos agrupar los vectores de diferentes maneras y realizar las sumas parciales paso a paso. Por ejemplo, si tenemos tres vectores v_1, v_2 y v_3, podemos definir la suma de los tres vectores como $(v_1 + v_2) + v_3$ o como $v_1 + (v_2 + v_3)$, y ambos resultados serán el mismo vector en V.

5. En la propiedad $V3$, se establece la existencia de un elemento neutro para la operación de suma. A este elemento se le denomina el **cero del espacio vectorial**. Es sencillo demostrar que este elemento es único. Supongamos que existen dos ceros en V, llamémoslos $\mathbf{0}_1$ y $\mathbf{0}_2$. Entonces, por definición de cero, tenemos que $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1$ y $\mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$. Sin embargo, podemos observar que $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$.

   Podemos hacer una observación análoga con respecto al inverso aditivo de cada vector en V y demostrar que también es único.

6. Usando las propiedades $V1$-$V8$, podemos deducir algunas propiedades adicionales de la multiplicación escalar. Sea v cualquier elemento del espacio vectorial y $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces también se cumple:

   - $0v = \mathbf{0}$: La multiplicación de cualquier vector por cero resulta en el vector nulo.
   - Si $\lambda v = \mathbf{0}$, entonces $\lambda = 0$ o $v = \mathbf{0}$: Si el producto de un escalar λ y un vector v es igual al vector nulo, entonces el escalar debe ser cero o el vector debe ser el vector nulo.
   - $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$: La multiplicación de cualquier escalar por el vector nulo resulta en el vector nulo.

- $(-1)v = -v$: El producto de -1 y un vector v es igual al opuesto aditivo de ese vector.

Estas propiedades pueden ser demostradas utilizando las propiedades básicas del espacio vectorial y las operaciones definidas en él, dejamos su demostración como ejercicio para el lector.

Ejemplo 7.2 *Presentamos los siguientes ejemplos que demuestran la diversidad de conjuntos que pueden clasificarse bajo este nuevo concepto. Mostraremos únicamente las operaciones de suma y multiplicación por escalar en cada caso así como el elemento neutro de la suma. Se deja como ejercicio para el lector verificar que, además, se cumplen las propiedades $V1 - V8$.*

1. *El espacio vectorial de todas matrices de tamaño $m \times n$ y entradas reales. Denotamos este espacio por $V = (\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}, \mathbb{R}, +, \cdot)$*

$$\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n} = \{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} : \ a_{ij} \in \mathbb{R}\}$$

$$+ : V \times V \to V$$

$$(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}) \to \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$. : \mathbb{R} \times V \to V$$

$$(\lambda, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}) \to \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Neutro de la suma

$$\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Si $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, *entonces* $-v = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$.

2. *El espacio vectorial de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a* n*. Denotamos este espacio como* $V = (\mathbb{R}_n[x], \mathbb{R}, +, \cdot)$*, donde* x *es la variable y* n *es un número entero no negativo.*

$$\mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n : \ a_i \in \mathbb{R}, \ i = 0, \cdots, n\}$$

Notamos que:

a) $\mathbb{R}_n[x]$ *es cerrado bajo la suma de polinomios: Si* $p(x)$ *y* $q(x)$ *son polinomios en* $\mathbb{R}_n[x]$*, entonces* $p(x)+q(x)$ *también es un polinomio con grado menor o igual que* n*, por lo tanto* $p(x)+q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$*.*

b) $\mathbb{R}_n[x]$ *es cerrado bajo la multiplicación por un escalar: Si* $p(x)$ *es un polinomio en* $\mathbb{R}_n[x]$ *y* λ *es un escalar real, entonces* $\lambda p(x)$ *es también un polinomio con grado menor o igual que* n*, por lo tanto* $\lambda p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$*.*

c) *El polinomio cero, denotado como* $0(x) = 0+0x+0x^2+\cdots+0x^n$*, es un polinomio en* $\mathbb{R}_n[x]$*. Para cada* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ *su opuesto aditivo lo denotaremos por* $-p(x)$ *y es el polinomio* $-a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_nx^n$

3. *El espacio vectorial de todos los polinomios con coeficientes reales. Denotamos a este espacio como* $V = (\mathbb{R}[x], \mathbb{R}, +, \cdot)$*.*

$$\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k : k \in \mathbb{N}, \ a_i \in \mathbb{R}, \ i = 0, \cdots, k.\}$$

Al igual que en el caso anterior el polinomio cero, denotado como $0(x)$*, es un polinomio en* $\mathbb{R}[x]$*. Es el neutro para la suma. Cada polinomio tiene su opuesto aditivo como se inidicó anteriormente.*

4. *El espacio vectorial de todas las funciones reales continuas definidas en el intervalo* $[a, b]$*. Denotamos a este espacio como* $V = (C[a, b], \mathbb{R}, +, \cdot)$*.*

$$C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}, \ f \text{ es continua en } [a, b]\}$$

a) *Cerrado bajo la suma: Para cualquier par de funciones continuas* $f(x)$ *y* $g(x)$ *en* $C[a, b]$*, la función suma* $f(x) + g(x)$ *también es continua en el intervalo* $[a, b]$*.*

b) *Cerrado bajo la multiplicación por escalar: Para cualquier función continua* $f(x)$ *en* $C[a, b]$ *y cualquier escalar* λ*, la función* $\lambda f(x)$ *es continua en el intervalo* $[a, b]$*.*

c) *Existencia del elemento neutro de la suma: Existe una función continua* $0(x)$ *(es la función que asocia a cada elemento del intervalo* $[a, b]$ *el valor cero) en* $C[a, b]$ *tal que* $f(x) + 0(x) = f(x)$ *para cualquier función continua* $f(x)$ *en* $C[a, b]$*. Para cada función continua* f *en* $C[a, b]$*, su opuesto aditivo, la dentaremos por* $-f$ *y es la función continua que a cada* x *le asigna el valor* $-f(x)$*.*

5. *El espacio vectorial de todos las* n*-uplas con entradas reales. Este espacio vectorial ya ha sido estudiado en detalle en las secciones anteriores. Lo denotaremos por* $V = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$*.*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \ x_i \in \mathbb{R} \ , \ 1 \leq i \leq n\}$$

Recordamos que las operaciones de suma y producto por escalar se definen por

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$$

El neutro para la suma en este espacio vectorial es la n*-upla* $(0, 0, \cdots, 0)$*. Para cada* n*-upla* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *su opuesto aditivo es* $(-x_1, -x_2, \cdots, -x_n)$*.*

6. *El espacio vectorial de los números reales sobre el cuerpo de los racionales. En este ejemplo estamos consideranos al conjunto de números reales como un* $\mathbb{Q}$*-espacio vectorial, esto es,* $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to x + y$$

$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$(\lambda, x) \to \lambda x$$

7. *El espacio vectorial de los números racionales sobre el cuerpo de los racionales. En este ejemplo estamos consideranos al conjunto de números racionales como un* $\mathbb{Q}$*-espacio vectorial, esto es,* $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$

$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$

$$(x, y) \to x + y$$

$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$

$$(\lambda, x) \to \lambda x$$

Observación 7.2 *A veces, cuando el cuerpo de escalares* $\mathbb{K}$ *y las operaciones de suma y producto por escalar son evidentes en el contexto, simplemente escribimos* V *en lugar de* $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$*.*

Ejemplo 7.3 *Ahora ilustremos también el caso de conjuntos que no son espacios vectoriales*

1. *El conjunto de los números naturales. Denotado por* $\mathbb{N}$*, no forma un espacio vectorial. Aunque la suma de dos números naturales es un número natural, el conjunto no cumple con la propiedad de existencia de inversos aditivos. Es decir, para cada número natural* n*, no existe otro número natural* m *tal que* $n + m = 0$*. Por lo tanto,* $\mathbb{N}$ *no es un espacio vectorial.*

2. *El conjunto de los polinomios de grado igual a 3. Este conjunto, no forma un espacio vectorial. Suma de polinomios de grado igual* 3 *no siempre es un polinomio de grado* 3*. Considere por ejemplo,* $p(x) = -x^3 + x^2 + x + 3$ *y* $q(x) = x^3 + 5$*. Entonces* $p(x) + q(x) = x^2 + x + 8$*.*

3. *El conjunto de los números racionales sobre el cuerpo de los reales. Si intentamos dotar al conjunto de números racionales de una estructura de espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$*, es decir,* $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, \mathbb{R}, +, \cdot)$*, nos encontramos con que la operación de producto por escalar no está bien definida. Para que* $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *sea un espacio vectorial, es necesario que se cumpla la condición:*

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$

$$(\lambda, x) \to \lambda x$$

Sin embargo, esta condición evidentemente no se cumple, ya que el producto de un número real por un número racional no siempre resulta en un número racional.

7.2.1. Subespacios vectoriales.

Definición 7.3 *Sea $V = (V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Un **subespacio** de V es un subconjunto W de V que, con las operaciones de suma y producto por escalar definidas en V, también forma un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$.*

Podemos verificar que un subconjunto W de V es un subespacio vectorial si cumple con los axiomas $V1-V8$ de un espacio vectorial. En otras palabras, W es un subespacio si se cumplen las siguientes condiciones:

- Para todo x e y en W, el vector $x + y$ también pertenece a W.
- El vector nulo $\mathbf{0}$ está en W.
- Para cada vector x en W, su opuesto también está en W.
- Para cada escalar λ en $\mathbb{K}$ y cada vector x en W, el vector λx está en W.

Es importante notar que las propiedades de conmutatividad y asociatividad de la suma, así como las propiedades de distributividad, no necesitan ser verificadas nuevamente, ya que estas propiedades se heredan de las operaciones definidas en el espacio vectorial V. Por lo tanto, podemos proporcionar una definición equivalente de subespacio vectorial basada en estas condiciones.

Definición 7.4 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y W un subconjunto de V. Se dice que W es un subespacio de V si cumple las siguientes condiciones:*

1. *W es cerrado bajo la operación de suma. Esto significa que para cualquier par de vectores u y v en W, la suma $u + v$ también pertenece a W.*
2. *W es cerrado bajo la multiplicación por escalar. Esto implica que para cualquier vector u en W y cualquier escalar λ, el producto λu está contenido en W.*
3. *W contiene el vector nulo $\mathbf{0}$ de V. Es decir, $\mathbf{0}$ pertenece a W.*

Esta definición también puede ser reformulada requiriendo que el subconjunto W de V sea no vacío. En este caso, existe al menos un vector x en W, y dado que W es cerrado bajo la suma y la multiplicación por escalar, podemos verificar que λx también pertenece a W para cualquier $\lambda \in \mathbb{K}$. En particular, cuando $\lambda = 0$, tenemos $0 \cdot x = \mathbf{0} \in W$. Por lo tanto, la condición de que W sea no vacío garantiza la existencia del vector nulo $\mathbf{0}$ en W. Esta condición nos permite enunciar una definición equivalente que también es ampliamente utilizada.

Definición 7.5 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y W un subconjunto no vacío de V. Diremos que W es un subespacio de V si cumple las siguientes condiciones:*

1. *W es cerrado bajo la operación de suma.*
2. *W es cerrado bajo la multiplicación por escalar.*

Nos encontramos frecuentemente con la tarea de determinar si un conjunto específico dentro de un espacio vectorial cumple con las condiciones para ser considerado un subespacio vectorial. En este contexto, podemos entoces utilizar cualquiera de las siguientes definiciones equivalentes.

Sea W un subconjunto de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. W es un subespacio de V.

2. $\mathbf{0} \in W$ y para todo $u, v \in W$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha u, u + v \in W$.

3. $W \neq \emptyset$ y para todo $u, v \in W$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha u, u + v \in W$.

4. $W \neq \emptyset$ y para todo $u, v \in W$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha u + \beta v \in W$.

Notemos que todo $\mathbb{K}$-espacio vectorial V tiene al menos dos subespacios: el subespacio $\{\mathbf{0}\}$ y el propio espacio V. A estos espacios los llamaremos **subespacios triviales de** V.

Ejemplo 7.4 *Algunos subespacios vectoriales de particular interes son:*

1. *Subespacio ortogonal a un vector dado en $\mathbb{R}^n$. Sea u un vector cualquiera en $\mathbb{R}^n$, el conjunto $\{u\}^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n : \ < u, v >= 0\}$, es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, llamado el* ***espacio ortogonal a*** *u:*

   a) *Es obvio que el vector cero $\mathbf{0}$ pertenece a $\{u\}^{\perp}$, ya que el producto escalar entre u y $\mathbf{0}$ es igual a cero.*

   b) *Sean v un vector en $\{u\}^{\perp}$ y λ un escalar en $\mathbb{R}$. Veamos que λu también pertenece a $\{u\}^{\perp}$. Para ello, evaluamos el producto escalar $< u, \lambda v >$, que es igual a $\lambda < u, v >$. Dado que v está en $\{u\}^{\perp}$, tenemos $< u, v >= 0$, por lo que $\lambda < u, v >= \lambda \cdot 0 = 0$. Por lo tanto, λu está en $\{u\}^{\perp}$.*

   c) *Si v_1 y v_2 son vectores en $\{u\}^{\perp}$, debemos demostrar que la suma $v_1 + v_2 \in \{u\}^{\perp}$. Evaluamos el producto escalar $< u, v_1 + v_2 >$. Utilizando las propiedades del producto escalar, obtenemos $< u, v_1 + v_2 >=< u, v_1 > + < u, v_2 >$. Dado que v_1 y v_2 están en $\{u\}^{\perp}$, tenemos $< u, v_1 >= 0$ y $< u, v_2 >= 0$. Por lo tanto, $< u, v_1 + v_2 >= 0 + 0 = 0$, lo que implica que $v_1 + v_2 \in \{u\}^{\perp}$.*

2. *Subespacios de $V = \mathbb{R}[x]$. Para cada número natural n, notamos que $W = \mathbb{R}_n[x]$ es un subespacio de $\mathbb{R}[x]$.*

3. *Subespacios en el espacio de funciones reales. Consideremos el espacio vectorial real $\mathcal{F}$ compuesto por funciones reales de una variable, es decir, $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. A continuación, definimos los siguientes conjuntos:*

   W_1: El conjunto de funciones polinomiales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
   W_2: El conjunto de funciones diferenciables de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
   W_3: El conjunto de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
   W_4: El conjunto de funciones integrables de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

   Es importante notar que $W_1 \subset W_2 \subset W_3 \subset W_4 \subset \mathcal{F}$. Dejamos la verificación de que W_i es un subespacio de $\mathcal{F}$ para $i = 1, 2, 3, 4$ como ejercicio para el lector. Además, podemos afirmar que W_i es un subespacio de W_j siempre que $i \leq j$.

4. *Subespacios no triviales de $\mathbb{R}^2$. Sea W un subespacio no trivial de $\mathbb{R}^2$, esto es $(0,0) \subsetneq W \subsetneq \mathbb{R}^2$, entonces W es una recta que pasa por el $(0,0)$, es decir W es de la forma*

   $$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$$

   donde a y b son números reales no simultaneamente nulos.

   En efecto, si $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$ con a y b no simultaneamente nulos es fácil verificar que W es un subespacio no trivial de $\mathbb{R}^2$.

   Ahora mostremos que todos los subespacios no triviales de $\mathbb{R}^2$ son precisamente de esta forma. Como W es no vacío, consideramos un vector $(x_1, y_1) \in W$, además podemos suponer que al ser no trivial, el vector $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$. Por lo tanto, alguna de sus componentes es diferente de cero, supongamos sin pérdidad de generalidad que $y_1 \neq 0$.

   Afirmamos que

   $$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y_1 x - x_1 y = 0\}$$

- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y_1x - x_1y = 0\} \subseteq W$: *Sea* $(x_0, y_0) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y_1x - x_1y = 0\}$, *entonces* $y_1x_0 - x_1y_0 = 0$. *Recordamos que asumimos que* $y_1 \neq 0$. *Entonces,* $x_0 = \dfrac{x_1}{y_1}y_0$. *Por lo tanto,*

$$(x_0, y_0) = (\frac{x_1}{y_1}y_0, y_0) = y_0(\frac{x_1}{y_1}, 1) = y_0(\frac{x_1}{y_1}, \frac{y_1}{y_1}) = \frac{y_0}{y_1}(x_1, y_1)$$

  Como $(x_1, y_1) \in W$, *cualquier múltiplo de él también está en* W. *Por lo tanto* $\dfrac{y_0}{y_1}(x_1, y_1) \in W$. *En consecuencia,* $(x_0, y_0) \in W$.

- $W \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y_1x - x_1y = 0\}$: *Queda como ejercicio para el lector interesado.*

5. *Subespacios no triviales de* $\mathbb{R}^3$. *Podemos verificar que los siguientes subconjuntos de* $\mathbb{R}^3$ *son subespacios no triviales:*

   a) $S_1 = \{(x,y,z) : x(t) = at, y(t) = bt, z(t) = ct, t \in \mathbb{R}, (a,b,c) \neq (0,0,0))\}$.

   b) $S_2 = \{(x,y,z) : ax + by + cz = 0, (a,b,c) \neq (0,0,0)\}$.

   Estos representan una recta y un plano en $\mathbb{R}^3$ *que contienen al* $(0,0,0)$. *Más adelante demostraremos, como en el ejemplo anterior, que los únicos subespacios no triviales de* $\mathbb{R}^3$ *tienen precisamente esta estructura.*

6. *El subespacio de las matrices simétricas de* $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$. *En fecto, si* A *y* B *son matrices simétricas y* $\lambda \in \mathbb{R}$, *entonces* $A + \lambda B$ *es una matriz simétrica. La matriz nula también es simétrica.*

7. *El subespacio de soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales. Consideremos el sistema homogéneo de ecuaciones lineales*

$$S = \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right. .$$

   El conjunto solución de S *satisface*

$$(0, 0, \cdots, 0, 0) \in Sol(S) \subset \mathbb{R}^n,$$

   Además, para cada n*-upla* $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ *y* $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ *en* $Sol(S)$ *y todo* $\lambda \in \mathbb{R}$, *es fácil verificar que* $(c_1, c_2, \cdots, c_n) + \lambda(d_1, d_2, \cdots, d_n) \in Sol(S)$. *Por lo tanto,* $Sol(S)$ *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$.

   ¿Es el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$*?*

Ejemplo 7.5 *Mostremos ahora algunos ejemplos de subconjuntos de espacios vectoriales que no tienen la estructura de un subespacio.*

1. *Considere el conjunto* $W = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : A^2 = A\}$. *Vamos a demostrar que* W *no es un subespacio vectorial.*

   Para que W *sea un subespacio vectorial, debe ser cerrado bajo la suma de matrices. Es decir, si* $A \in W$ *y* $B \in W$, *entonces* $A + B$ *también debe estar en* W. *Sin embargo, esto no siempre es cierto.*

Consideremos las matrices:

$$A = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Claramente, $A \in W$ y $B \in W$ ya que:

$$A^2 = I_2^2 = I_2 \quad y \quad B^2 = I_2^2 = I_2.$$

Ahora consideremos la suma $A + B$:

$$A + B = I_2 + I_2 = 2I_2.$$

Para que $2I_2 \in W$, se debe cumplir que $(2I_2)^2 = 2I_2$:

$$(2I_2)^2 = 4I_2 \neq 2I_2.$$

Por lo tanto, $2I_2 \notin W$. Esto demuestra que W no es cerrado bajo la suma de matrices y, por lo tanto, no es un subespacio vectorial.

2. *Consideremos el conjunto $W = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : \det(A) = 0\}$. Vamos a demostrar que W no es un subespacio vectorial.*

   Para que W sea un subespacio vectorial, debe ser cerrado bajo la suma de matrices. Sin embargo, esto no siempre es cierto en este caso.

   Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Claramente, $A \in W$ y $B \in W$.

   Ahora consideremos la suma $A + B$:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Para que $A + B \in W$, su determinante debe ser igual a cero:

$$\det(A + B) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0.$$

   Por lo tanto, $A + B \notin W$.

Proposición 7.1 *Sean U y W son subespacios de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V.*

1. *La intersección de U y W, denotada por $U \cap W$ es un subespacio de V.*
2. *La suma de U y W, denotada por $U + W = \{u + w : \ u \in U y \ w \in W\}$ es un subespacio de V.*

Demostración:

1. Dado que U y W son subespacios de V, sabemos que ambos contienen el vector cero, lo que significa que $V \cap W$ no es vacío. Para demostrar que $U \cap W$ es cerrado bajo la suma, consideremos v_1 y v_2 dos vectores en $U \cap W$. Dado que U y W son subespacios de V, sabemos que ambos son cerrados bajo la suma. Como v_1 y v_2 pertenecen a U, su suma $v_1 + v_2$ también debe estar en U. De manera similar, $v_1 + v_2$ está en W. Esto implica que $v_1 + v_2$ está en $V \cap W$. Usando argumentos similares podemos demostrar que $U \cap W$ es cerrado bajo multilplicación por escalares.

2. Dejamos su demostración por parte del lector.

Ejemplo 7.6 *En el espacio vectorial $V = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$, consideremos los subespacios vectoriales*

$$W_1 = \{M \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} : M \text{ es triangular superior}\}$$

$$W_2 = \{M \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} : M \text{ es triangular inferior}\}.$$

Entonces, $W_1 \cap W_2 = \{M \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} : M \text{ es diagonal}\}$ es un subespacio de V.

Si bien es cierto que la intersección de dos subespacios U y W de un espacio vectorial V es nuevamente un subespacio vectorial de V, no podemos afirmar lo mismo acerca de la unión de U y W. De hecho, en general, la unión de dos subespacios no necesariamente forma un subespacio.

Consideremos el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^2$ y dos subespacios $U = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ y $W = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$. Si tomamos la unión de U y W, es decir, $U \cup W$, veremos que no es un subespacio de V. Esto se debe a que la unión de U y W no es cerrada bajo la operación de suma. Por ejemplo, al considerar los vectores $(1, 0)$ de U y $(0, 1)$ de W, la suma de estos vectores es $(1, 1) \notin U \cup W$.

En el caso en que la unión de dos subespacios sea de nuevo un subespacio podemos afirmar lo siguiente:

Proposición 7.2 *Sean U y W dos subespacios de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V. Si $U \cup W$ es un subespacio de V, entonces $W \subseteq U$ o $U \subseteq W$.*

Demostración: Supongamos que $U \cup W$ es un subespacio de V, pero $W \nsubseteq U$ y $U \nsubseteq W$. Esto implica que existen vectores $w \in W$ y $u \in U$ tales que $w \notin U$ y $u \notin W$.

Consideremos la suma de estos vectores: $u + w$. Es claro que $u \in U \subset U \cup W$ y $w \in W \subset U \cup W$. Por lo tanto, siendo $U \cup W$ un subespacio, $u + w \in U \cup W$. Entonces, $u + w \in U$ o $u + w \in W$.

Supongamos que $u + w \in U$. Entonces, podemos escribir $w = (u + w) - u$, lo cual implica que $w \in U$, esto es una contradicción. Si $u + w \in W$, razonamos de igual forma.

Por lo tanto, la suposición inicial de que $U \cup W$ es un subespacio de V y $W \nsubseteq U$ y $U \nsubseteq W$ lleva a una contradicción. Esto significa que $W \subseteq U$ o $U \subseteq W$.

Ejemplo 7.7 *1.* ***Ejercicio 1. Segundo Parcial GAL1 interactiva. Noviembre 2023.*** *Se considera el conjunto $S_m \subseteq \mathbb{R}^3$ dependiente del parámetro $m \in \mathbb{R}$ definido como $S_m = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = m^2 - 2m + 1\}$. Entonces:*

(A) Existen exactamente dos valores de m para los cuales S_m es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(E) Existe un único valor de m para el cual S_m es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(I) S_m es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ para todo valor del parámetro m.

(O) No existe ningún valor del parámetro m para el cual S_m sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Solución: *Para que S_m sea un subespacio vectorial, $(0,0,0)$ debe pertenecer a S_m. Eso implica que $m^2 - 2m + 1 = 0$, lo que equivale a $m = 1$ (condición necesaria). Cuando $m = 1$, la ecuación $m^2 - 2m + 1$ es homogénea y, por lo tanto, S_m es un subespacio vectorial (condición suficiente). En definitiva, S_m es un subespacio vectorial si y solo si $m = 1$.*

2. ***Ejercicio 7. Examen GAL1 interactiva. Diciembre 2023.*** *Se consideran las rectas r y s de ecuaciones reducidas:*

$$\begin{cases} y = z \\ z = 0 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}$$

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

- *(A) r es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.*
- *(E) $r \cap s$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.*
- *(I) s es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.*
- *(O) El plano que contiene a r y s es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.*
- *(U) $r \cup s$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.*
- *(Y) $\{(0,0,0)\}$ es un subespacio vectorial de r y de s.*

Solución: *El origen $(0,0,0)$ pertenece a las rectas r y s, por lo que son dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$. Como todo subespacio vectorial contiene al subespacio trivial $\{(0,0,0)\}$, entonces (A), (I) e (Y) son verdaderas. Como la intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial, entonces $r \cap s$ es también un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, y (E) es verdadera.*

El origen también pertenece al plano que contiene a r y s, y entonces también es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. En consecuencia, (O) es verdadera.

La unión de dos subespacios vectoriales en general no es un subespacio vectorial porque en general la unión no es cerrada bajo la suma. En este caso, podemos elegir, por ejemplo, $(1,0,1) \in r$ y $(1,1,0) \in s$. La suma es $(1,0,1) + (1,1,0) = (2,1,1)$, que no pertenece ni a r ni a s, por lo que la afirmación (U) es falsa.

7.3. Práctico 7.

Práctico 7.

Espacios y subespacios vectoriales.

Ejercicios Sugeridos:

1. Investigar si $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial en caso de que las operaciones de suma y producto se definan de las siguiente maneras, para todo x_1, x_2, y_1, y_2 y λ reales:

   a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (3y_1 + 3y_2, -x_1 - x_2), \quad \lambda(x_1, y_1) = (3\lambda y_1, x_1);$

   b) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, 0);$

   c) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0), \quad \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1);$

   d) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, x_2 + y_2), \quad \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1);$

   e) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (|x_1 + x_2|, |y_1 + y_2|), \quad \lambda(x_1, y_1) = (|\lambda x_1|, |\lambda y_1|).$

2. Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ dado por $V = \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
   Definimos la suma $+_V$ como:
   $$(x_1, y_1, 1) +_V (x_2, y_2, 1) = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, 1);$$
   y definimos $\times_V$ como:
   $$\lambda \times_V (x_1, y_1, 1) = (\lambda x, \lambda y, 1).$$
   Determinar si $(V, \mathbb{R}, +_V, \times_V)$ es un espacio vectorial.
3. Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial. A partir de los axiomas de espacio vectorial probar las siguientes propiedades (se pueden ver los axiomas en las notas).
   a) El neutro de la suma es único. Es decir, que si $v_1, v_2 \in V$ verifican que $v_1 + v = v_2 + v = v$ para todo $v \in V$ entonces $v_1 = v_2$.
   b) El opuesto es único. Es decir, dado $v \in V$ si $v + v_1 = v + v_2 = O_V$, entonces $v_1 = v_2$.
   c) Sea $0 \in \mathbb{K}$ (el neutro del cuerpo respecto a la suma). Para todo $v \in V$ y se tiene que $0v = O_V$
   d) Sea $O_V \in V$ (el neutro del espacio). Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y se tiene que $\lambda O_V = O_V$
   e) Probar que para todo $v \in V$, el opuesto de v es $(-1)v$, donde -1 es el opuesto de 1 en el cuerpo $\mathbb{K}$.
4. Sea V un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.
   a) Sean $u, v \in V$ dos vectores tal que $3v + 5w = 7v - 2w$, mostrar que existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda v = w$.
   b) Sea $v \in V$ tal que $3v = v$, probar que $v = 0$, es decir, v es el vector nulo.

   $(V, \mathbb{K}, +, .)$ un espacio vectorial. Consideramos el conjunto $\mathcal{F}$ formado por todas las funciones de X que toman valores en V. Es decir,
   $$\mathcal{F} = \{f \text{ tales que } f\colon X \to V\}.$$
   Definimos
   - SUMA DE DOS FUNCIONES: $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in X$;
   - PRODUCTO DE UNA FUNCIÓN f POR UN ESCALAR λ: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad x \in X$.

   Mostrar que $(\mathcal{F}, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.
5. Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{F}$ formado por todas las funciones reales de variable real. Investigar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathcal{F}$ son subespacios vectoriales:
   a) para un $x_0 \in \mathbb{R}$ dado, el conjunto de las funciones f tales que $f(x_0) = 0$;
   b) el conjunto de funciones f que tiene al menos una raíz. Es decir, aquellas funciones f para las que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$.
6. Se considera el $\mathbb{K}$ espacio vectorial formado por las matrices $n \times n$ con entradas en $\mathbb{K}$. En cada caso, investigar si los subconjuntos de $\mathbf{Mat}(\mathbb{K})_{n\times n}$ son subespacios vectoriales:
   a) el conjunto de las matrices simétricas, es decir, $\{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{K})_{n\times n} \colon A^t = A\}$.
   b) el conjunto de las matrices antisimétricas, $\{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{K})_{n\times n} \colon A^t = -A\}$.
   c) el conjunto de las matrices invertibles;

d) el conjunto de las matrices no invertibles;

e) el conjunto de matrices da rango k;

f) el conjunto de matrices de traza 0 (recordar que la traza de una matriz es la suma de los elementos de la diagonal);

g) el conjunto de matrices triangulares superiores;

h) fijado $X \in \mathbb{K}^n$, el conjunto de matrices A tales que $AX = 0$;

i) fijado $B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{K})_{n\times n}$ el conjunto de matrices A tales que $AB = BA$;

j) el conjunto de matrices nilpotentes, es decir las matrices A tal que existe $k \in \mathbb{N}$ que verifica $A^k = 0$;

k) el conjunto de matrices idempotentes, es decir las matrices A tal que $A^2 = A$.

7. Sea $V = \mathbb{R}^3$ como espacio vectorial. Determinar en qué condiciones los conjuntos S son subespacios

   a) Fijo $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, $S = \{(x, y, z) : \langle (x, y, z), (a, b, c)\rangle = d\}$.

   b) Fijo $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ y $v \in \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : (x, y, z) \wedge (a, b, c) = v\}$.

   c) Fijo r, $S = \{(x, y, z) : \|(x, y, z)\| = r\}$.

8. En cada caso, determinar si S es subespacio vectorial del espacio vectorial dado.

   a) Para el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$ considerar:

      1) $S = \{(a, b, c) \in V;\ a + b + c = 2\}$;
      2) $S = \{(a, b, c) \in V;\ 3a - 2 = 3b + c\}$;
      3) $S = \{(a, b, c) \in V;\ a = b = c\}$;
      4) $S = \{(a, a + b, a + b + c) \in V;\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$;
      5) $S = \{(b - 6c, b, c) \in V;\ b, c \in \mathbb{R}\}$;
      6) $S = \{(b/c, b, c) \in V;\ b, c \in \mathbb{R},\ c \neq 0\}$;
      7) $S = \{(x, y, z) \in V;\ z \geq x^2 + y\}$.

   b) Para el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$ considerar:

      1) $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in V;\ x_1 \geq 0\}$;
      2) $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in V;\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$;
      3) $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in V;\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1\}$;
      4) $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in V;\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\}$;
      5) $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in V;\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0\}$;
      6) $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in V;\ x_i \leq x_j$ para todo $i \leq j\}$.

   c) Para el espacio vectorial $V = \mathbb{R}_n[x]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que n y con coeficientes reales, considerar:

      1) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ p(\alpha) = 0\}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un valor fijo;
      2) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ p(\alpha) = p'(\alpha) = 0\}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un valor fijo;
      3) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];$ el grado de p es $n\}$;
      4) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ p(1 - x) = p(1 + x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$;
      5) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ p(x) \leq p(2x)\}$;
      6) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ |p(x)| \leq |p(2x)|\}$.

d) Para el espacio vectorial $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ formado por las funciones reales de variable real considerar:
   1) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f(1) = f(0)\}$;
   2) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f(x^2) = f(x)^2,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$;
   3) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f \text{ es par}\}$;
   4) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f \text{ es impar}\}$;
   5) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f \text{ es periódica con período } \pi\}$;
   6) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f \text{ con 1 como raíz}\}$;
   7) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f \text{ con alguna raíz}\}$.

9. Sea (S) un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con n incógnitas. Probar que las soluciones de (S) son un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

10. **Intersección de una colección de subespacios.**

    a) Sea $\{S_i\}_{i\in I}$ una colección subespacios de un espacio vectorial V. Mostrar que la intersección $S = \bigcap_{i\in I} S_i$ de todos los subespacios es un subespacio vectorial.

    b) Sean $x_0, \ldots, x_n$ números reales. Mostrar que el conjunto de las funciones f reales y continuas tales que $f(x_i) = 0$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ es un espacio vectorial real.

    Dados W_1, W_2 dos subespacios de V. Probar que si $W = W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V entonces $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$.

11. **Espacios de funciones.** Para el espacio vectorial $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ formado por las funciones reales de variable real determinar si los siguientes conjuntos son subespacios.

    a) $S = \{f \in \mathcal{F} \colon f \text{es continua}\}$;
    b) $S = \{f \in \mathcal{F} \colon f \text{es derivable}\}$;
    c) $S = \{f \in \mathcal{F} \colon f \text{es derivable tal que } f' = -f\}$;
    d) $S = \{f \in \mathcal{F} \colon f \text{es acotada}\}$.
    e) $S = \{f \in \mathcal{F} \colon \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\}$;
    f) $S = \{f \in \mathcal{F} \colon \lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ es finito}\}$;
    g) $S = \left\{f \in \mathcal{F} \colon \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ es finito}\right\}$;
    h) $S = \{f \in \mathcal{F} \colon f \text{es integrable}\}$;
    i) $S = \{f \in \mathcal{F} \colon f \text{es monótona}\}$;

12. Sea $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$. Probar que los conjuntos

$$\Im = \{v \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times 1} : \text{ existe } u \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times 1} \text{ tal que } v = Au\} \subset \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times 1} \text{ y}$$

$$\text{Ker} = \{u \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times 1} : Au = 0_{m\times 1}\} \subset \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times 1},$$

    son subespacios vectoriales.

13. Sea V un $\mathbb{K}$ esp vectorial. Sean $v_1, v_2, v_3 \in V$ tres vectores de V. Probar que el conjunto

$$A = \{v \in V : v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3,\ \lambda_i \in \mathbb{K}\}$$

    es un subespacio de V.

14. **Suma de subespacios.** Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y W_1, W_2 dos subespacios de V. Se define el subconjunto de V dado por:

$$W = \{v \in V : \text{ tal que existen } w_1 \in W_1 \text{ y } w_2 \in W_2 \text{ con } v = w_1 + w_2\}.$$

   a) Probar que W es un subespacio de V.

   b) Mostrar que W contiene a W_1 y W_2.

   c) Probar que cualquier otro subespacio S que contenga a W_1 y W_2 también debe contener a W.
   Se dice que W es la suma de los subespacios W_1 y W_2.

15. Sean $V = \mathbb{R}^+$ y las siguientes operaciones $+ : V \times V \to V$ y $* : \mathbb{R} \times V \to V$ dadas por $+(u, v) = uv$ y $*(\lambda, u) = u^\lambda$. Probar que $(V, \mathbb{R}, +, *)$ es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

7.3.1. Solución Práctico 7.

1. Ninguno es un espacio vectorial. Para cada parte se muestra una de las propiedades que falla, pero puede haber otras.

   a. No existe el neutro del producto. Recordar que el neutro del producto es un elemento $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que para todo $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ se cumple que

$$\lambda(x_1, y_1) = (x_1, y_1)$$

   Utilizando la definición del producto de esta parte, la ecuación de arriba queda

$$(3\lambda y_1, x_1) = (x_1, y_1)$$

   Y podemos observar que λ depende del vector que tomemos, por lo tanto, no existe uno que sirva para todos los vectores de $\mathbb{R}^2$.

   b. No existe el neutro del producto. Esto es claro pues tomando cualquier vector que tenga segunda coordenada no nula no va a existir λ que verifique la definición.

   c. No existe el neutro de la suma. Análogo a la parte anterior.

   d. No existe el neutro de la suma. Consideramos un vector (x_1, y_1) y nos preguntamos si existe $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$$

   Con la definición de la suma de esta parte, la ecuación anterior queda

$$(x_1, x_2 + y_2) = (x_1, y_1)$$

   Y podemos ver que las coordenadas del vector (x_2, y_2) dependen del vector (x_1, y_1) por lo tanto no existe uno que verifique la definición de neutro.

   e. No existe el neutro del producto ni de la suma y tampoco se cumple la propiedad asociativa. Para verificar la no existencia de los neutros alcanza considerar vectores con coordenadas negativas.

2. No es un espacio vectorial. Veamos que no se cumple la existencia del neutro de la suma. Sea $(x_1, y_1, 1) \in \mathbb{R}^3$, buscamos $(x_2, y_2, 1)$ tal que

$$(x_1, y_1, 1) +_V (x_2, y_2, 1) = (x_1, y_1, 1)$$

Usando la definición de $+_V$ tenemos que

$$(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2}, 1) = (x_1, y_1, 1)$$

Para que esta ecuación se verifique, $(x_2, y_2, 1)$ debe cumplir que $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, es decir, depende del vector que elegimos.

3. Ver el manual del curso.

6. Recordar que a partir de la definición podemos concluir que si W es un subespacio vectorial, entonces $0_V \in W$. Esto nos servirá para probar que algunos conjuntos no son subespacios vectoriales.

   a. Es un subespacio vectorial. Verifiquemos las propiedades.
      1. La matriz nula pertenece al conjunto por lo que el conjunto es no vacío.
      2. Dadas dos matrices simétricas A y B, tenemos que

      $$(A + B)^t = A^t + B^t = A + B = A + B$$

      por lo que la matriz $A + B$ pertenece al conjunto.
      3. Sea A una matriz del conjunto y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

      $$(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A$$

      por lo tanto, la matriz λA pertenece al conjunto.

   Concluimos que el conjunto es cerrado bajo la suma y el producto por escalar y por lo tanto es un subespacio vectorial.

   b. Es un subespacio vectorial. El razonamiento es análogo al anterior, utilizando propiedades de traspuesta.

   c. No es un subespacio vectorial: La matriz nula no es una matriz invertible.

   d. No es un subespacio vectorial: la suma de dos matrices no invertibles puede dar una invertible. Como contraejemplo, tomemos $n = 3$ y consideremos las siguientes matrices no invertibles

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   La suma de estas matrices da la identidad de 3×3 que claramente es una matriz invertible, por lo tanto el conjunto no es cerrado bajo la suma.

   e. No es un subespacio vectorial si $k \neq 0$.

   En caso de que $k = 0$ el conjunto solo tiene a la matriz nula y por lo tanto es el subespacio trivial.

   Si $k \neq 0$ tenemos que el conjunto no es cerrado bajo la suma ni el producto y además la matriz nula no pertenece al conjunto, por lo tanto, no es un subespacio vectorial.

f. Es un subespacio vectorial. Verifiquemos las propiedades

1. La matriz nula tiene traza cero por lo que sabemos que el conjunto no es vacío.
2. Sean A, B dos matrices de traza 0. Veamos que $A+B$ tiene traza 0.

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B) = 0 + 0 = 0$$

3. Sea A una matriz de traza 0 y $\lambda \in \mathbb{R}$. Veamos que λA tiene traza 0.

$$tr(\lambda A) = \lambda tr(A) = \lambda 0 = 0$$

Tenemos que el conjunto es no vacío y cerrado bajo la suma y el producto por escalar, por lo que es un subespacio vectorial.

Aquí usamos propiedades sobre la traza vistas en el teórico y prácticos anteriores.

7. a. S es un subespacio vectorial sii $d = 0$. Notar que para $d \neq 0$, el vector $(0,0,0) \notin S$. Puede verificarse que esta es la única condición para que se cumplan las propiedades de suma y producto.

b. S es un subespacio vectorial sii $v = 0$. Esto es porque para que $(0,0,0)$ pertenezca a S, debe cumplirse que

$$(0,0,0) \wedge (a,b,c) = v$$

Pero el producto vectorial de $(0,0,0)$ por cualquier vector da el vector nulo.

c. S es un subespacio vectorial sii $r = 0$. Para $r \neq 0$ el vector $(0,0,0)$ no verifica la condición pues su norma es 0. Si $r = 0$ el conjunto es un subespacio vectorial trivial, solo tiene al vector nulo.

8. a. 1) No es un subespacio vectorial: el vector $(0,0,0)$ no pertenece a S.

2) No es un subespacio vectorial: el vector $(0,0,0)$ no cumple la condición.

3) Es un subespacio vectorial.

b. 1) No es un subespacio vectorial: Sea $(x_1, ..., x_n) \in S$ tal que $x_1 > 0$ y $\lambda < 0$. Es claro que $\lambda x_1 < 0$ por lo que $\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n) \notin S$.

2) Es un subespacio vectorial. Veamos que verifica las propiedades.
El vector $(0,0,...,0) \in S$ pues todas sus coordenadas son iguales.
Sean $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in S$. Tenemos que la suma de ellos es el vector $(x_1 + y_+1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ y tenemos que

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = ... = x_n + y_n$$

Por lo que es cerrado bajo la suma.
Sea $(x_1, x_2, ..., x_n)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Tenemos que $\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$ que verifica la condición y tenemos que el conjunto es cerrado bajo el producto por escalar.

3) No es un subespacio vectorial: el vector nulo no pertenece al conjunto.

c. 1) Es un subespacio vectorial.

2) Es un subespacio vectorial. Veamos que cumple las condiciones.
El polinomio nulo tiene raíz en α trivialmente. Además, al derivarlo, obtenemos nuevamente el polinomio nulo por lo que se cumple la segunda condición. Tenemos entonces que el conjunto no es vacío.
Sean $p, q \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$(p+q)(\alpha) = p(\alpha) + q(\alpha) = 0 + 0 = 0$$

$$(\lambda p)(\alpha) = \lambda p(\alpha) = \lambda 0 = 0$$
$$(p+q)'(\alpha) = (p'+q')(\alpha) = p'(\alpha) + q'(\alpha) = 0 + 0 = 0$$
$$(\lambda p)'(\alpha) = \lambda p'(\alpha) = \lambda 0 = 0$$

Donde usamos la linealidad de la derivada. Tenemos entonces que $p+q, \lambda p \in S$.

3) No es un subespacio vectorial: sumar dos polinomios del mismo grado puede dar un polinomio de menor grado. Como contraejemplo podemos considerar los polinomios $p(x) = x^n + 1$ y $q(x) = -x^n$, ambos de grado n. Sin embargo, su suma es el polinomio $(p+q)(x) = 1$ que tiene grado 0.

d. 1) Es un subespacio vectorial.

2) No es un subespacio vectorial: Si $f \in S$ y $\lambda \neq 0, 1$ entonces

$$(\lambda f)(x^2) = \lambda f(x^2) = \lambda f(x)^2 \neq (\lambda f(x))^2$$

3) Es un subespacio vectorial.
Recordar que f es par si $f(-x) = f(x)$. Claramente la función nula cumple esta propiedad.
Sean $f, g \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$
$$(\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x)$$

Es decir, $f+g, \lambda f \in S$.

10. a) Probemos que el conjunto S cumple las propiedades. Dado que $0 \in S_i$ para todo $i \in I$, tenemos que $0 \in S$ y por lo tanto $S \neq \emptyset$.

Sean ahora $v, w \in S$, esto significa que $v, w \in S_i$ para todo $i \in I$. Ahora, como cada S_i es un subespacio vectorial, tenemos que $v + w \in S_i$ y por lo tanto, $v + w \in S$. Concluimos que S es cerrado bajo la suma.

Razonamos de forma análoga. Sea $v \in S$ y λ un escalar. Entonces $v \in S_i$ para todo $i \in I$, y como cada uno de ellos es un subespacio vectorial, $\lambda v \in S_i$ para todo $i \in I$. Concluimos que $\lambda v \in S$ y por lo tanto, S es cerrado bajo el producto por escalar.

b) Debemos probar que $S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x_0) = f(x_1) = ... = f(x_n) = 0\}$ es un subespacio vectorial. Para esto podemos pensar a S como intersección de conjuntos del tipo $S_i = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x_i) = 0\}$ y utilizar la parte anterior.

11. a. Es un subespacio vectorial. La función nula es continua por lo que el conjunto no es vacío. Además suma de funciones continuas es continua y producto de una función continua por un escalar también es una función continua.

b. Es un subespacio vectorial: La función nula es derivable, la suma de funciones derivables es derivable y el producto de una función derivable por un escalar, es una función derivable.

c. Es un subespacio vectorial.

d. Es un subespacio vectorial: La función nula es acotada. Además, sean $f, g \in S$, entonces existen K, K' reales positivos tales que $|f(x)| < K$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $|g(x)| < K'$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Tenemos entonces que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq K + K'$$
$$|(\lambda f)(x)| = |\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leq |\lambda| K$$

Es decir, $f + g$ y λf son funciones acotadas.

14. a. Observamos que $0_V \in W$ pues $0_v = 0_v + 0_v$ y como W_1 y W_2 son subespacios vectoriales, ambos contienen al neutro. Es decir, logramos escribir al neutro del espacio vectorial como una suma de un elemento de W_1 más uno de W_2.

Por otro lado, dados $v, w \in W$, tenemos que existen $v_1, w_1 \in W_1$ y $v_2, w_2 \in W_2$ tales que $v = v_1 + v_2$ y $w = w_1 + w_2$. Por lo tanto

$$v + w = (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) = (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2)$$

Como W_1 y W_2 son subespacios vectoriales, tenemos que $(v_1 + w_1) \in W_1$ y $(v_2 + w_2) \in W_2$, por lo tanto, escribimos a $v + w$ como un elemento de W y concluimos que el conjunto es cerrado bajo la suma.

Sea ahora $v \in W$ y λ un escalar. Tenemos que $v = v_1 + v_2$ donde $v_1 \in W_1$ y $v_2 \in W_2$. Por lo tanto

$$\lambda v = \lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$$

Nuevamente, usando que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales, tenemos que $\lambda v_1 \in W_1$ y $\lambda v_2 \in W_2$. Concluimos que $\lambda v \in W$, es decir, W es cerrado bajo el producto por escalar.

b. Probamos solo que $W_1 \subset W$ pues la otra demostración es análoga. Sea $w_1 \in W_1$, entonces, es claro que

$$w_1 = w_1 + 0_V$$

Como W_2 es un subespacio vectorial, $0_V \in W_2$ y logramos escribir a w_1 como una suma de un elemento de W_1 más uno de W_2, entonces $w_1 \in W$.

c. Sea S un subespacio vectorial de V que contiene a W_1 y W_2 y sea $w \in W$. Sabemos que existen $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ tales que $w = w_1 + w_2$. Como W_1 y W_2 son subconjuntos de S, tenemos que $w_1, w_2 \in S$ y como éste es un subespacio vectorial, $w_1 + w_2 \in S$. Es decir $w \in S$.

7.4. Subespacios generados por un conjunto de vectores

En lo que sigue, nos enfocaremos exclusivamente en espacios vectoriales sobre el cuerpo de los números reales. Por consiguiente, al referirnos a escalares, siempre estaremos hablando de números reales. Es importante señalar, sin embargo, que todos los conceptos y resultados pueden generalizarse para espacios vectoriales sobre un cuerpo arbitrario.

En esta sección, abordaremos un problema que desempeñará un papel crucial en las secciones posteriores. Consideremos un espacio vectorial V y S un subconjunto no vacío (posiblemente infinito) de V . Nos preguntamos si existe algún subespacio de V que contenga a S. Es importante destacar que si S es en sí mismo un subespacio de V, la respuesta es obvia: S es el subespacio que contiene se contiene a sí mismo. Además, incluso si S no es un subespacio de V, el problema tiene una solución trivial: V es un subespacio de V que contiene a S. Sin embargo, la pregunta interesante es si existe algún subespacio de V que contenga a S y sea el más pequeño de todos, en términos de contención de conjuntos.

En otras palabras, buscamos el subespacio de V que contiene a S pero no contiene a ningún otro subespacio propio de V que también contenga a S.

Definición 7.6 *Sea V un espacio vectorial y $v_1, v_2, \cdots, v_n$ vectores de V. Diremos que un vector v es una* ***combinación lineal*** *de los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$, si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ tales que:*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Si S es un subconjunto no vacío en un espacio vectorial V, denotamos como $[S]$ al conjunto todos los vectores en V que pueden ser expresados como una combinación lineal de los vectores en S.

$$[S] = \{v \in V : \; v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k, \; v_i \in S, \; \lambda_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, \cdots, k, \; k \in \mathbb{N}\}.$$

Observemos que cada elemento de $[S]$ es una combinación lineal de un número **finito** de elementos de S. En el caso en que $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, entonces

$$[S] = \{v \in V : v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n, \; v_i \in S, \; \lambda_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, \ldots, n\}.$$

Nuestro propósito es mostrar que el conjunto $[S]$ es un subespacio de V y es el subespacio más pequeño de V que contiene a todos los elementos de S. Llamaremos a $[S]$ el **espacio generado** por S.

Teorema 7.1 *Sean V un espacio vectorial y S un subconjunto no vacío de V. Entonces, $[S]$ es un subespacio de V.*

Demostración: Para demostrar que $[S]$ es un subespacio de V, verifiquemos las siguientes propiedades:

1. *Existencia del vector cero.* Dado que S no es vacío, existe al menos un vector $v \in S$. Podemos expresar el vector cero como $\mathbf{0} = 0 \cdot v$. Por lo tanto, $\mathbf{0} \in [S]$.

2. *Cerrado bajo la suma de vectores.* Tomemos dos vectores u y v en $[S]$. Por definición, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ tales que:

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \quad \text{y} \quad v = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \cdots + \mu_k w_k,$$

donde $v_i \in S$ y $w_j \in S$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, k$. Entonces,

$$u + v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n + \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \cdots + \mu_k w_k.$$

Es decir, $u + v$ es una combinación lineal de los elementos de S. Por lo tanto, $u + v \in [S]$.

3. *Cerrado bajo la multiplicación por escalares.* Esta propiedad puede ser verificada por el lector interesado.

En el caso en que $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, se puede demostrar que además $[S]$ es el menor subespacio de V que contiene a los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$.

Ejemplo 7.8 *Sean $v = (1,2,3)$ y $w = (-1,2,-2)$ dos vectores en $V = \mathbb{R}^3$. Entonces, el menor subespacio de $\mathbb{R}^3$ que contiene a los vectores v y w es*

$$[\{v,w\}] = \{\lambda_1 v + \lambda_2 w : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \{\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(-1,2,-2) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Esto se puede simplificar como

$$[\{v,w\}] = \{(\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 + 2\lambda_2, 3\lambda_1 - 2\lambda_2) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Es decir, $(x,y,z) \in [S]$ si y solo si

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 &= x, \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 &= y, \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 &= z, \end{aligned}$$

lo que puede verse como un sistema con 3 ecuaciones lineales y 2 incógnitas. Al escalonar el sistema en su representación matricial, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 2 & 2 & y \\ 3 & -2 & z \end{array}\right) \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|r} 1 & -1 & x \\ 0 & 4 & y - 2x \\ 0 & 0 & z + \dfrac{-y-10x}{4} \end{array}\right).$$

Por lo tanto, la existencia de soluciones para este sistema implica que

$$\begin{aligned} z + \frac{-y-10x}{4} &= 0, \\ -10x - y + 4z &= 0. \end{aligned}$$

Es decir, el subespacio generado por los vectores $v = (1,2,3)$ y $w = (-1,2,-2)$ es el plano $-10x - y + 4z = 0$.

Definición 7.7 *Sea V un espacio vectorial y W un subespacio de V. Decimos que un subconjunto S de W es un **generador** de W si $[S] = W$. En otras palabras, S es un generador de W si cada elemento de W puede ser expresado como una combinación lineal de elementos de S.*

Ejemplo 7.9 *1. Consideremos el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$.*

a) *Sea el conjunto S definido como:*

$$S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}.$$

En este caso, cualquier vector en $[S]$ tiene la forma $a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$, donde a, b y c son números reales. Por lo tanto, podemos escribir $[S]$ de la siguiente manera:

$$[S] = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a,b,c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3.$$

De esta forma, el espacio generado por S en $\mathbb{R}^3$ es el propio $\mathbb{R}^3$, lo que significa que S es un conjunto generador del espacio completo.

b) *Sea el conjunto S definido como:*

$$S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,0)\}.$$

Si intentamos formar cualquier combinación lineal de estos vectores, notamos que no podemos obtener vectores en $\mathbb{R}^3$ que tengan una componente no nula en la tercera coordenada (componente z). El tercer vector en S, $(0,0,0)$, siempre produce un vector nulo sin importar los escalares utilizados.
Por lo tanto, no podemos generar todos los vectores en $\mathbb{R}^3$ utilizando únicamente los vectores en S.

$$[S] = [\{(1,0,0), (0,1,0)\}] = \{(a,b,0) \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

c) *Sea el conjunto S definido como:*

$$S = \{(1,2,3), (0,1,-1), (2,5,4)\}.$$

Queremos determinar si S genera todo el espacio $\mathbb{R}^3$. Para hacerlo, vamos a verificar si podemos expresar cualquier vector (x,y,z) en $\mathbb{R}^3$ como una combinación lineal de los vectores en S.
Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(0,1,-1) + \lambda_3(2,5,4) = (x,y,z)$$

Donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los escalares que buscamos determinar. Expandiendo y agrupando las coordenadas, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 0\lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = y \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 = z \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, encontramos los valores de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ que permiten expresar cualquier vector (x,y,z) en términos de los vectores en S. Si resolvemos el sistema, encontraremos:

$$\lambda_1 = -9x + 2y + 2z,$$

$$\lambda_2 = z - 7x + 2y,$$

$$\lambda_3 = 5x - y - z.$$

Esto significa que cualquier vector (x,y,z) en $\mathbb{R}^3$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores en S utilizando los escalares obtenidos. En conclusión, el conjunto

$$S = \{(1,2,3), (0,1,-1), (2,5,4)\}$$

genera todo el espacio $\mathbb{R}^3$, y las coordenadas de cada vector se pueden determinar resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente.

2. *Consideremos el espacio vectorial $V = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$. Sea el conjunto S definido como:*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Queremos determinar el espacio generado por S, es decir, $[S]$. Observamos que $[S]$ consiste en todas las matrices $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tales que $A^t = A$. En otras palabras, $[S]$ está formado por las matrices simétricas de tamaño 2×2 y se puede describir como:

$$[S] = \left\{ A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ \text{donde } a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Además, notamos que el conjunto S_1 dado por:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

también genera el mismo subespacio que S. Esto se debe a que cualquier matriz simétrica A se puede expresar como una combinación lineal de las matrices en S_1 de la siguiente manera:

$$A = \frac{a+c}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{a-c}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que tanto S como S_1 generan el mismo subespacio.

3. *Consideremos el espacio vectorial $V = \mathbb{R}_2[x]$. Sea el conjunto S definido como:*

$$S = \{1, x, x^2\}$$

En este caso, el conjunto S es un generador de todo el espacio vectorial V.

Observación 7.3 *Notamos previamente que la unión de subespacios no forma necesariamente un subespacio. No obstante, podemos demostrar que para dos subespacios U y W de un espacio vectorial V, se cumple siempre que*

$$[U \cup W] = U + W.$$

Para demostrar la igualdad $[U \cup W] = U + W$, debemos probar la inclusión en ambas direcciones.

1. $[U \cup W] \subseteq U + W$*: Es trivial pues $[U \cup W]$ es el subespacio más pequeño que contiene a $U \cup W$.*

2. $U + W \subseteq [U \cup W]$*: Tomemos un vector $v \in U + W$. Por definición, existen vectores $u \in U$ y $w \in W$ tales que $v = u + w$.*

$$u \in U \subset U \cup W$$

$$w \in W \subset U \cup W$$

Por lo tanto, $v = u + w \in [U \cup W]$.

En ocasiones, el conjunto de vectores utilizado para generar un subespacio puede contener información redundante. No todos los elementos del conjunto son necesarios para generar el subespacio correspondiente. Esta observación se puede evidenciar mediante la siguiente proposición.

Proposición 7.3 *Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ un conjunto finito de vectores en V. Si alguno de los vectores, digamos v_i, es una combinación lineal de los restantes $(n-1)$ vectores, entonces los espacios generados por los conjuntos $\{v_1, v_2, \cdots, v_i, \cdots, v_n\}$ y $\{v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}, v_{i+1}, \cdots, v_n\}$ son iguales, es decir,*

$$[\{v_1, v_2, \cdots, v_i, \cdots, v_n\}] = [\{v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}, v_{i+1}, \cdots, v_n\}].$$

Demostración: Es obvio que $[\{v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}, v_{i+1}, \cdots, v_n\}] \subseteq [\{v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1} \cdots, v_n\}]$.

Ahora, supongamos que v_i es una combinación lineal de los vectores restantes, es decir, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n$ tal que:

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n.$$

Para demostrar la otra inclusión tomemos un vector v en $[\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n\}]$. Por definición, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$ tales que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_i v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \alpha_n v_n.$$

Entonces podemos reescribir el término correspondiente a v_i

$$\alpha_i v_i = \alpha_i \left(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n \right).$$

Por lo tanto,

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + (\alpha_i \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_i \lambda_{i-1} v_{i-1} + \alpha_i \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \alpha_i \lambda_n v_n) + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \alpha_n v_n.$$

Reagrupando los términos notamos que $v \in [\{v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}, v_{i+1}, \cdots, v_n\}]$.

Corolario 7.1 *Sean S y S_1 dos subconjuntos de un espacio vectorial V y $v_0 \in V$. Entonces:*

1. *Si $S_1 = S \cup \{v_0\}$, entonces $[S_1] = [S]$ si y solo si $v_0 \in [S]$.*
2. *$[S] = [S']$ si y sólo si $S \subseteq [S']$ y $S' \subseteq [S]$.*

Ejemplo 7.10 *El conjunto $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ genera el mismo subespacio en $\mathbb{R}^3$ que $\{(1,0,1),(0,1,0),(1,1,1)\}$ pues $(1,1,1) = (1,0,1) + (0,1,0)$.*

7.5. Dependencia e independencia lineal.

Definición 7.8 *Sea V un espacio vectorial. El conjunto no vacío $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$ es **linealmente dependiente** si existen escalares $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, no todos iguales a 0, tales que*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \boldsymbol{0}$$

*Si no existen tales escalares, entonces decimos que $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es **linealmente independiente**. En otras palabras, $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente si, y sólo si, satisface la siguiente condición: Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ escalares tales que*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \boldsymbol{0};$$

entonces $\lambda_i = 0$ para todo $i = 1, \cdots, n$.

En lo que sigue, utilizaremos la expresión: “los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente independientes (dependientes)”para referirnos al caso en el que el conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ sea linealmente independiente (dependiente).[2]

La definición anterior también puede extenderse a subconjuntos no vacíos cualesquiera de V. En este caso, dado un espacio vectorial V y un subconjunto (posiblemente infinito) S de V, diremos que S es linealmente dependiente si existen vectores distintos $v_1, v_2, \cdots, v_n$ de S y escalares $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, no todos iguales a 0, tales que

$$\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n = \mathbf{0}.$$

Un conjunto que no es linealmente dependiente se dice linealmente independiente.

[2]Usualmente abreviaremos la expresión linealmente dependiente o linealmente independiente por L.D. o L.I.

Ejemplo 7.11 *1. Consideremos el espacio vectorial $V = \mathbb{R}_2[x]$ y el conjunto $S = \{1+x, 2-x^2, 3+x-2x^2\}$. Expresando el polinomio cero como combinación lineal de los elementos del conjundo dado tenemos:*

$$a(1+x) + b(2-x^2) + c(3+x-2x^2) = \boldsymbol{0}.$$

Agrupando los términos, obtenemos la siguiente ecuación:

$$(a+2b+3c) + (a+c)x + (-b-2c)x^2 = \boldsymbol{0}.$$

Para que esto se cumpla para todo x, los coeficientes de cada término deben ser cero. Resolvemos el sistema de ecuaciones resultante:

$$\begin{cases} a+2b+3c = 0 \\ a+c = 0 \\ -b-2c = 0 \end{cases}.$$

La única solución del sistema es $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Por lo tanto, concluimos que el conjunto $S = \{1+x, 2-x^2, 3+x-2x^2\}$ es linealmente independiente.

2. Consideremos el espacio vectorial $V = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$. Tomemos el siguiente conjunto de matrices:

$$\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

Al considerar $a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Expandiendo la suma de matrices, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La única solución es $a = b = c = d = 0$. Esto indica que S es linealmente independiente.

3. Consideremos el espacio vectorial $V = C[a,b]$. Tomemos el conjunto $S = \{\sin^2(x), \cos^2(x), 1\}$. Utilizando la identidad trigonométrica $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, podemos expresar los elementos del conjunto S de la siguiente manera:

$$(1)sen^2(x) + (1)cos^2(x) + (-1)1 = \boldsymbol{0}.$$

Hemos encontrado una combinación no trivial de los elementos de S que se iguala a la función constante de valor cero. Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto S es linealmente dependiente en el espacio vectorial $V = C[a,b]$.

Proposición 7.4 *Sea V un espacio vectorial. Si $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto de vectores en V con $n \geq 2$, entonces S es linealmente dependiente si y solo si al menos uno de los vectores v_k es combinación lineal de los demás vectores en S.*

Demostración: Supongamos que $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto linealmente dependiente en V. Esto implica que existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, no todos iguales a cero, tales que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}.$$

Sin pérdida de generalidad, asumimos que $\lambda_1 \neq 0$. Multiplicando toda la ecuación por λ_1^{-1}, obtenemos

$$v_1 = -\lambda_1^{-1}\lambda_2 v_2 - \lambda_1^{-1}\lambda_3 v_3 - \ldots - \lambda_1^{-1}\lambda_n v_n.$$

Esto muestra que v_1 puede expresarse como una combinación lineal de los demás vectores en S.

Reciprocamente, supongamos que algún vector, digamos $v_1 \in S$, es combinación lineal de los restantes

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \ldots + \lambda_n v_n.$$

Entonces la ecuación

$$(-1)v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \ldots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}$$

tiene al menos un coeficiente no trivial. Por lo tanto S es linealmente dependiente.

Ejemplo 7.12 *1. Consideremos el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$. Utilizando la proposición anterior para el caso $n = 2$, podemos concluir que dos vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes si y solo si son colineales, es decir, pertenecen a la misma recta.*

2. Consideremos el espacio vectorial $V = C[0,1]$. Utilizando la proposición anterior para el caso $n = 2$, podemos concluir que las funciones $f_1 = 2x$ y $f_2 = |x|$ en $C[0,1]$ son linealmente dependientes. Sin embargo, si consideramos el espacio vectorial $V = C[-1,1]$, las mismas funciones $f_1 = 2x$ y $f_2 = |x|$ resultan ser linealmente independientes.

Observación 7.4 *Sea $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto de n vectores de un espacio vectorial V. Consideremos un vector $v \in [S]$, el cual puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores de S: $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. Los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ que determinan el vector v son únicos si y solo si el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente.*

En efecto, supongamos que S es linealmente independiente y sea $v \in [S]$. Si v se puede expresar de dos formas diferentes:

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

obetenemos

$$(\alpha_1 - \lambda_1)v_1 + \ldots + (\alpha_n - \lambda_n)v_n = \mathbf{0}.$$

Usando que la independencia lineal del conjunto S, obtenemos que $(\alpha_i - \lambda_i) = 0$ para $i = 1, \cdots, n$. Por lo tanto $\alpha_i = \lambda_i$ para $i = 1, \cdots, n$.

Reciprocamente, si todo vector in $[S]$ es puede expresar de manera única como combinación lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_n$, en particular para el vector cero $\mathbf{0}$ tenemos

$$\mathbf{0} = 0v_1 + \cdots + 0v_n$$

Por lo tanto, no existe ninguna combinación lineal de los v_i con coeficientes no todos nulos que sea el vector cero.

Proposición 7.5 *Sea V un espacio vectorial y S un conjunto finito de vectores.*

1. *Si S es linealmente independiente y S_1 es un subconjunto no vacío de S, entonces S_1 también es linealmente independiente.*

2. *Si S_1 es un subconjunto no vacío de S que es linealmente dependiente, entonces S también es linealmente dependiente.*

Demostración:

1. Supongamos que S es linealmente independiente y $S_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un subconjunto no vacío de S. Queremos demostrar que S_1 es linealmente independiente.

   Supongamos, por el absurdo, que S_1 es linealmente dependiente. Esto significa que existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, no todos nulos, tales que

   $$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}.$$

   Podemos completar la ecuación anterior con los restantes vectores de S si es que los hay, multiplicados por el escalar cero, obteniendo una combinación lineal no trivial de todos los elementos de S. En otras palabras, existe una combinación lineal no trivial de los elementos de S igual a $\mathbf{0}$, lo cual contradice la hipótesis de que S es linealmente independiente.

   Por lo tanto, S_1 debe ser linealmente independiente.

2. La prueba del segundo enunciado se deja como ejercicio para el lector.

Proposición 7.6 *Sean $V = \mathbb{R}^n$ y los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ en V donde, $v_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ para $j = 1, 2, \ldots, n$. Consideremos la matriz A de tamaño $n \times n$ cuya j-ésima columna está constituida por las coordenadas del j-ésimo vector v_j. Entonces, los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes si y solo si $|A| = 0$.*

Demostración: Supongamos que los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que v_1 es combinación lineal de los restantes:

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

Realizamos las siguientes operaciones elementales entre las columnas de A: reemplazamos la primera columna A^1 por $A^1 - \sum_{j=2}^{n} \lambda_j A^j$. Esto nos permite obtener una matriz A' con la propiedad de que su primera columna es el vector cero. Por lo tanto, $|A| = |A'| = 0$.

Reciprocamente, supongamos que $|A| = 0$. Consideremos el sistema homogéneo de ecuaciones lineales $AX = \mathbf{0}$, entonces este sistema tiene soluciones no triviales. Por lo tanto, existen reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, no todos iguales a cero tales que:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto es equivalente a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}$. Por lo tanto, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes.

Así, una forma de determinar si n vectores en $\mathbb{R}^n$ son linealmente independientes es construir la matriz A de tamaño $n \times n$ colocando los vectores como columnas de A en cualquier orden y luego calcular $|A|$. Dado que $|A| = |A^t|$, se obtiene el mismo resultado si se colocan los vectores como filas en la matriz.

Corolario 7.2 *Sea $V = \mathbb{R}^3$. Entonces, los vectores v_1, v_2, v_3 son linealmente dependientes si y solo si los 3 vectores se encuentran sobre un mismo plano que contiene al origen de $\mathbb{R}^3$*

7.6. Práctico 8

Práctico 8.

Combinaciones lineales, dependencia e independencia lineal.

Ejercicios sugeridos:

Combinaciones lineales y generadores

1. Investigar si el vector v es combinación lineal del conjunto $\mathcal{A}$ y si lo anterior es posible dar una combinación lineal que lo realice.

   a) $\mathcal{A} = \{(1,2,1);\ (3,-1,5);\ (1,1,0)\}$ y $v = (3,0,6)$.
   b) $\mathcal{A} = \{(1,3,2,1);\ (2,-2,-5,4);\ (2,-1,3,6)\}$ y $v = (2,5,-4,0)$.
   c) $\mathcal{A} = \{2-x,\ 2x-x^2\}$ y $v = 6-5x+x^2$.
   d) $\mathcal{A} = \{3x^3+x,\ -2x^2+x-1,\ 3x^3-2x^2+2x-1\}$ y $v = -3x^3+4x^2+x-2$.
   e) $\mathcal{A} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ y $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   f) $\mathcal{A} = \left\{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -19 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}\right\}$ y $v = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$.

2. Hallar un generador finito del subespacio S, como $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

   a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x+y+z=0\}$.
   b) $S = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \colon p(1-x) = p(1+x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$.
   c) $S = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \colon p(0) = 0\}$.
   d) $S = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times} \colon A$ es simétrica $\}$.
   e) $S = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3} \colon A$ es antisimétrica $\}$.

3. Determinar si el conjunto de vectores $\mathcal{A}$ es un generador del espacio vectorial V.

   a) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = \left\{(1,\pi), \left(\sqrt{2}, e\right)\right\}$.
   b) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A} = \{(0,1,1), (0,0,1),\ (1,1,1),\ (1,-1,1)\}$.
   c) $V = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{A} = \{(-1,2,0,0),\ (2,0,-1,0),\ (3,0,0,4),\ (0,0,5,0)\}$.
   d) $V = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$, $\mathcal{A} = \left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.
   e) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{A} = \{1,\ (x-2),\ (x-2)^2\}$.

4. Determinar si los conjuntos $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ generan el mismo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{A}_1 = \{(1,2,-1),\ (0,1,1),\ (2,5,-1)\}, \quad \mathcal{A}_2 = \{(-2,-6,0),\ (1,1,-2)\}.$$

Conjuntos LI, conjuntos LD y conjuntos generadores.

5. En los siguientes casos determinar si el conjunto $\mathcal{A}$ es linealmente independiente. Cuando no lo sea encontrar un subconjunto linealmente independiente que permita expresar a los restantes vectores como combinación lineal del subconjunto seleccionado.

   a) $\mathcal{A} = \{(1,2,3),\ (0,1,2),\ (1,1,1)\ , (2,3,4)\}$.
   b) $\mathcal{A} = \left\{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

c) $\mathcal{A} = \{p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4\} \subset \mathbb{R}_2[x]$, donde

$$p_1(x) = x^2 + 1, \quad p_2(x) = x^2 + x, \quad p_3(x) = x + 2, \quad p_4(x) = x^2 + 3x.$$

6. Discutir cuándo los siguientes conjuntos $\mathcal{A}$ son linealmente independientes según $a \in \mathbb{R}$. Para los casos donde no lo sean, hallar un subconjunto con la mayor cantidad de elementos posible que sea linealmente independiente.

   a) $\mathcal{A} = \{(a, a^2, 1),\ \ (-1, a, a),\ (0, 2a^2, a^2 + 1)\}$.

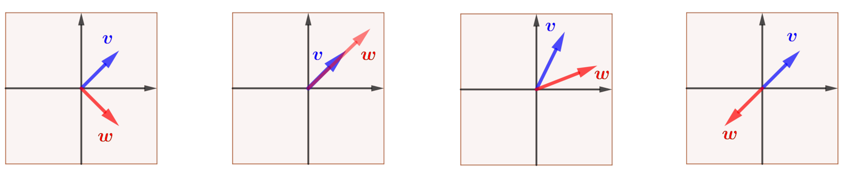
   b) $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix},\ \ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix},\ \ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$.

7. El conjunto $\mathcal{A}$ dado genera un subespacio $S \subset \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$. Eliminar elementos de $\mathcal{A}$ hasta conseguir un generador de S que sea LI.

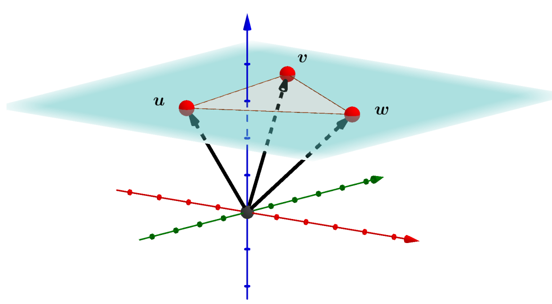
$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

8. En los siguientes ejemplos determine en qué casos el conjunto es LI.

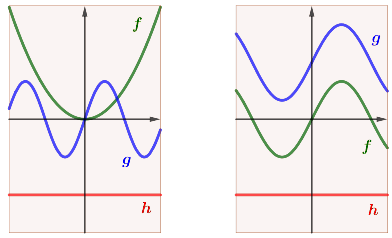
   a) En las siguientes figuras, determine si el conjunto $\{v, w\} \subset \mathbb{R}^2$ es LI.



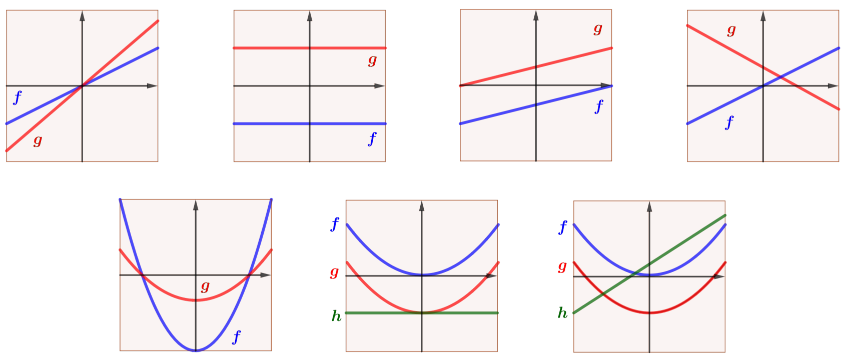
   b) En la siguientes figura, determine si el conjunto $\{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^3$ es LI.



   c) Utilizando las siguientes figuras determine si el conjunto de funciones $\{f, g, h\}$ es LI.



d) En las siguientes figuras se expresan los gráficos (parciales) de funciones polnómicas, determine si $\{f, g\}$ o $\{f, g, h\}$ es un conjunto LI de $\mathbb{R}_2[x]$.



9. Considere la siguiente familia de funciones:

$$\mathcal{A} = \{\mathrm{sen}(x),\ \cos(x),\ \mathrm{sen}(2x),\ \cos(2x)\}\,.$$

Probar que $\mathcal{A}$ es un conjunto LI.

10. Sea V un espacio vectorial.

a) Dado $\mathcal{A} \subset V$ un conjunto LI y $v \in V$ un vector. Probar que $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \{v\}$ es LI si y solo si $v \notin [\mathcal{A}]$.

b) Sean u, v, w tres vectores de V. Probar que $\{u, v, w\}$ es LI si y solo si $\{u + v, v, w - v + u\}$ es LI.

11. Sean $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$ una matriz, $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, \ldots, v_l\}$ un subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{B} = \{Av_1, Av_2, \ldots, Av_l\} \subset \mathbb{R}^m$.

Discutir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $\mathcal{C}$ es linealmente independiente entonces $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.

b) Si $\mathcal{B}$ es linealmente independiente entonces $\mathcal{C}$ es linealmente independiente.

c) Si $\mathcal{C}$ es linealmente dependiente entonces $\mathcal{B}$ también lo es.

En el caso de que alguna de las afirmaciones sea falsa dar un contraejemplo, y estudiar cuál o cuáles hipótesis adicionales sobre A permiten asegurar que la afirmación es verdadera.

12. Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto LI de un espacio vectorial V. Se considera el vector

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i,$$

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

   a) Asumiendo que $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 1$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i - v) = 0$, probar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$.

   b) Bajo la hipótesis que $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 1$, probar que $\{(v_1 - v), (v_2 - v), \ldots, (v_n - v)\}$ es LI.

   c) Si $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ probar que $\{(v_1 - v), (v_2 - v), \ldots, (v_n - v)\}$ es linealmente dependiente.

13. Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\}$ el $\mathbb{R}-$espacio vectorial con las operaciones usuales. Determinar si los siguientes conjuntos son LI.

   a) $\{\sin(x),\ e^x,\ x^2\}$ *b*) $\{\cos(x),\ \cos(x+1),\ \cos(x+2).\}$

14. Probar que el conjunto $\{x^k : k \in \mathbb{N}\}$ es LI en $\mathbb{R}[x]$, siendo $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios.

15. Probar que el conjunto $\{\sin(kx) : k \in \mathbb{N}\}$ es LI en el $\mathbb{R}-$espacio vectorial $\mathcal{F}$ de las funciones de $[0, 2\pi]$ a $\mathbb{R}$.

7.6.1. Solución Práctico 8.

Combinaciones lineales y generadores.

1. a. El vector v es combinación lineal de los elementos de A y la combinación lineal es

$$1.(1,2,1) + 1.(3,-1,5) + (-1)(1,1,0)$$

   c. El vector v es combinación lineal de A y la combinación lineal es

$$2(1,3,2,1) + 1(2,-2,-5,4) + (-1)(2,-1,3,6)$$

   e. El vector v no es combinación lineal de A. Para ver esto, nos preguntamos si existen escalares α, β, γ tales que

$$-3x^3 + 4x^2 + x - 2 = \alpha(3x^3 + x) + \beta(-2x^2 + x - 1) + \gamma(2x - 1)$$

   Para que estos polinomios sean iguales, tenemos que igualar coeficiente a coeficiente y obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3\alpha + 3\gamma = -3 \\ -2\beta - 2\gamma = 4 \\ \alpha + \beta + 2\beta = 1 \\ -\beta - \gamma = -2 \end{cases}$$

   que es incompatible. Es decir, no existen α, β, γ que realicen la combinación lineal.

f. El vector v es combinación lineal de A: Para ver esto, nos preguntamos si existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir de esto, podemos armar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 2 \\ -\beta - 2\gamma = -1 \\ \beta + 2\gamma = 1 \\ \alpha + \gamma = 2 \end{cases}$$

Este sistema es compatible indeterminado y una de las soluciones es $(2, 1, 0)$, es decir, una combinación lineal de los elementos de A que da el vector v es

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. a. Para encontrar un generador, reescribimos al conjunto de la siguiente forma $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x - y\}$. Ahora imponemos esa condición sobre los puntos genéricos (x, y, z) y obtenemos $S = \{(x, y, -x - y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, 0, -x) + (0, y, -y)\} = \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)\}$. Concluimos que todo vector del subespacio S puede escribirse como una combinación lineal del conjunto $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ y por lo tanto, éste es un generador de S.

b. Para encontrar un generador de S veamos primero cómo son los elementos de este conjunto. Sea p un polinomio cualquiera de grado menor o igual a 3, entonces p es de la forma $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Para que $p \in S$, debe cumplirse que $p(1 + x) = p(1 - x)$, es decir

$$a(1 + x)^3 + b(1 + x)^2 + c(1 + x) + d = a(1 - x)^3 + b(1 - x)^2 + c(1 - x) + d$$

Desarrollando los términos, llegamos a que las condiciones sobre los coeficientes de p son $a = 0$ y $c = -2b$. Es decir, $p \in S$ sii $p(x) = bx^2 - 2bx + d = b(x^2 - 2x) + d$,1. Por lo que el conjunto $\{x^2 - 2x, 1\}$ es un generador de S.

d. Un generador de S es el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3. a. El conjunto es un generador de V. Para ver esto, consideramos un vector $(x, y) \in V$ genérico y verificamos que existan escalares α, β tales que

$$\alpha(1, \pi) + \beta(\sqrt{2}, e) = (x, y)$$

Para que esto suceda, deben cumplirse las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha + \sqrt{2}\beta = x \\ \pi\alpha + e\beta = y \end{cases}$$

A partir de esto podemos plantear una matriz y observar que tiene rango 2, por lo tanto el sistema es compatible determinado. Es decir, existen α y β que verifican ambas ecuaciones y por lo tanto, realizan la combinación lineal para cualquier vector (x, y).

b. Es un generador. Análogamente a la parte anterior, nos preguntamos si para cualquier vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ existe una combinación lineal A que nos dé este vector. Eso se traduce a clasificar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_3 + \alpha_4 = x \\ \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 = y \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = z \end{cases}$$

Nuevamente planteando la matriz puede observarse que el sistema es compatible determinado cualquiera sea (x, y, z) y por lo tanto el conjunto A es un generador.

c. Es un generador. Se prueba de forma análoga a la parte anterior.

d. Es un generador. Verificamos que existen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Donde esta última es una matriz genérica. A partir de esto podemos plantear el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\gamma = a \\ \alpha - \gamma = b \\ 2\beta + 3\delta = c \\ \beta + \delta = 1 \end{cases}$$

Vemos que para cualquier $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ esto es un sistema compatible determinado, donde los valores de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quedan determinados en función de las entradas de la matriz genérica.

e. Es un generador.

4. Una forma de probar esto es verificar que podemos construir los elementos de A_2 a partir de los de A_1 y viceversa.

Tenemos que los vectores de A_1 cumplen que

$$(-2, -6, 0) = -2(1, 2, -1) - 2(0, 1, 1)$$

$$(1, 1, -2) = 1(1, 2, -1) - 1(0, 1, 1)$$

Por lo que, a partir de A_2 podemos generar a todo vector generado por estos.

Hay que verificar que vale al revés.

Conjuntos LI, conjuntos LD y conjuntos generadores.

5. a. El conjunto A No es L.I. Para verificar esto, planteamos una combinación lineal de los vectores de A y la igualamos al vector nulo.

$$\alpha_1(1, 2, 3) + \alpha_2(0, 1, 2) + \alpha_3(1, 1, 1) + \alpha_4(2, 3, 4) = (0, 0, 0)$$

A partir de esto, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

que es compatible indeterminado, es decir, existen escalares no todos nulos que realizan la combinación lineal.

Un subconjunto L.I. es $\{(1,2,3),(0,1,2)\}$. Observar que la cantidad de vectores L.I. del conjunto es igual al rango de la matriz correspondiente al sistema.

b. El conjunto A L.I. Para ver esto, razonamos análogamente a la parte anterior y obtenemos un un sistema de 4×4. En este caso, la matriz correspondiente a este sistema tendrá rango 4.

c. No es L.I. y un subconjunto L.I es $\{p_1, p_2, p_3\}$ pues existe una combinación lineal de ellos que da el polinomio p_4.

6. a. El conjunto es L.D. para cualquier valor de a. Para ver esto, planteamos una combinación lineal de los vectores del conjunto y la igualamos al vector nulo. Como en partes anteriores, eso nos da un sistema de ecuaciones y podemos ver que la matriz correspondiente es

$$M = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ a^2 & a & 2a^2 \\ 1 & a & a^2+1 \end{pmatrix}$$

Podemos escalerizarla y ver que tiene rango menor a 3 o estudiar su determinante. Haciendo esto último, llegamos a que $det(M) = 0$ para cualquier valor de a.

Además, un subconjunto L.I. es $\{(a, a^2, 1), (-1, a, a)\}$ pues

$$(0, 2a^2, a^2+1) = 1.(a, a^2, 1) + a.(-1, a, a)$$

b. El conjunto es L.I. siempre que $a \neq 2, -1$. Para ver esto, planteamos una combinación lineal de los elementos igualada al vector nulo:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para resolver este sistema, armamos la siguiente matriz y estudiamos su determinante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $\det(M) = -2a^2 + 2a + 4$. Esto se anula sii $a = -1$ y $a = 2$. Es decir, para $a \neq -1, 2$ el sistema es compatible determinado y por lo tanto el conjunto es L.I. Para los otros valores de a, el conjunto es L.D.

Si $a = 2$ entonces un subconjunto L.I. es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Y si $a = -1$ un subconjunto L.I. es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

7. El conjunto ya es L.I. y genera a todo el espacio de matrices de 2×2

8. c. 1. Las funciones son L.I.
      2. Las funciones son L.D. Podemos observar en el gráfico que g es $f + k$ donde k es una constante (g es simplemente f trasladada hacia arriba). Además, la función h es constante, por lo tanto, podemos multiplicarla por un escalar y obtener la constante k de modo que $g = f + \lambda h$.

   d. 1. Las funciones son L.D. Alcanza observar que ambas son polinomios de grado 1 por el origen, es decir, son de la forma $f(x) = ax$, $g(x) = bx$ donde a y b son constantes no nulas. Es claro que podemos tomar $\lambda = b/a$ y tenemos que $g(x) = \lambda f(x)$.
      2. Las funciones son L.D.
      3. Las funciones son L.I. Tenemos que $f(x) = ax + b$ y $g(x) = ax + c$. Para que fueran L.D. debería existir una combinación no trivial de estas funciones que dé la función nula. Esto no es posible.
      4. Las funciones son L.I. Para ver esto, supongamos que $f(x) = ax$ y $g(x) = cx + d$. Tomamos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y planteamos la siguiente combinación lineal

$$\alpha ax + \beta(cx + d) = 0$$

Para que esto se cumpla para todo $x \in \mathbb{R}$, se debe cumplir lo siguiente

$$\begin{cases} \alpha a + \beta c = 0 \\ \beta d = 0 \end{cases}$$

que es un sistema compatible determinado y por lo tanto la única combinación lineal que da la función nula es la trivial.

      5. Las funciones son L.D. Esto es porque ambas funciones son polinomios de grado 2 y tienen las mismas raíces.
      6. Las funciones son L.D. Pensar análogamente a la parte a.2)
      7. Las funciones son L.I.

9. Lo que queremos probar es que si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ cumplen que

$$\alpha_1 sen(x) + \alpha_2 cos(x) + \alpha_3 sen(2x) + \alpha_4 cos(2x) = 0$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Tenemos que si los coeficientes cumplen la ecuación anterior para todo x, entonces en particular se cumple que:

- Para $x = 0$, la ecuación es: $\alpha_2 + \alpha_4 = 0$
- Para $x = \pi/4$: $\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{2}} + \alpha_3 = 0$
- Para $x = \pi/2$: $\alpha_1 - \alpha_4$
- Para $x = \pi$: $-\alpha_2 + \alpha_4$

Armamos entonces la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

Que tiene rango 4 por lo que el sistema es compatible determinado y la única solución es $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

10. a. Ver manual del curso.
    b. Supongamos que el conjunto $\{u, v, w\}$ es L.I. y sean α, β, γ tales que

$$\alpha(u+v) + \beta v + \gamma(w - v + u) = 0_V$$

Operando llegamos a que entonces debe cumplirse que

$$(\alpha+\gamma)u + (\alpha+\beta-\gamma)v + \gamma w = 0_V$$

Dado que $\{u, v, w\}$ es L.I., tenemos que

$$\begin{cases} \alpha+\gamma = 0 \\ \alpha+\beta-\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto $\alpha = \beta = \gamma = 0$ y concluimos que $\{u+v, v, w-v+u\}$ es un conjunto L.I.
El recíproco es análogo.

11. a. Falso: Esto ocurre únicamente cuando el $rg(A) = n$.
    b. Verdadero. Notar que como $\lambda_1 Av_1 + ... + \lambda_n Av_n = A(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n)$, si existieran $\lambda_1, ..., \lambda_n$ no todos nulos, tales que $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0$, entonces tendríamos que el conjunto B no es L.I.
    c. Verdadero. Es simplemente el contrarrecíproco de la parte anterior.

12. a. Recomendación: plantear una combinación lineal, usar la definición del vector v y reordenar los términos de la suma para usar que el conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ es L.I.
    b. Sean $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tales que

$$\lambda_1(v_1 - v) + ... + \lambda_n(v_n - v) = 0_v$$

Esto podemos reescribirlo como

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n - (\lambda_1 + ... + \lambda_n)v = 0_V$$

Usando la parte anterior, tenemos que $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 0$ y la ecuación anterior queda

$$\lambda_1 v_1 + ... \lambda_n v_n = 0_V$$

Dado que el conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ es L.I., necesariamente $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$
    c. Si $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ entonces alcanza tomar $\lambda_i = a_i$ para obtener

$$\lambda_1(v_1 - v) + ... + \lambda_n(v_n - v) = (\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) - \big(\sum_{i=1}^n \lambda_i\big)v =$$

$$a_1 v_1 + ... + a_n v_v - \big(\sum_{i=1}^n a_i\big)v = v - 1.v = 0$$

13. a. El conjunto es L.I.
    b. El conjunto es L.I.

Ambas partes pueden verificarse razonando como en el ejercicio 9 y considerando tres valores distintos de x.

7.7. Base de un espacio vectorial.

En esta sección, continuaremos estudiando los conjuntos generadores en un espacio vectorial. En particular, nos enfocaremos en conjuntos generadores que además son linealmente independientes. Estos conjuntos especiales se conocen como bases del espacio. A continuación, presentamos la definición correspondiente.

Definición 7.9 *Sea V un espacio vectorial y $B \subset V$. Diremos que B es una* ***base*** *de V, y lo denotaremos por, $B \stackrel{b}{\to} V$, si cumple las siguientes propiedades:*

1. *$[B] = V$.*

2. *B es linealemente independiente.*

Demostraremos que si V es un espacio vectorial con una base de n vectores, entonces cualquier otra base de V también tiene exactamente n vectores. Para demostrar esta afirmación, presentaremos primero la siguiente proposición.

Proposición 7.7 *Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, entonces cualquier conjunto $\{w_1, \ldots, w_m\}$ de vectores en V con $m > n$ es linealmente dependiente.*

Demostración: Supongamos que $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, y consideremos el conjunto $\{w_1, \ldots, w_m\}$ con $m > n$. Tomemos una combinación lineal

$$\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_m w_m = \mathbf{0}$$

Podemos expresar cada vector w_i como una combinación lineal de los vectores en B:

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_{11} v_1 + \alpha_{12} v_2 + \ldots + \alpha_{1n} v_n \\ w_2 &= \alpha_{21} v_1 + \alpha_{22} v_2 + \ldots + \alpha_{2n} v_n \\ &\vdots \\ w_m &= \alpha_{m1} v_1 + \alpha_{m2} v_2 + \ldots + \alpha_{mn} v_n. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la combinación lineal original y utilizando la independencia lineal de B, obtenemos un sistema homogéneo de n ecuaciones con m incógnitas:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\lambda_1 + \ldots + \alpha_{m1}\lambda_m & = 0 \\ & \vdots \\ \alpha_{1n}\lambda_1 + \ldots + \alpha_{mn}\lambda_m & = 0. \end{cases}$$

Dado que $m > n$, el sistema es compatible indeterminado. Esto implica que podemos elegir coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ no todos cero, tal que

$$\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_m w_m = \mathbf{0}.$$

Por lo tanto, el conjunto $\{w_1, \ldots, w_m\}$ es linealmente dependiente.

Corolario 7.3 *Sea V un espacio vectorial. Si $B_1 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, \cdots, w_m\}$ son bases de V. Entonces $m = n$.*

Si el espacio vectorial V posee una base formada por un número finito de vectores, se dice que V es un **espacio vectorial de dimensión finita**; en caso contrario, se dice que V es un **espacio vectorial de dimensión infinita**. Para el caso de dimensión finita, el número n de elementos de cualquier base de V se conoce como la **dimensión del espacio vectorial** [3], y lo denotamos por $\dim(V) = n$. Sabemos, por el resultado anterior, que está bien definido.

Ejemplo 7.13 *Mostremos algunos conjuntos de vectores que son bases en sus respectivos espacios.*

1. $V = \mathbb{R}^2$

   a) *Base 1:* $\{(1,0),(0,1)\}$ *(base canónica).*

   b) *Base 2:* $\{(2,3),(-1,2)\}$.
   Por lo tanto, $\dim(V) = 2$.

2. $V = \mathbb{R}^3$

   a) *Base 1:* $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *(base canónica).*

   b) *Base 2:* $\{(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1)\}$.
   Por lo tanto, $\dim(V) = 3$.

3. $V = \mathbb{R}_2[x]$,

   a) *Base 1:* $\{1, x, x^2\}$. *(base canónica).*

   b) *Base 2:* $\{1+x, x-x^2, 1+x^2\}$.
   Por lo tanto, $\dim(V) = 3$.

Ejemplo 7.14 1. *Sea* $W = \{(\alpha, \beta-\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, *un subconjunto de* $\mathbb{R}^3$. *Es evidente que* W *es un subespacio de* $\mathbb{R}^3$. *Encontremos una base para este subespacio, presentando un conjunto de vectores linealmente independientes que generen* W.

- *Para cada* $(\alpha, \beta-\alpha, \beta) \in W$, *observamos que*

$$(\alpha, \beta-\alpha, \beta) = (0, \beta, \beta) + (\alpha, -\alpha, 0) = \beta(0,1,1) + \alpha(1,-1,0).$$

  Por lo tanto, $W = [(0,1,1),(1,-1,0)]$.

- *Demostraremos ahora que el conjunto* $\{(0,1,1),(1,-1,0)\}$ *es linealmente independiente.*

$$\lambda_1(0,1,1) + \lambda_2(1,-1,0) = (0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

2. ***Ejercicio 6. Segundo Parcial GAL1 interactiva. Noviembre 2023.*** *Se considera el conjunto* $S_b := \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3} \mid A$ *es simétrica y de traza* $b\}$ *que depende del parámetro* $b \in \mathbb{R}$.

   - *Probar que existe un único valor del parámetro* b *para el cual* S_b *es un subespacio vectorial de* $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$, *indicando cuál es dicho valor.*
   - *Para el valor de* b *hallado en la parte (a), hallar una base de* S_b.
   - *Para el valor de* b *hallado en la parte (a), hallar la dimensión de* S_b.

[3] El espacio vectorial $V = \{\mathbf{0}\}$ se dice que tiene dimensión cero pues no contiene vectores linealmente independientes.

Solución: *La matriz nula tiene traza 0, de donde b debe ser cero para que S_b sea un subespacio vectorial. Las matrices simétricas de 3×3 de traza cero son de la forma:*

$$S_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \delta & \epsilon \\ \gamma & \epsilon & -\alpha-\delta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R} \right\}$$

Este conjunto es un subespacio vectorial de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ (se puede verificar directamente viendo que es cerrado bajo sumas y productos por escalares o con lo que se pide en las partes (b) y (c)).

Una base de S_0 está formada por las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cualquier matriz en S_0 puede expresarse como una combinación lineal de estas matrices con coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$. Como esta base tiene 5 vectores, la dimensión de S_0 es 5.

Importancia de las bases en los espacios vectoriales.

Tener un conjunto B en el espacio vectorial V de dimensión finita n que permita expresar de manera única cada elemento de V como combinación lineal de los elementos de B tiene varias ventajas. Al ampliar nuestro estudio a otras estructuras algebraicas distintas a los espacios vectoriales, no es común encontrar conjuntos con estas características que nos permitan describir por completo la estructura algebraica en cuestión.

A continuación, presentamos un resumen de las ideas fundamentales relacionadas con este concepto, seguido de una justificación.

1	Cualquier base de V tiene n vectores.
2	Cualquier conjunto linealmente independiente con n vectores es una base de V.
3	Cualquier conjunto con n vectores que genera a V es una base de V.
4	No existen conjuntos linealmente independientes en V con más de n. vectores
5	No existen conjuntos con menos de n vectores que generen a V.
6	Cualquier subconjunto de V es un subconjunto de una base de V.
7	Cualquier conjunto que genera a V tiene como subconjunto una base de V.
8	Cualquier subespacio de V es de dimensión finita y su dimensión es menor o igual que n.

Además, si $U, G \subseteq V$ con U linealmente independiente y G un conjunto generador de V. Entonces:

1. Si $U \subseteq G$, entonces existe una base B tal que $U \subseteq B \subseteq G$.
2. U está contenido en una base de V.
3. G contiene una base de V.

4. Todo espacio vectorial tiene una base.

Entonces, el número de elementos de U es menor o igual que el de G. En particular, si B es una base, entonces $|U| \leq |B| \leq |G|$.

Justificación:

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n.

1. **Todo conjunto $B = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ formado por n vectores lineamente independiente es una base de V.**

   Para demostrar esto, basta mostrar que $V = [B]$, es decir, que cualquier vector $v \in V$ puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores en B. Sea $v \in V$, consideremos el conjunto $\{w_1, w_2, \cdots, w_n, v\}$ y utilicemos la proposición anterior para concluir que es linealmente dependiente. Por lo tanto, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$, no todos nulos, tales que:

   $$\lambda_1 w_1 + \cdots \lambda_n w_n + \lambda_{n+1} v = \mathbf{0}$$

   Afirmación: $\lambda_{n+1} \neq 0$: Si $\lambda_{n+1} = 0$, entonces tendríamos una combinación no trivial de los vectores $w_1, w_2, \cdots, w_n$, lo cual es imposible, pues B es linealmente independiente por hipótesis.

   Por lo tanto, podemos expresar v en términos de $w_1, w_2, \cdots, w_n$ de la siguiente manera:

   $$v = -\lambda_1 \lambda_{n+1}^{-1} w_1 + \cdots - \lambda_n \lambda_{n+1} w_n^{-1}$$

   Por lo tanto, B genera el espacio V y, por definición, es una base.

2. **Cada subespacio vectorial W de V es de dimensión finita y $\dim(W) \leq \dim(V)$.**

   En el caso en que $W = \{\mathbf{0}\}$, esto es evidente, ya que por definición $\dim(V) \geq 0$. Ahora analicemos el caso en que $W \neq \{\mathbf{0}\}$.

   Afirmación: Si W es un subespacio no nulo V, entonces W admite un base.

   Consideremos un vector no nulo arbitrario $w_1 \in W$. Si $W = [w_1]$, entonces $\{w_1\}$ es una base de W. Si el espacio generado por w_1 no es igual a W, entonces existe un vector $w_2 \in W$ que no es combinación lineal de w_1. Si consideramos ahora el conjunto w_1, w_2, es fácil notar que es linealmente independiente. Si $W = [w_1, w_2]$, entonces w_1, w_2 es una base de W. Si el espacio generado por $\{w_1, w_2\}$ no es igual a W, entonces existe un vector $w_3 \in W$ que no es combinación lineal de w_1 y w_2. Podemos verificar nuevamente que el conjunto $\{w_1, w_2, w_3\}$ es linealmente independiente.

   El razonamiento anterior se puede repetir, pero no de manera indefinida, ya que de lo contrario encontraríamos un conjunto formado por $n + 1$ vectores linealmente independientes, lo cual es imposible ya que $\dim(V) = n$.

   Por lo tanto, existe una base $\{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ de W. Solo nos resta mostrar que $p \leq n$. Si no lo fuera, tendríamos p vectores linealmente independientes en V, lo cual es una contradicción.

3. Como consecuencia inmediata del item anterior, **si W es un subespacio de V tal que $\dim W = \dim V$, entonces tenemos que $W = V$.**

4. **Cualquier conjunto de vectores que genera a V contiene una base de V.**

   Sea $A = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ un conjunto de vectores tal que $V = [A]$. Si A es linealmente independiente, entonces A es una base de V. En caso contrario, existe algún vector de A que es combinación lineal de los restantes vectores en A, podemos suponer sin pérdida de generalidad que dicho vechor es v_p. Considermos el conjunto $A_p = A \setminus \{v_p\}$. Entonces, $A_p = A \setminus \{v_p\}$ genera a V por la Proposicion 7.3.

   Ahora bien, si A_p es linealmente independiente, entonces A_p es una base de V. En caso contrario repetimos el mismo argumento anterior. Es decir, existe un vector en $A_p = \{v_1, v_2, \cdots, v_{p-1}\}$ que es una combinación lineal de los demás vectores.

   Supongamos que dicho vector es v_{p-1}. Construimos el conjunto $A_{p-1} = A \setminus \{v_{p-1}, v_p\}$ de tal manera que A_{p-1} genera a V. Repitiendo este proceso, en algún momento obtendremos un conjunto A_j con $1 \leq j \leq p-1$ que es linealmente independiente y ese conjunto será la base buscada.

5. Como consecuencia inmediata del item anterior, **cualquier conjunto con n vectores que genera a V, es una base de V.**

Ejemplo 7.15 *1. **Ejercicio 2. Segundo Parcial GAL1 interactiva. Noviembre 2023.** Se consideran los subconjuntos $L := \{1, 1+x, 1+x+x^2\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$ y $G := L \cup \{x^3, x^3+x^2, x^3+x^2+x\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$. Entonces:*

(A) Existe una única base B de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que $L \subseteq B \subseteq G$.

(E) No existe ninguna base B de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que $L \subseteq B \subseteq G$.

(I) Existen exactamente dos bases distintas B_1, B_2 de $\mathbb{R}_3[x]$ tales que $L \subseteq B_1 \subseteq G$ y $L \subseteq B_2 \subseteq G$.

(O) Existen exactamente tres bases distintas B_1, B_2, B_3 de $\mathbb{R}_3[x]$ tales que $L \subseteq B_1 \subseteq G$, $L \subseteq B_2 \subseteq G$ y $L \subseteq B_3 \subseteq G$.

***Solución:** El conjunto L es linealmente independiente. De hecho, es una base de $\mathbb{R}_2[x]$, y por lo tanto, para obtener una base de $\mathbb{R}_3[x]$, basta con agregar algún polinomio de grado 3 para obtener un conjunto linealmente independiente de cuatro vectores (es decir, una base de $\mathbb{R}_3[x]$). Entonces, existen exactamente tres bases intermedias $B_1 := L \cup \{x^3\}$, $B_2 := L \cup \{x^3+x^2\}$ y $B_3 := L \cup \{x^3+x^2+x\}$.*

*2. **Ejercicio 5. Examen GAL1 interactiva. Diciembre 2023.** Se considera V el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_4[x]$ de los polinomios de grado menor o igual a 4. Se consideran los subconjuntos $L = \{x^4+2x^2+1, x^2+1, x^4+x^2\}$ y $G = L \cup \{2x^4+x^3+x, x^4+x^3-x, x^4+1\}$. Entonces:*

(A) Existe una única base B de V tal que $L \subseteq B \subseteq G$.

(E) Existe al menos una base B de V tal que $B \subseteq G$, pero ninguna contiene a L.

(I) Existe al menos una base B de V tal que $L \subseteq B$, pero ninguna está contenida en G.

(O) Para todo $B \subseteq G$, B no es base de V, y para todo $B \supseteq L$, B no es base de V.

(U) Existen exactamente dos bases B_1, B_2 de V tales que $L \subseteq B_1 \subseteq G$ y $L \subseteq B_2 \subseteq G$.

(Y) Existen exactamente tres bases B_1, B_2, B_3 de V tales que $L \subseteq B_1 \subseteq G$, $L \subseteq B_2 \subseteq G$ y $L \subseteq B_3 \subseteq G$.

***Solución:** Empezamos por observar que $x^4+2x^2+1 = (x^2+1)+(x^4+x^2)$. Entonces, el conjunto L no es linealmente independiente y no existen bases que contengan a L. Descartamos entonces las opciones (A), (I), (U) e (Y). Resta entonces saber si la correcta es la (E) o la (O). Mientras la (E) afirma que hay bases incluidas en G, la (O) afirma que no. Como los generadores siempre contienen al menos una base, lo que decide cuál de las dos es cierta es averiguar si G es o no un generador de $R_4[x]$. Como ya sabemos que en L el polinomio x^4+2x^2+1 es redundante, en definitiva G es generador de $R_4[x]$ si y sólo* *si $G' := \{x^2+1, x^4+x^2, 2x^4+x^3+x, x^4+x^3-x, x^4+1\}$ lo es. Como este conjunto tiene 5 polinomios en un espacio de dimensión 5, averiguar si es generador equivale a averiguar si es linealmente independiente. Basta con saber si sus coordenadas en alguna base ordenada son linealmente independientes, y para esto nada más fácil que elegir la base $B := \{x^4, x^3, x^2, x, 1\}$. Concluimos que G' es linealmente independiente si y sólo si el siguiente determinante es no nulo:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

(Ejercicio: encontrar las transformaciones elementales que justifican el cálculo del determinante). La respuesta correcta es la (E).

Solución alternativa: *Otra forma conceptualmente elemental pero menos eficiente de probar que $G' = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ es un generador consiste en plantear el sistema en $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ con parámetros a, b, c, d, e que corresponde a igualar coeficiente a coeficiente ambos miembros de esta ecuación:*

$$\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 + \delta p_4 + \epsilon p_5 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Para probar que G' es un generador de $R_4[x]$, se debe demostrar que estos sistemas son todos compatibles para todos los valores de los parámetros a, b, c, d, e, ya que esto prueba, por definición, que cualquier polinomio de $R_4[x]$ es combinación lineal de los vectores de G'. Además, como G' es una base, se deben encontrar sistemas que sean compatibles y determinados (la matriz del sistema tiene rango 5).

Si en lugar de quitar a G un polinomio de L para obtener un $G' \subset G$ de 5 polinomios, trabajan directamente con G, entonces el sistema que se obtiene tiene una incógnita más. Esos sistemas son todos compatibles e indeterminados (hay infinitas formas de expresar a cada polinomio de $R^4[x]$ como combinación lineal de los polinomios de G).

3. ***Ejercicio 5. Examen GAL1 interactiva. Febrero 2024.*** *Sean los conjuntos $L \subseteq G \subseteq V$ tales que:*

$$V := \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3} \mid A = A^t \text{ y } tr(A) = 0\}$$

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

y

$$G := L \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Entonces:

(A) Existe una única base B de V tal que $L \subseteq B \subseteq G$.

(E) Existe al menos una base B de V tal que $B \subseteq G$ pero ninguna contiene a L.

(I) Existe al menos una base B de V tal que $L \subseteq B$ pero ninguna está contenida en G.

(O) Para todo $B \subseteq G$, B no es base de V y para todo $B \supseteq L$, B no es base de V.

(U) Existen exactamente dos bases B_1, B_2 de V tales que $L \subseteq B_1 \subseteq G$ y $L \subseteq B_2 \subseteq G$.

(Y) Existen exactamente tres bases B_1, B_2, B_3 de V tales que $L \subseteq B_1 \subseteq G$, $L \subseteq B_2 \subseteq G$ y $L \subseteq B_3 \subseteq G$.

Solución: *Empezamos por observar que L es linealmente independiente. En efecto, si planteamos una combinación lineal de estas tres matrices cuyo resultado sea la matriz nula:*

$$\alpha\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

La segunda se debe multiplicar por 0 (es la única que tiene algo no nulo en posición 1,2). Entonces $\beta = 0$ y la combinación lineal es entre la primera y la tercera. De nuevo, entre esas dos la única que tiene algo no nulo en posición 2,2 es la primera, así que $\alpha = 0$. Finalmente, en la combinación lineal está solamente la tercera matriz, que para obtener la matriz nula se la debe también multiplicar por $\gamma = 0$. Como todo conjunto linealmente independiente se extiende a una base, ya sabemos que las opciones (E) y (O) no son correctas.

Una matriz genérica de V tiene la forma:

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&-a-d\end{pmatrix}$$

ya que debe ser simétrica y las entradas de su diagonal deben sumar 0. Entonces, la dimensión de V es 5 y ya conocemos que L es un conjunto LI con 3 elementos en V. Para que G sea un generador de V es necesario y suficiente que contenga alguna base de V, es decir, un linealmente independiente con 5 matrices.

Por consideraciones similares a las que aplicamos a L, es fácil observar que:

$$L\cup\left\{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right\}$$

es linealmente independiente. En efecto, si planteamos la combinación lineal:

$$\alpha\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}+\epsilon\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

deducimos primero que $\delta = 0$ ya que la única matriz que tiene algo no nulo en posición 2,3 es la que está multiplicada por δ. De igual modo se deduce luego que $\epsilon = 0$ y luego ya reducimos la expresión a una combinación lineal que solo involucra matrices de L.

Por lo tanto, esas 5 matrices forman una base de V. Entonces, G es un generador de V y existen bases intermedias entre L y G. La opción (I) también es incorrecta y solo resta averiguar cuántas bases intermedias hay. Ya tenemos una base intermedia.

Siguiendo las mismas ideas, se puede verificar que:

$$L\cup\left\{\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\-1&1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right\}$$

es linealmente independiente y es entonces otra de las bases intermedias. La tercera posibilidad sería con:

$$L \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

pero este conjunto es linealmente dependiente ya que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Concluimos entonces que existen exactamente dos bases intermedias y la respuesta correcta es (U).

7.7.1. Rango de una matriz.

Usando las herramientas y definiciones que hemos establecido en este capítulo, retomemos un concepto fundamental de este curso: el rango de una matriz y su relación con los sistemas de ecuaciones lineales.

Sea A un matriz de m filas, n columnas y coeficientes reales:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Observemos que cada uno de los vectores (fila) $v_{Ai} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ con $1 \le i \le m$ es un vector en $\mathbb{R}^n$, mientras que cada uno de los vectores (columna) $v^A{}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ con $1 \le j \le n$ es un vector en $\mathbb{R}^m$.

Espacio fila de A: En $\mathbb{R}^n$ podemos considerar el espacio generado por los vectores v_{Ai}, llamado el espacio fila de matriz A, denotado por $[\{v_{A1}, v_{A2}, \cdots, v_{Am}\}]$. Es decir,

$$[\{v_{A1}, v_{A2}, \cdots, v_{Am}\}] = \{\lambda_1 v_{A1} + \cdots + \lambda_m v_{Am},\ \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

Espacio columna de A: En $\mathbb{R}^m$ podemos considerar el espacio generado por los vectores $v^A{}_j$, llamado el espacio columna de matriz A, denotado por $[\{v^A{}_1, v^A{}_2, \cdots, v^A{}_n\}]$. Es decir,

$$[\{v^A{}_1, v^A{}_2, \cdots, v^A{}_n\}] = \{\lambda_1 v^A{}_1 + \cdots + \lambda_m v^A{}_n,\ \lambda_j \in \mathbb{R}\}$$

Obviamente, el espacio fila de una matriz es el espacio columna de su transpuesta y viceversa.

Ejemplo 7.16 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *El espacio fila de A es*

$$[(3,4,1),(1,2,1)] = \{\lambda_1(3,4,1) + \lambda_2(1,2,1) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

es un subespacio de dimensión 2. El espacio columna de A es

$$[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}] = [\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}] = \{\lambda_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}] = \mathbb{R}^2.$$

Su dimensión también es 2.

Ahora, si A y B son matrices equivalentes por filas, significa que las filas de B son combinaciones lineales de las filas de A, entonces $[\{v_{B1}, v_{B2}, \cdots, v_{Bm}\}] \subseteq [\{v_{A1}, v_{A2}, \cdots, v_{Am}\}]$. Además, las filas de B también son combinaciones lineales de las filas de A, entonces $[\{v_{A1}, v_{A2}, \cdots, v_{Am}\}] \subseteq [\{v_{B1}, v_{B2}, \cdots, v_{Bm}\}]$. Este mismo razonamiento se aplica a las matrices equivalentes por columnas. Podemos resumir lo anterior en la siguiente proposición:

Proposición 7.8 *Sean A y B dos matrices de tamaño $m \times n$. Si A y B son equivalentes por filas (columnas), entonces el espacio fila (columna) de A es igual al espacio fila(columna) de B.*

Es importante resaltar que dos matrices equivalentes por filas tienen el mismo espacio fila pero su espacio columna eventualmente podría ser diferente.

Corolario 7.4 *Si A' es la forma escalerizada reducida por filas de la matriz A. Entonces el espacio fila de A es igual al espacio fila de A'.*

Si A' es la forma escalonada reducida por filas de la matriz A, entonces el conjunto de vectores (fila) no nulos de A' forma un conjunto linealmente independiente. En consecuencia, este conjunto de vectores forma una base para el espacio fila de A' y, según la proposición anterior, también forma una base para el espacio fila de A. Recordemos, sin embargo, que el rango de la matriz A se define como la cantidad de escalones de la forma escalerizada (reducida) de A que se obtiene al aplicar el método de Gauss (Jordan). Por lo tanto, el rango de A es igual a la dimensión del espacio fila de A.

Este importante resultado se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 7.2 *Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ con coeficientes reales. Entonces el $Rg(A)$ es igual a la dimensión del espacio fila de A.*

La igualdad en las dimensiones de los espacios fila y columna del ejemplo anterior no es un caso aislado. De hecho, esto ocurre siempre y podemos formalizarlo mediante el siguiente teorema.

Teorema 7.3 *Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ con coeficientes reales. Entonces la dimensión del espacio fila y del espacio columna son iguales* [4].

Invertibilidad y rango de una matriz.

Ahora podemos exponer (a modo de resumen con lo ya obtenido en la primera parte de estas notas) la relación entre la existencia de la inversa de una matriz, su rango, los conjuntos formados por sus filas y columnas y los sistemas de ecuaciones lineales. Las siguientes condiciones son equivalentes para una matriz $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$:

1. A es invertible.
2. A es equivalente a la matriz identidad I_n.
3. $m = n$ y el sistema de ecuaciones lineales $AX = \mathbf{0}$ tiene sólo la solución trivial.

[4]No daremos una demostración del terorema pero si una guia de pasos para completar su demostración. El lector interesado puede completar los detalles. 1 Considerar los vectores fila y columna de la matriz A. 2 Suponer que el espacio fila de A tiene dimensión r y encontrar una base para este espacio. 3 Escribir los vectores fila de A en términos de la base encontrada. 4 Reescribir el sistema de ecuaciones vectoriales correspondiente. 5 Considerar las entradas de la primera columna de la matriz A y obtener el sistema de ecuaciones correspondiente. 6 Escribir el sistema de ecuaciones en forma de vector. 7 Repetir los pasos 5 y 6 para las demás columnas de la matriz A. 8 Definir los vectores columna correspondientes. 9 Concluir que la dimensión del espacio fila de A es menor o igual que la dimensión del espacio columna de A. 10 Repetir los pasos anteriores para la matriz transpuesta A^t. 11 Concluir que la dimensión del espacio fila de A es igual a la dimensión del espacio columna de A.

4. $m = n$ y el sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ es compatible determinado para cada $B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times 1}$.
5. $\det(A) \neq 0$.
6. Las filas de A forman una base de $\mathbb{R}^n$.
7. $m = n$ y las filas de A forman un conjunto generador de $\mathbb{R}^n$.
8. $m = n$ y las filas de A son linealmente independientes.
9. $m = n =$ dimensión del espacio fila.
10. $m = n = Rg(A)$.
11. Las columnas de A forman una base de $\mathbb{R}^m$.
12. $m = n$ y las columnas de A forman un conjunto generador de $\mathbb{R}^m$.
13. $m = n$ y las columnas de A son linealmente independientes.
14. $m = n =$ dimensión del espacio columna.
15. $m = n$ y existe una matriz B tal que $BA = I$.
16. $m = n$ y existe una matriz B tal que $AB = I$.

Resumen.	**Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ con coeficientes reales.**
1	Los espacios fila y columna de la matriz A no tienen que ser necesariamente iguales. Sin embargo, sus dimensiones sí serán las mismas.
2	Los vectores fila no nulos de la forma escalonada reducida de A forman una base del espacio fila de A.
3	**Algoritmo para determinar una base del espacio formado por un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ en $\mathbb{R}^n$:** Paso 1: Considerar la matriz A cuyas filas sean los vectores dados $v_1, v_2, \ldots, v_m$. La matriz será de tamaño $m \times n$. Paso 2: Obtener la forma escalonada reducida por filas de la matriz A mediante operaciones elementales. Paso 3: Los vectores distintos de cero de la forma escalonada reducida de la matriz A forman una base para el espacio generado por los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_m$.
4	La dimensión del espacio fila (columna) se conoce como el rango por filas (columnas) de A. El rango de A es igual al rango por filas y por columnas de la matriz A.
5	El rango de A siempre está acotado: $0 \leq \text{Rango}(A) \leq \text{mín}\{n, m\}$.
6	Caso $m = n$: 1. Si $\det(A) = 0$, entonces las n filas y las n columnas de A forman conjuntos linealmente dependientes, y en este caso, el rango de A es menor que n. 2. Si $\det(A) \neq 0$, entonces las n filas y las n columnas de A forman conjuntos linealmente independientes, y en este caso, el rango de A es exactamente igual a n.

Ejemplo 7.17 1. ***Ejercicio 7 (Verdadero-falso). Examen GAL1. Febrero 2016.*** *Determine si la siguiente afirmación es veradera o falsa:*

El conjunto $\{(0,k,-4),(-1,1,k),(1,-2,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ *es linealmente independiente si y solo si* $k \neq 2$.

Solución: *Falsa. En efecto, sea* $A = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ k & 1 & -2 \\ -4 & k & 0 \end{pmatrix}$ *la matriz conformada por los tres vectores columna* $(0,k,-4)$, $(-1,1,k)$ *y* $(1,-2,0)$. *Dado que* $det(A) = k^2-4$, *el conjunto* $(0,k,-4),(-1,1,k),(1,-2,0) \subseteq \mathbb{R}^3$ *es linealmente independiente si y solo si* $k^2-4 \neq 0$, *es decir, si y solo si* $k \neq 2$ *y* $k \neq -2$.

2. ***Ejercicio 2. Examen GAL1. Diciembre 2023.*** *Sea la matriz* A *dependiendo de los parámetros reales* s *y* t, *definida por:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & t+s \end{pmatrix}$$

Indicar la opción verdadera:

(A) El rango de A *es 3 para todo* s *y* t *reales.*

(B) El rango de A *solo toma valores en el conjunto {0, 1, 2} para todo* s *y* t *reales.*

(C) Si $t = -2$, *el rango de* A *es 2 y la tercera fila de* A *es combinación lineal de las otras.*

(D) Si $s = 1$, *el rango de* A *es 2 y la primera fila de* A *es combinación lineal de las otras.*

(E) Si $t = 1$, *el rango de* A *es 1 y la tercera fila de* A *es combinación lineal de las otras.*

Solución: *Se puede verificar fácilmente que* $|A| = 2t+4$. *Entonces,* $|A| = 0$ *si y solo si* $t = -2$. *En este caso, la matriz determinada por*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & s-2 \end{pmatrix}$$

es equivalente por filas a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A *es igual a 2 y la tercera fila es la primera menos la segunda fila. Por lo tanto la opción correcta es* C.

7.7.2. Sumas directas.

Recordemos que dados dos subespacios V_1 y V_2 de un espacio vectorial V, podemos definir el subespacio suma $V_1 + V_2$ como el conjunto de todos los vectores obtenidos al sumar un vector de V_1 con un vector de V_2. Sin embargo, ahora nos interesa explorar un tipo muy particular de sumas, conocidas como sumas directas. La suma directa de V_1 y V_2 se presenta cuando cada vector en el subespacio suma puede ser expresado de forma única como una suma de vectores, uno tomado de V_1 y otro tomado de V_2. Esto nos permite descomponer el espacio vectorial en una manera única y bien estructurada.

Definición 7.10 *Dados los subespacios* V_1 *y* V_2, *el subespacio suma de ellos se llama* ***suma directa*** *cuando todo vector de él puede expresarse de forma única como suma de vectores de los subespacios* V_1 *y* V_2. *Cuando la suma es directa, se denota como* $V_1 \oplus V_2$.

Es importante destacar que la definición de suma directa se puede extender para una cantidad finita de sumandos. Es decir, si tenemos subespacios $V_1, V_2, \ldots, V_n$, la suma directa de estos subespacios se denota como $V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$, y se cumple la propiedad de que cada vector en el subespacio suma puede ser expresado de forma única como una suma de vectores, uno tomado de cada subespacio V_i.

Proposición 7.9 *Sean V_1 y V_2 dos subespacios de V tales que $V = V_1 + V_2$. Entonces $V = V_1 \oplus V_2$ si y solo si $V_1 \cap V_2 = \mathbf{0}$.*

Demostración: ($\Rightarrow$) Sea $v \in V_1 \cap V_2$, luego $-v \in V_1 \cap V_2$. Por lo tanto, $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = v + (-v)$ y por definición de suma directa, $\mathbf{0} = v = -v$. Entonces, $V_1 \cap V_2 = \mathbf{0}$.

($\Leftarrow$) Supongamos $v = v_1 + v_2$ y $v' = v_1' + v_2'$ con $v_1, v_1' \in V_1$ y $v_2, v_2' \in V_2$. Luego, $v_1 - v_1' = v_2 - v_2' \in V_1 \cap V_2$, entonces por hipótesis $v_1 - v_1' = v_2 - v_2' = \mathbf{0}$, lo que prueba que la suma es directa.

La importancia de trabajar con sumas deirectas se evidencia en el siguiente teorema·

Teorema 7.4 *Si $V = V_1 \oplus V_2$ y B_1 y B_2 son bases de V_1 y V_2 respectivamente, entonces $B = B_1 \cup B_2$ es una base de V. Además, si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces* $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.

Demostración: Supongamos que $B_1 = \{v_1, \ldots, v_m\}$ y $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ son bases de V_1 y V_2, respectivamente. Demostraremos que $B = B_1 \cup B_2$ genera V y es linealmente independiente.

Para mostrar que B genera V, consideremos un vector arbitrario v en V. Por definición de suma directa, $v = v_1 + v_2$ para algún $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$. Dado que B_1 es una base de V_1 y B_2 es una base de V_2, existen combinaciones lineales únicas de los elementos de B_1 y B_2 que representan a v_1 y v_2, respectivamente. Por lo tanto, v puede expresarse como una combinación lineal de los elementos de B.

A continuación, demostraremos que B es linealmente independiente. Supongamos que tenemos una combinación lineal de los elementos de B igualada a $\mathbf{0}$:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m + b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_nw_n = \mathbf{0}$$

donde $v_i \in B_1$, $w_i \in B_2$ para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, y a_i y b_j son reales.

Observamos que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m = -(b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_nw_n).$$

Por lo tanto, $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m \in V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$. De manera análoga, $b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_nw_n \in V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$.

Concluimos que $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$ utilizando la independencia lineal de B_1. De manera similar, deducimos que $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$.[5]

Ejemplo 7.18 [6]

1. ***Ejercicio 2.2 (Desarrollo). Examen GAL1. Julio 2017.***

   En el espacio vectorial $V = \mathbb{R}_3[x]$, se consideran los subespacios $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(0) = p(1) = 0\}$ y $S_2 = \left[x^3 - x^2, x + 1\right]$. Halle $S_1 \cap S_2$. ¿Es $\mathbb{R}_3[x] = S_1 \oplus S_2$?

   Solución: *En el espacio vectorial $V = \mathbb{R}_3[x]$, consideramos los subespacios $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(0) = p(1) = 0\}$ y $S_2 = [x^3 - x^2, x + 1]$. Ahora, buscamos encontrar $S_1 \cap S_2$ y determinar si $\mathbb{R}_3[x] = S_1 \oplus S_2$.*

[5] La demostración anterior puede generalizarse para una suma directa formada por una cantidad finita de sumandos. Es decir, si tenemos un espacio vectorial V que es la suma directa de subespacios $V_1, V_2, \ldots, V_n$, y si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ son bases de $V_1, V_2, \ldots, V_n$ respectivamente, entonces la unión de estas bases, $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$, también forma una base de V. Además, si V es de dimensión finita, se cumple que la dimensión de V es igual a la suma de las dimensiones de $V_1, V_2, \ldots, V_n$, es decir, $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2 + \ldots + \dim V_n$.

[6] Las soluciones presentadas fueron presentadas por el equipo responsable-coordinador en el semestre respectivo.

Para $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in S_1$, *las condiciones* $p(0) = p(1) = 0$ *implican* $d = 0$ *y* $a + b + c + d = 0$. *De este modo,* $c = -b - a$ *y* $d = 0$, *lo que nos lleva a* $p(x) = a(x^3 - x) + b(x^2 - x)$.

Para $p(x) \in S_2$, *existen* α *y* β *en* $\mathbb{R}$ *tales que* $p(x) = \alpha(x^3 - x^2) + \beta(x + 1)$. *Entonces, si* $p(x) \in S_1 \cap S_2$, *existen* a, b, α, *y* β *en* $\mathbb{R}$ *tales que:*

$$a(x^3 - x) + b(x^2 - x) = \alpha(x^3 - x^2) + \beta(x + 1)$$

Utilizando la propiedad de igualdad de polinomios, deducimos que necesariamente $\beta = 0$, *y por lo tanto:*

$$ax^3 + bx^2 + (-a - b)x = \alpha x^3 - \alpha x^2.$$

Mediante el mismo razonamiento, obtenemos $a = -b = \alpha$, *lo que implica que* $p(x) = a(x^3 - x^2)$ *con* $a \in \mathbb{R}$. *Concluimos así que* $S_1 \cap S_2 = [x^3 - x^2]$.

Sin embargo, $\mathbb{R}_3[x]$ *no es la suma directa de* $S_1 \oplus S_2$, *ya que, como se mostró anteriormente,* $S_1 \cap S_2 \neq \{\boldsymbol{0}\}$.

2. ***Ejercicio 8 (Desarrollo). Examen GAL1. 06 Diciembre 2017.***

   Si $V = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$, $S_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$, $S_2 = \{\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}$,

   a) *Hallar bases y la dimensión de* S_1 *y* S_2.

   b) *Investigar si* $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} = S_1 \oplus S_2$.

   Solución: *Dado que el conjunto*

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

es linealmente independiente y, además, genera S_1, *podemos afirmar que constituye una base, lo que implica que* $\dim(S_1) = 2$.

Por otro lado,

$$\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y, además, el conjunto

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

es linealmente independiente. Por lo tanto, una base de S_2 *está dada por el conjunto*

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

y su dimensión es 2.

Es evidente que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto, $S_1 \cap S_2 \neq \{\mathbf{0}\}$*, y entonces la suma no es directa. Otra forma de verlo es observando que* $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \neq S_1 + S_2$*, como se puede comprobar con la matriz*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin S_1 + S_2.$$

3. ***Ejercicio 8 (Desarrollo). Examen GAL1. 03 Febrero 2018****.*

   a*) Sean* S_1 *y* $S_2 \subseteq \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ *tales que*

   $$S_1 = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : A \text{ es antisimétrica}\}, S_2 = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : \text{traza}(A) = 0\}.$$

   1) Encontrar una base y la dimensión de S_1 *y* S_2*. Justificar.*
   2) Determinar si $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} = S_1 \oplus S_2$*. Justificar.*

   Solución: *Podemos reformular los subespacios* S_1 *y* S_2 *de la siguiente manera:*

   $$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

   $$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} b & c \\ d & -b \end{pmatrix} : b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

   Luego, la dimensión de S_1 *es 1, con una base dada por* $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$*, y la dimensión de* S_2 *es 3, con una base dada por* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.
   Finalmente, como S_1 *es un subconjunto de* S_2*, se sigue que* $S_1 \cap S_2 = S_1$*. Por lo tanto,* $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ *no es la suma directa de* S_1 *y* S_2*.*

7.7.3. Práctico 9.

Práctico 9.

Base y dimensión.

Ejercicios sugeridos:

1. En los siguientes casos, hallar una base y la dimensión del subespacio S del espacio vectorial V.

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$.
   b) $V = \mathbb{R}_3[x]$, $S = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(2) = 0\}$.
   c) $V = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$, $S = \{A \in \mathcal{M}_{3x3} : A \text{ es simétrica}\}$.
   d) $V = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$, $S = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : \operatorname{tr}(A) = 0\}$.

2. En cada parte, el conjunto S es un conjunto generador del espacio vectorial V. Encontrar una base que sea un subconjunto de S.

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,-1,2),\ (4,-3,7),\ (2,0,5),\ (1,2,6)\}$.

   b) $V = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

3. Sea S un subconjunto LI de V. Agregar vectores a S hasta conformar una base de V.

   a) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \{(1,0,2,2),\ (1,1,0,0)\}$.

   b) $V = \mathbb{R}_3[x]$, $S = \{1 - x + x^2, x - x^2\}$.

4. En cada ítem probar que $\mathcal{B}$ es una base del espacio V y hallar las coordenadas del vector v en la base $\mathcal{B}$.

   a) $\mathcal{B} = \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (1,0,1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$, y $v = (1,2,3)$.

   b) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ y $v = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

5. Discutir según $\alpha \in \mathbb{R}$ si el conjunto $\mathcal{A} = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[t]$ donde

$$p_1(t) = 1 + t, \qquad p_2(t) = 1 + \alpha t + t^2, \qquad p_3(t) = 1 + t^2.$$

6. **Rango.** En este ejercicio se vincula el rango de una matriz con la dimensión de cierto espacio asociado a ella. En cada parte se brinda una $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$ y se debe calcular:

   - rango(A)
   - La dimensión del espacio ker$A = \{X \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times 1} : AX = 0\}$.
   - Verificar que dim(ker A) + rango$(A) = n$.

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad b)\quad A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad c)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & -3 & 10 & 9 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

7. En cada caso, encontrar bases para los subespacios S_1, S_2, $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$. A partir de esto, deducir cuándo la suma es directa.

   a) $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$ y $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$.

   b) $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(x) = ax^2,\ \text{con } a \in \mathbb{R}\}$ y $S_2 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(x) = cx^2 + bx + c,\ \text{con } b, c \in \mathbb{R}\}$.

8. Dadas las bases $B_1 = \{(1,-2,1,1), (3,0,2,-2), (0,4,-1,1)\}$ de S_1 y $B_2 = \{(0,4,-1,1), (5,0,3,-1)\}$ de S_2:

   a) Demostrar que $B_1 \cup B_2$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

   b) ¿Se cumple que $\mathbb{R}^4 = S_1 \oplus S_2$?

9. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, S_1 y S_2 dos subespacios de V:

a) Demostrar que $V = S_1 \oplus S_2$ si y solo si $V = S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2 = \{0_V\}$.

b) Si $V = S_1 \oplus S_2$, demostrar que $\dim(S_1) + \dim(S_2) = \dim(V)$.

c) ¿Si $\dim(S_1) + \dim(S_2) = \dim(V)$, entonces $V = S_1 \oplus S_2$? Demostrar o dar un contraejemplo.

10. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, B_1 base del subespacio S_1 y B_2 base de S_2:

a) Si $V = S_1 \oplus S_2$, demostrar que $B_1 \cup B_2$ es una base de V. ¿El recíproco es verdadero?

b) ¿Si $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, entonces $S_1 \cap S_2 = \{0_V\}$? Demostrar o dar un contraejemplo.

c) Si $B_1 \cup B_2$ es una base de V y $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, demostrar que $V = S_1 \oplus S_2$.

7.7.4. Solución Práctico 9.

1, a. Observamos primero que como los vectores (x, y, z) que están en el subespacio cumplen la relación $x + 2y - z = 0$, tenemos que estos son de la forma $(x, y, x + 2y)$. Es decir, podemos reescribir al subespacio como $S = \{(x, y, x + 2y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, 0, x) + (0, y, 2y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 2) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Concluimos que todos los vectores de S se escriben como combinación lineal de los vectores $\{(1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$ y por lo tanto, éste es un generador. Además, es un conjunto L.I. y por lo tanto, es una base del subespacio y la dimensión de éste es 2.

b. Razonando de forma análoga, consideramos un elemento $p \in \mathbb{R}_3[x]$ y le imponemos la condición para que pertenezca al subespacio: si $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, debe cumplirse que

$$p(2) = 8a + 4b + 2c + d = 0$$

De aquí podemos despejar d en función de los otros parámetros y reescribimos el subespacio S como

$$S = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(x) = a(x^3 - 8) + b(x^2 - 4) + c(x - 2)\}$$

Por lo que el conjunto $\{x^3 - 8, x^2 - 4, x - 2\}$ es un generador de S. Además éste es un conjunto L.I. por lo que es una base del subespacio S y la dimensión de S es 3.

c. De forma análoga a las partes anteriores, consideramos un elemento genérico del espacio vectorial y le imponemos las condiciones para pertenecer al subespacio. Tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in S \Leftrightarrow A = A^t \Leftrightarrow \begin{cases} b = d \\ c = g \\ f = h \end{cases}$$

Es decir, $A \in S$ si es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como todo elemento del subespacio se escribe como combinación lineal de las matrices anteriores y éstas forman un conjunto L.I., concluimos que una base del subespacio es

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

y su dimensión es 6.

d. Una base del subespacio es

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

y su dimensión es 3.

2. a. Sabemos que el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión 3, por lo tanto, es claro que sobra un vector; es decir, alcanza sacar un vector del conjunto para obtener una base.

Observamos que el vector $(1,2,6)$ es combinación lineal de los otros y por lo tanto, una base del subespacio es el conjunto $\{(1,-1,2),(4,-3,7),(2,0,5)\}$.

b. El espacio vectorial tiene dimensión 4 por lo que alcanza sacar una de las matrices. Observamos que la matriz $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ es combinación lineal de las anteriores y por lo tanto, una base del subespacio es

$$\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}\right\}$$

3. a. Dado que el espacio es $\mathbb{R}^4$ que tiene dimensión 4, debemos agregar dos vectores al conjunto para obtener un conjunto L.I. con 4 vectores que será una base.

Por un resultado visto en el teórico, sabemos que si $v \notin [S]$ entonces $S \cup \{v\}$ es un conjunto L.I., por lo que podemos estudiar qué vectores son los generados por el conjunto S. Es decir, dado un vector $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, veamos qué condiciones deben cumplir sus coeficientes para que existan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha(1,0,2,2)+\beta(1,1,0,0)=(a,b,c,d)$$

Esto se cumple sii se verifica el siguiente sistema

$$\begin{cases}\alpha+\beta=a\\ \beta=b\\ 2\alpha=c\\ 2\alpha=d\end{cases}$$

Resolviendo el sistema vemos que los vectores generados por el conjunto son los de la forma $(a,b,2a-2b,2a-2b)$. Por lo tanto, si agregamos al conjunto un vector que no cumpla esta relación entre sus coeficientes, obtendremos un conjunto L.I.

Consideramos $(0,0,1,0) \notin [S]$ y tenemos que

$$S' = \{(1,0,2,2),(1,1,0,0),(0,0,1,0)\}$$

es un conjunto L.I.

Repitiendo el procedimiento con los vectores de S', tenemos que el vector $(0,0,0,1) \notin [S']$ y por lo tanto, el conjunto $S' \cup \{(0,0,0,1)\}$ es una base de V.

b. Observar que con los elementos de S no podemos generar a los polinomios de grado 3 por lo que podemos agregar x^3 al conjunto, obteniendo un nuevo conjunto $S' = \{1 - x + x^2, x - x^2, x^3\}$ que es L.I. Ahora, razonamos de la misma forma que en la parte anterior: sea $ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_2[x]$, tenemos que $p \in [S']$ si existen α, β, γ tales que

$$\alpha(1 - x + x^2) + \beta(x - x^2) + \gamma x^3 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Es decir,

$$\begin{cases} \gamma = a \\ \alpha - \beta = b \\ -\alpha + \beta = c \\ \alpha = d \end{cases}$$

Este sistema es compatible sii $c = -b$. Es decir, cualquier polinomio como antes tal que $c \neq -b$ no es generado por el conjunto S' por lo que lo puedo agregar obteniendo un nuevo conjunto L.I. de 4 elementos. Tomando por ejemplo $a = b = d = 0, c = 1$, tenemos que $S' \cup \{x\} = \{1-x+x^2, x-x^2, x^3, x\}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$.

4. a. Dado que el conjunto tiene 3 elementos, para ver que es una base alcanza probar que es un conjunto L.I. Esto lo podemos ver construyendo una matriz cuyas columnas sean los vectores del conjunto y verificando que el rango de la misma es 3, lo cual se cumple.

Para hallar las coordenadas de v en la base, buscamos la combinación lineal de los vectores de la base que da v. Es decir, buscamos los $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(1, 0, 1) = (1, 2, 3)$$

Para esto, resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \\ \beta + \gamma = 3 \end{cases}$$

de donde $\alpha = 0, \beta = 2, \gamma = 1$ y las coordenadas de v en la base son $(0, 2, 1)$.

b. El razonamiento es análogo al de la parte anterior. Las coordenadas de v en la base son $(34/11, -9, 12/11, 3/11)$.

5. Veamos para cuáles valores de α el conjunto es L.I.: Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que

$$\lambda_1(1 + t) + \lambda_2(1 + \alpha t + t^2) + \lambda_3(1 + t^2) = 0$$

vale para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces debe cumplirse que

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \alpha\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado solo para $\alpha \neq 0$. Es decir, para $\alpha \neq 0$, el conjunto es L.I.

Además para estos α, si consideramos $p(t) = at^2 + bt + c \in \mathbb{R}_2[x]$ entonces tenemos que

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = a \\ \lambda_1 + \alpha\lambda_2 = b \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c \end{cases}$$

es compatible y por lo tanto, el conjunto genera a todo polinomio de grado menor o igual a 2.

6. a. Notar que $Ker(A) = Sol(S)$ donde S es el sistema $AX = 0$.

   Consideramos entonces la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ y el sistema $AX = 0$. Escalerizando obtenemos que éste es equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   Tenemos entonces que la matriz tiene rango 2 y resolviendo el sistema llegamos a que $AX = 0$ sii $X = (z, -2z, z)$. Es decir, $Ker(A) = [(1, -2, 1)]$ y por lo tanto, $\dim(Ker(A)) = 1$.

   b. El rango de la matriz es 2 y la dimensión de su núcleo es 2.

   c. El rango de la matriz es 3 y la dimensión de su núcleo es 2.

7. a. Hallamos bases de los subespacios S_1 y S_2 igual que en el práctico anterior. Una base del subespacio S_1 es $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ y una base de S_2 es $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

   Dado que la suma de los subespacios es el subespacio $S_1+S_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = v_1+v_2, v_1 \in S_1, v_2 \in S_2\}$ y los elementos de S_1 y S_2 pueden escribirse como combinaciones lineales de las bases de cada uno, es claro que la unión de las bases de estos subespacios es un generador de la suma de ellos. Dicha unión es el conjunto $B = \{(1,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$ que resulta ser L.I., por lo tanto es una base de S_1+S_2. Como éste último es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y tiene dimensión 3, concluimos que $S_1+S_2 = \mathbb{R}^3$.

   Para conocer la intersección de los subespacios, nos interesa saber cuáles son los vectores del espacio vectorial que son combinación lineal de las bases de ambos subespacios simultáneamente. Es decir, $v \in S_1 \cap S_2$ sii existen $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ tales que

$$v = \alpha_1(1,0,1) + \beta_1(0,1,0) = \alpha_2(1,0,0) + \beta_2(0,1,0)$$

   De aquí concluimos que $S_1 \cap S_2 = \{(0,y,0) : y \in \mathbb{R}\}$ y por lo tanto una base de la intersección es $\{(0,1,0)\}$.

   La suma no es directa pues la intersección de los subespacios no es trivial.

   b. Una base del subespacio S_1 es $\{x^2\}$ y una base de S_2 es $\{x^2+1, x\}$.

   Por lo explicado en la parte anterior, la unión de estas bases, que es el conjunto $\{x^2, x^2+1, x\}$, es un generador de la suma de los subespacios. Además, éste es un conjunto L.I. y por lo tanto conforma una base de $S_1 + S_2$.

   Concluimos que la suma de los subespacios tiene dimensión $3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$ y por lo tanto es todo el espacio $\mathbb{R}_2[x]$.

   Razonando de forma análoga a la parte anterior, podemos observar que la intersección de los subespacios es trivial y por lo tanto, la suma es directa.

8. a. Para esta parte alcanza observar que la unión de las bases de cada subespacio es el conjunto

$$\{(1,-2,1,1),(3,0,2,-2),(0,4,-1,1),(5,0,3,-1)\}$$

que es un conjunto L.I. de 4 elementos en $\mathbb{R}^4$ cuya dimensión es 4 y por lo tanto debe ser base de éste espacio.

b. Dado que la intersección de las bases de los subespacios contiene al vector $(0,4,-1,1)$, la recta por el origen con vector director $(0,4,-1,1)$ está en la intersección de estos, es decir $S_1 \cap S_2 \neq \{(0,0,0,0)\}$ y la suma no es directa.

Sin embargo, $S_1 + S_2 = \mathbb{R}^4$ pues la unión de las bases de cada uno, es una base de $\mathbb{R}^4$.

9. Las primeras dos partes de este ejercicio están demostradas en las notas de teórico.

c. Esto es falso. Si $V = \mathbb{R}^4$, $S_1 = \{(x,y,0,0)\}$ y $S_2 = \{(0,y,z,0)\}$, tenemos que $\dim(S_1) + \dim(S_2) = 2 + 2 = 4$. Sin embargo, $S_1 \cap S_2 = \{(0,y,0,0)\}$ que es un subespacio de dimensión 1.

10. a. La primera parte de este ejercicio está demostrada en las notas de teórico. Un ejemplo de que no vale el recíproco es la parte a. del ejercicio 2.

b. Esto es falso. Sea $S_1 = \{z = 0\}$ y su base $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$, sea $S_2 = \{x = 0\}$ y su base $\{(0,2,0),(0,0,1)\}$. Entonces la intersección de sus bases es vacía. Sin embargo, $S_1 \cap S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = 0\} \neq (0,0,0)$.

c. Recordar que la unión de las bases de cada subespacio, S_1, S_2, es un generador del subespacio $S_1 + S_2$. Si además se cumple que esta unión es una base del espacio vectorial V, entonces $S_1 + S_2 = V$.

Probemos que la suma es directa y para esto supongamos que $B_1 = \{v_1, ..., v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, ..., w_m\}$. Sea $v \in S_1 \cap S_2$, entonces v puede escibirse como combinación lineal de B_1 y B_2, es decir, existen $\alpha_1, ..., \alpha_n$ y $\beta_1, ..., \beta_m$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = \beta_1 w_1 + ... + \beta_m w_m$$

o equivalentemente

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n - \beta_1 w_1 - ... - \beta_m w_m = 0$$

Ahora, como $\{v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m\}$ forma una base del espacio V, en particular es un conjunto L.I. y tenemos que todos los coeficientes de la ecuación anterior deben ser nulos. Por lo tanto, si $v \in S_1 \cap S_2 \implies v = 0$ y concluimos que la suma es directa.

CAPÍTULO 8

TRANSFORMACIONES LINEALES.

Las transformaciones lineales son herramientas fundamentales en el estudio de los espacios vectoriales. Estas funciones desempeñan un papel crucial al preservar las estructuras lineales que caracterizan a dichos espacios. Al aplicar una transformación lineal, se conserva la relación de combinaciones lineales entre vectores: los transformados de las combinaciones lineales son las correspondientes combinaciones lineales de los transformados de cada vector individual.

Esta propiedad de preservar las estructuras lineales es sumamente valiosa, ya que nos permite movernos entre espacios vectoriales, comparando y analizando las características que los definen. Las transformaciones lineales nos brindan una herramienta para explorar y comprender la similitud o diferencia entre espacios vectoriales desde el punto de vista de sus propiedades lineales.

Definición 8.1 *Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales reales y $T : V \to W$ una función. Diremos que T es una **transformación lineal** si cumple las siguientes propiedades:*

1. *Para todo $u, v \in V$, se cumple $T(u+v) = T(u) + T(v)$. Es decir, la transformación lineal preserva la operación de suma o aditividad*

2. *Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $v \in V$, se cumple $T(\lambda v) = \lambda T(v)$. Esto implica que la transformación lineal preserva la multiplicación por escalares.*

Ejemplo 8.1 *Algunas funciones que son transformaciones lineales son:*

1. *Proyección sobre el eje X.*
   Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x, 0)$. Esta función proyecta cada punto del plano sobre el eje X y es una transformación lineal.

   a) *Para todo $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, tenemos que*

   $$T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2, 0) = (x_1, 0) + (x_2, 0) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2).$$

   b) *Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tenemos que*

   $$T(\lambda(x, y)) = T(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x, 0) = \lambda(x, 0) = \lambda T(x, y).$$

2. *Proyección sobre el plano XY.*
Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (x,y,0)$. Esta función proyecta cada punto en el espacio $\mathbb{R}^3$ sobre el plano XY y es una transformación lineal.

   a) *Para todo $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$, tenemos que*

$$T((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = T((x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)) = (x_1+x_2,y_1+y_2,0) = (x_1,y_1,0)+(x_2,y_2,0)$$

$$T((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = T(x_1,y_1,z_1)+T(x_2,y_2,z_2).$$

   b) *Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, tenemos que*

$$T(\lambda(x,y,z)) = T(\lambda x,\lambda y,\lambda z) = (\lambda x,\lambda y,0) = \lambda(x,y,0) = \lambda T(x,y,z).$$

3. *Traspuesta de una matriz.*
Sea $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n} \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times m}$ definida por $T(A) = A^t$, donde A es una matriz $m\times n$. Esta función toma una matriz y devuelve su traspuesta.

   Para demostrar que T es una transformación lineal, debemos verificar las propiedades de linealidad:

   a) *Para todas las matrices $A,B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$, tenemos que*

$$T(A+B) = (A+B)^t = A^t + B^t = T(A)+T(B).$$

   b) *Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ y matriz $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$, tenemos que*

$$T(\lambda A) = (\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda T(A).$$

4. *Derivada de un polinomio.*
Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ definida por $T(p(x)) = p'(x)$, donde $p(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que 2. Esta función toma un polinomio y devuelve su derivada.

   Para demostrar que T es una transformación lineal, debemos verificar:

   a) *Para todo $p(x),q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$, tenemos que*

$$T(p(x)+q(x)) = (p(x)+q(x))' = p'(x)+q'(x) = T(p(x))+T(q(x)).$$

   b) *Para todo escalar $c \in \mathbb{R}$ y polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$, tenemos que*

$$T(c\cdot p(x)) = (c\cdot p(x))' = c\cdot p'(x) = c\cdot T(p(x)).$$

5. *Integral de una función.*
Sea $T : C[a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $T(f) = \int_a^b f(x), dx$, donde $C[a,b]$ es el espacio de las funciones de valores reales continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$.

   Para demostrar que T es una transformación lineal, debemos verificar:

   a) *Para todo $f,g \in C[a,b]$, tenemos que*

$$T(f+g) = \int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = T(f)+T(g).$$

b) *Para todo escalar* $c \in \mathbb{R}$ *y función* $f \in C[a,b]$*, tenemos que*

$$T(c \cdot f) = \int_a^b (c \cdot f(x))dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx = c \cdot T(f).$$

6. *Multiplicación por una matriz.*
Sea $A = (a_{ij})$ *una matriz de tamaño* $m \times n$ *con coeficientes reales. Definimos la función* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *tal que* $T(X) = AX$.

Para demostrar que T *es una transformación lineal, verificamos lo siguiente:*

a) *Para cualquier* X_1 *y* $X_2 \in \mathbb{R}^n$*, se cumple que*

$$T(X_1 + X_2) = A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = T(X_1) + T(X_2).$$

b) *Para todo escalar* $c \in \mathbb{R}$ *y* $X \in \mathbb{R}^n$*, se tiene que*

$$T(cX_1) = A(cX_1) = cA(X_1) = cT(X_1).$$

7. *Rotación en el plano.*
Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *una transformación lineal definida por la multiplicación por la matriz*

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

donde θ *es el ángulo de rotación.*

Para demostrar que T *realiza una rotación en sentido antihorario de todos los vectores en* $\mathbb{R}^2$ *alrededor del origen con un ángulo* θ*, tomemos un vector* $v = (x, y)$ *en* $\mathbb{R}^2$*. Usando coordenadas polares, podemos escribir* v *como* $v = \big(r\cos(\alpha)\ r\sin(\alpha)\big)$*, donde* r *es la longitud de* v *y* α *es el ángulo desde el eje* x *positivo en sentido antihorario hasta el vector* v*. Ahora, al aplicar la transformación lineal* T *a* v*, obtenemos*[1]

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos(\alpha) \\ r\sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r[cos(\theta)cos(\alpha) - sen(\theta)sen(\alpha)] \\ r[cos(\alpha)sen(\theta) + cos(\theta)sen(\alpha)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix},$$

lo cual representa un vector que ha sido rotado en sentido antihorario alrededor del origen por un ángulo θ.

Observación 8.1 *Sean* V *y* W *dos* $\mathbb{K}$*-espacios vetoriales reales y* $T : V \to W$ *una transformación lineal. A continuación, se presentan algunas propiedades importantes*

1. *Preservación del vector nulo.*
Para el vector nulo $\boldsymbol{0}_v \in V$*, se tiene que:*

$$T(\boldsymbol{0}_v) = T(\boldsymbol{0}_v + \boldsymbol{0}_v) = T(\boldsymbol{0}_v) + T(\boldsymbol{0}_v).$$

Por lo tanto, se concluye que $T(\boldsymbol{0}_v) = \boldsymbol{0}_w$*, donde* $\boldsymbol{0}_w$ *es el vector nulo en* W.

2. *Preservación del inverso aditivo.*
Para cualquier vector $v \in V$*, su inverso aditivo* $-v$ *tiene la siguiente propiedad:*

$$T(-v) = T((-1)v) = (-1)T(v) = (-1)T(v) = -T(v).$$

Esto implica que la imagen del inverso aditivo de un vector v *en* V *es igual al inverso aditivo de la imagen* $T(v)$ *en* W.

[1] $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B, \operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B$

3. *Preservación de combinaciones lineales.*
   Para cualquier combinación lineal de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ en V con coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, se tiene:
   $$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \cdots + \lambda_n T(v_n).$$
   Esta propiedad es una consecuencia directa de la asociatividad de la suma en V y la definición de transformación lineal.

Existen dos ejemplos triviales de transformaciones lineales que son importantes considerar:

1. Si V y W son dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, siempre podemos definir la transformación $T : V \to W$ tal que $T(v) = 0$ para cada $v \in V$. Esta transformación se conoce como la **transformación cero o nula**. Es decir, asigna cada vector en V al vector nulo en W.

2. Otro ejemplo relevante es la transformación identidad $T : V \to V$, definida por $T(v) = v$ para cada $v \in V$. A esta transformación se le denota como I_V y se llama **transformación identidad**. En otras palabras, cada vector en V se mapea a sí mismo.

Mostremos ahora que podemos construir nuevas transformaciones lineales a partir de dos dadas. En particular, veremos que la suma de transformaciones lineales, la composición de transformaciones lineales y el producto por un escalar de una transformación lineal también son transformaciones lineales.

Proposición 8.1 *Sean V, W y U tres $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y sean $T : V \to W$, $S : V \to W$ y $L : U \to V$ transformaciones lineales. Entonces,*

1. *Suma de transformaciones lineales: La transformación lineal $T + S : V \to W$ definida por $(T + S)(v) = T(v) + S(v)$ para todo $v \in V$ es una transformación lineal.*

2. *Producto por un escalar de una transformación lineal: Para cualquier escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, la transformación lineal $\lambda T : V \to W$ definida por $(\lambda T)(v) = \lambda T(v)$ para todo $v \in V$ es una transformación lineal.*

3. *Composición de transformaciones lineales: La transformación lineal $T \circ L : U \to W$ definida por $(T \circ L)(u) = T(L(u))$ para todo $u \in U$ es una transformación lineal.*

Demostración: Mostremos el item 3. Dejamos las otras partes como ejercicio.
Sea $u \in U$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Veamos que se cumplen las propiedades de una transformación lineal para $(T \circ L)(u) = T(L(u))$:

$$\begin{aligned}
(T \circ L)(\alpha u) &= T(L(\alpha u)) \quad \text{(definición de } T \circ L) \\
&= T(\alpha L(u)) \quad \text{(linealidad de } L) \\
&= \alpha T(L(u)) \quad \text{(linealidad de } T) \\
&= \alpha (T \circ L)(v) \quad \text{(definición de } T \circ L).
\end{aligned}$$

Además, para $u_1, u_2 \in U$, tenemos:

$$\begin{aligned}
(T \circ L)(u_1 + u_2) &= T(L(u_1 + u_2)) \quad \text{(definición de } T \circ L) \\
&= T(L(u_1) + L(u_2)) \quad \text{(linealidad de } L) \\
&= T(L(u_1)) + T(L(u_2)) \quad \text{(linealidad de } T) \\
&= T \circ L(u_1) + T \circ L(u_2) \quad \text{(definición de } T \circ L).
\end{aligned}$$

Observación 8.2 *Consideremos las transformaciones lineales $T : V \to W$ y $S : V \to W$, donde V y W son $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y $dim(V) = n$. Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V. Observamos que $T(v) = S(v)$ para todo $v \in V$ si $T(v_i) = S(v_i)$ para cada v_i en la base B.*

En efecto, sea $v \in V$. Como B es una base de V, existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Luego, por ser T y S lineales:

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n) \\ &= \alpha_1 S(v_1) + \alpha_2 S(v_2) + \cdots + \alpha_n S(v_n) \\ &= S(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) \\ &= S(v). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $T(v_i) = S(v_i)$ para cada v_i en la base B, entonces $T(v) = S(v)$ para todo $v \in V$. Ahora estamos en condiciones de presentar el siguiente resultado.

Teorema 8.1 ***Teorema de determinación.***
Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, con V de dimensión finita. Sea $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base de V y sean $w_1, w_2, \cdots w_n$ vectores cualesquiera de W. Existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Demostración: Para demostrar la existencia de la transformación lineal T, consideremos un vector $v \in V$. Dado que $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de V, existen coeficientes únicos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tales que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n.$$

Definimos entonces $T : V \to W$ como $T(v) = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_n w_n$. Ahora, verifiquemos que T es lineal.

Sean $v, \bar{v} \in V$ y λ, μ escalares. Podemos expresar v y $\bar{v}$ como combinaciones lineales de la base:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n, \quad \bar{v} = \bar{a}_1 v_1 + \bar{a}_2 v_2 + \cdots + \bar{a}_n v_n.$$

Entonces, aplicamos T a $\lambda v + \mu \bar{v}$:

$$\begin{aligned} T(\lambda v + \mu \bar{v}) &= T(\lambda(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n) + \mu(\bar{a}_1 v_1 + \bar{a}_2 v_2 + \cdots + \bar{a}_n v_n)) \\ &= T((\lambda a_1 + \mu \bar{a}_1) v_1 + (\lambda a_2 + \mu \bar{a}_2) v_2 + \cdots + (\lambda a_n + \mu \bar{a}_n) v_n) \\ &= (\lambda a_1 + \mu \bar{a}_1) w_1 + (\lambda a_2 + \mu \bar{a}_2) w_2 + \cdots + (\lambda a_n + \mu \bar{a}_n) w_n \\ &= \lambda(a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_n w_n) + \mu(\bar{a}_1 w_1 + \bar{a}_2 w_2 + \cdots + \bar{a}_n w_n) \\ &= \lambda T(v) + \mu T(\bar{v}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, T cumple la propiedad de linealidad y verifica que $T(v_i) = w_i$ para $1 \leq i \leq n$. Además, es única, ya que si existiera otra transformación lineal $S : V \to W$ que también cumple $S(v_i) = w_i$ para $1 \leq i \leq n$, entonces T y S coincidirían en una base de V. Esto implica que $T = S$.

Observación 8.3 *El anterior teorema destaca que las transformaciones lineales entre espacios vectoriales poseen una especie de "rigidez". En otras palabras, al definir estas transformaciones sobre los elementos de una base específica en el espacio vectorial de salida, automáticamente quedan determinadas para el resto de los puntos en ese espacio.*

Ejemplo 8.2 ***Ejercicio 5.3 Examen GAL1. Diciembre 2023.*** *Sea* $S_2 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(-1) = 0\}$
Indicar la opción verdadera:
(A) Existe una única transformación lineal $T : S_2 \to \mathbb{R}_3[x]$ *tal que:*

$$T(x^3+1) = x+1, \quad T(x^2-1) = x-4, \quad T(x+1) = x^2+x$$

$$T(x^3+2x+3) = 2x^2+3x+1$$

(B) Existen infinitas transformaciones lineales $T : S_2 \to \mathbb{R}_3[x]$ *tal que:*

$$T(x^3+1) = x+1, \quad T(x^2-1) = x-4, \quad T(x+1) = x^2+x$$

$$T(x^3+2x+3) = 2x^2+2x+1$$

(C) Existen infinitas transformaciones lineales $T : S_2 \to \mathbb{R}_3[x]$ *tal que:*

$$T(x^3+1) = x+1, \quad T(x^2-1) = x-4, \quad T(x+1) = x^2+x$$

$$T(x^3+2x+3) = 2x^2+3x+1$$

(D) Existe una única transformación lineal $T : S_2 \to \mathbb{R}_3[x]$ *tal que:*

$$T(x^3+1) = x+1, \quad T(x^2-1) = x-4, \quad T(x+1) = x^2+x$$

$$T(x^3+2x+3) = 2x^2+2x+1$$

(E) No existen transformaciones lineales $T : S_2 \to \mathbb{R}_3[x]$ *tal que:*

$$T(x^3+1) = x+1, \quad T(x^2-1) = x-4, \quad T(x+1) = x^2+x$$

$$T(x^3+2x+3) = 2x^2+3x+1$$

Solución: *Notemos que* $\{x^3+1, x^2-1, x+1\}$ *es una base para* $S_2 \subset \mathbb{R}_3[x]$*. Por lo tanto, existe una única transformación lineal* $T : S_2 \to \mathbb{R}_3[x]$ *tal que:*

$$T(x^3+1) = x+1, \quad T(x^2-1) = x-4, \quad T(x+1) = x^2+x.$$

Ahora, como $x^3+2x+3 = (x^3+1)+2(x+1)$*, se debe cumplir que*

$$T(x^3+2x+3) = T((x^3+1)+2(x+1)) = T(x^3+1)+2T(x+1) = 2x^2+3x+1.$$

Entonces la opción correcta es la A.

Definición 8.2 *Una transformación lineal* $T : V \to W$ *entre* $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales* V *y* W *se dice:*

1. ***Inyectiva*** *si para cada par de vectores distintos* $v, v' \in V$*, se cumple que* $T(v) \neq T(v')$*, es decir,* T *asigna vectores diferentes a vectores diferentes.*

2. ***Sobreyectiva*** *si para cada vector* $w \in W$*, existe al menos un vector* $v \in V$ *tal que* $T(v) = w$*.*

3. ***Biyectiva*** *si es a la vez inyectiva y sobreyectiva, es decir, si para cada vector* $w \in W$ *existe un único vector* $v \in V$ *tal que* $T(v) = w$*. Un* ***isomorfismo*** *de espacios vectoriales es una transformación lineal biyectiva. Dos espacios vectoriales se dice que son* ***isomorfos****si existe un isomorfismo entre ellos.*

Asociado a la transformación lineal T*, definimos:*

1. *El **núcleo** (o **kernel**) de T, denotado por[2] ker(T), como el conjunto de todos los vectores $v \in V$ para los cuales $T(v) = \mathbf{0}_W$, es decir, el núcleo es el conjunto de los vectores que se mapean al vector nulo en W.*
2. *La **imagen** (o **rango**) de T, denotada por Im(T), como el conjunto de todos los vectores $w \in W$ que son de la forma $T(v)$ para algún vector $v \in V$, es decir, la imagen es el conjunto de todos los vectores alcanzables mediante la aplicación de T.*

Proposición 8.2 *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales V y W. Entonces:*

1. *El núcleo de T es un subespacio de V.*
2. *La imagen de T es un subespacio de W.*

Demostración:

1. Demostraremos que $\ker(T)$ cumple las tres propiedades para ser un subespacio de V:
   - *Contiene al vector nulo*: Como T es una transformación lineal, sabemos que $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$. Por lo tanto, $\mathbf{0}_V \in \ker(T)$.
   - *Cerrado bajo la suma*: Sean $u, v \in \ker(T)$, es decir, $T(u) = T(v) = \mathbf{0}_W$. Entonces
   $$T(u+v) = T(u) + T(v) = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W.$$
   Esto implica que $u + v \in \ker(T)$.
   - *Cerrado bajo la multiplicación escalar*: Sea $u \in \ker(T)$ y α un escalar. Tenemos:
   $$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W.$$
   Por lo tanto, $\alpha u \in \ker(T)$.

   Por lo tanto, $\ker(T)$ es un subespacio de V.
2. La demostración queda a cargo del lector.

Ejemplo 8.3 *Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la función definida por*

$$T(x, y, z) = (2x + 4y + 2z, 3x + y - 2z, -x - 7y - 6z).$$

Vefirifiquemos que T es una transformación lineal.

Para cualquier par de vectores $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, se tiene:

$$\begin{aligned}
T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\
&= (2(x_1 + x_2) + 4(y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2), 3(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - 2(z_1 + z_2), \\
&\quad - (x_1 + x_2) - 7(y_1 + y_2) - 6(z_1 + z_2)) \\
&= (2x_1 + 2x_2 + 4y_1 + 4y_2 + 2z_1 + 2z_2, 3x_1 + 3x_2 + y_1 + y_2 - 2z_1 - 2z_2, \\
&\quad - x_1 - x_2 - 7y_1 - 7y_2 - 6z_1 - 6z_2) \\
&= (2x_1 + 4y_1 + 2z_1, 3x_1 + y_1 - 2z_1, -x_1 - 7y_1 - 6z_1) \\
&\quad + (2x_2 + 4y_2 + 2z_2, 3x_2 + y_2 - 2z_2, -x_2 - 7y_2 - 6z_2) \\
&= T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2).
\end{aligned}$$

[2] En ocasiones usaremos también la notación N(T).

Para cualquier real α y vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, se tiene:

$$\begin{aligned}
T(\alpha(x,y,z)) &= T(\alpha x, \alpha y, \alpha z)\\
&= (2(\alpha x) + 4(\alpha y) + 2(\alpha z), 3(\alpha x) + (\alpha y) - 2(\alpha z), -(\alpha x) - 7(\alpha y) - 6(\alpha z))\\
&= (\alpha(2x + 4y + 2z), \alpha(3x + y - 2z), \alpha(-x - 7y - 6z))\\
&= \alpha T(x, y, z).
\end{aligned}$$

1. *Núcleo de la transformación: Se puede determinar resolviendo la ecuación $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Esto implica encontrar los vectores en $\mathbb{R}^3$ que son mapeados al vector nulo por T, resultando el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 4y + 2z &=& 0\\ 3x + y - 2z &=& 0\\ -x - 7y - 6z &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 0\\ 3 & 1 & -2 & 0\\ -1 & -7 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

Aplicando operaciones elementales de fila, podemos reducir el sistema a su forma escalonada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 0\\ 0 & -5 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A continuación, aplicamos operaciones elementales adicionales para obtener la forma escalonada reducida:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Encontramos que la solución general del sistema es $x = z$, $y = -z$ y z como variable libre. Por lo tanto, el núcleo de la transformación T está dado por:

$$\ker(T) = \{(z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{(1, -1, 1)z|, z \in \mathbb{R}\}.$$

Observamos que el núcleo de la transformación es una recta en $\mathbb{R}^3$. Su dimensión, por lo tanto, es 1.

2. *Imagen de la transformación: Para determinar la imagen de T, necesitamos encontrar todos los vectores (a, b, c) en $\mathbb{R}^3$ tales que exista un vector (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ que satisface $T(x, y, z) = (a, b, c)$.*

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 4y + 2z &=& a\\ 3x + y - 2z &=& b\\ -x - 7y - 6z &=& c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & a\\ 3 & 1 & -2 & b\\ -1 & -7 & -6 & c \end{array}\right)$$

Aplicando las operaciones elementales, obtenemos la forma escalonada del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \frac{1}{2}a\\ 0 & -5 & -5 & -\frac{3}{2}a + b\\ 0 & 0 & 0 & 2a - b + c \end{array}\right)$$

La última fila nos indica que para que el sistema anterior sea compatible es necesario que $2a - b + c = 0$ (indica que tenemos una restricción en las variables a, b y c). Por lo tanto, la imagen de la transformación T está dada por los vectores de la forma (a, b, c) tal que $2a - b + c = 0$. Es decir,

$$Img(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$$

Observamos que la imagen de la transformación es un plano en $\mathbb{R}^3$. Su dimensión, por lo tanto, es 2.

El siguiente resultado establece la relación directa entre la dimensión del núcleo y la imagen de una transformación lineal en relación con la dimensión de su dominio.

Teorema 8.2 ***Teorema de las Dimensiones.***
Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, siendo V de dimensión finita. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces,

$$dim(V) = dim(ker(T)) + dim(Im(T)).$$

Demostración: Si T es la transformación nula, entonces el resultado es claro. Supongamos entonces que T no es la transformación nula y partiendo de una base $B_N = \{v_1, \ldots, v_k\}$ del núcleo de T, elegimos vectores $v_{k+1}, \ldots, v_n \in V$ tales que

$$B = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$$

sea una base de V.

Ahora demostraremos que $B_I = \{T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)\}$ es una base de Im(T).

B_I genera a Im(T).
Cualquier $v \in V$ puede expresarse como

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_k T(v_k) + \alpha_{k+1} T(v_{k+1}) + \ldots + \alpha_n T(v_n) \\ &= \alpha_1 T(v_{k+1}) + \ldots + \alpha_k T(v_n). \end{aligned}$$

B_I es linealmente independiente.
Si $0_W = \alpha_{k+1} T(v_{k+1}) + \ldots + \alpha_n T(v_n) = T(\alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n)$, entonces $\alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n \in \ker(T)$. Dado que B_N es una base del núcleo de T, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tales que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k = \alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n,$$

de donde

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k - \alpha_{k+1} v_{k+1} - \ldots - \alpha_n v_n = \mathbf{0}_V.$$

Usando ahora que el conjunto B es una base y, por lo tanto, linealmente independiente, concluimos que $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0$.

Observación 8.4 *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales V y W. Algunos resultados importantes que presentamos son:*

1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
   a) *T es inyectiva.*
   b) *$ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$.*
   c) *Para cualquier conjunto A linealmente independiente en V, se cumple que $T(A)$ es linealmente independiente en W.*
2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) T *es sobreyectiva.*

b) $ImT = W$.

c) *Para cualquier conjunto* A *que genera* V, *se cumple que* $T(A)$ *es un conjunto generador de* W.

3. *Si* T *es un ismorfismo y* $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *es una conjunto de elementos de* V, *entonces se verifican las siguientes condiciones:*

   a) $T^{-1} : W \to V$ *es una transformación lineal y también es un isomorfismo.*

   b) B *es linealmente independiente si y solo si* $T(B) = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ *es linealmente independiente.*

   c) B *es un un conjunto generador de* V *si y solo si* $T(X) = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ *es un conjunto generador de* W.

   d) B *es una base de* V *si y solo si* $T(B) = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ *es una base de* W.

   e) $\dim V = \dim W$.

Ejemplo 8.4 1. ***Ejercicio 1(Desarrollo). Examen GAL1. Julio 2017.***

Se consideran los subespacios $S = \{(1,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ *y* $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$.

¿Existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ *tal que* $ker(T) = S$ *e* $Im(T) = U$? *Justificar su respuesta.*

No. Si consideramos la base $A = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *y el conjunto de vectores*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

entonces:

Existe una transformación lineal $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ *tal que*

$$T_1(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$T_1(1,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$T_1(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Existe una transformación lineal $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ *tal que*

$$T_2(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$T_2(1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$T_2(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se verifica que $ker(T_1) = ker(T_2) = S$ *y* $Im(T_1) = Im(T_2) = U$, *pero sin embargo* $T_1 \neq T_2$.

2. ***Ejercicio 2. Examen GAL1. Febrero 2016.***

Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita, $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V, y $T : V \to W$ una transformación lineal sobreyectiva. Se consideran los dos conjuntos:

$$A = \{T(v_3), T(v_2) - 2T(v_1), T(v_2) + T(v_3)\} \subset W$$

$$B = \{T(v_2), T(v_1) - T(v_3), T(v_3) + 3T(v_2), T(v_3) + T(v_2)\} \subset W.$$

Entonces:

A) A es linealmente independiente y B es un generador de W.
B) A es una base de W y B es un generador de W.
C) A y B son generadores de W.
D) A y B son linealmente independientes.
E) Ninguna de las opciones anteriores se aplica.

Solución: *Opción C. En fecto, Dado que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de V (es decir, dim$(V) = 3$), es evidente que:*

- *$\{v_3, v_2 - 2v_1, v_2 + v_3\}$ constituye una base de V (es decir, es linealmente independiente y genera V).*
- *$\{v_2, v_1 - v_3, v_3 + 3v_2, v_3 + v_2\}$ genera V, pero no es linealmente independiente.*

Mediante la transformación lineal $T : V \to W$, se concluye que:

- *$A = \{T(v_3), T(v_2-2v_1), T(v_2+v_3)\}$ constituye un generador de W (siendo la imagen de un generador por una transformación lineal sobreyectiva). En general, A no es linealmente independiente, ya que T no es inyectiva.*
- *$B = \{T(v_2), T(v_1 - v_3), T(v_3 + 3v_2), T(v_3 + v_2)\}$ es también un generador de W (por la misma razón que se indicó anteriormente).*

En consecuencia, A y B actúan como generadores de W, y no se puede realizar ninguna afirmación adicional al respecto.

8.1. Rango, sistemas de ecuaciones lineales y el teorema de las dimensiones.

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ con coeficientes reales,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Asociada a dicha matriz podemos considerar la transformación lineal

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$T_A(X) = AX.$$

Podemos notar que:

1. *El nucleo de T_A es el espacio de las soluciones del sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. *La imagen de T_A es el subespacio generado por las columnas de A.* En efecto, consideremos los vectores $\{E^1, \cdots, E^n\}$ de $\mathbb{R}^n$ expresados como vectores columna de la siguiente manera:

$$E^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, E^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, E^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces para cualquier $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, encontramos

$$T_A(X) = AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} (x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$T_A(X) = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_A(X) = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

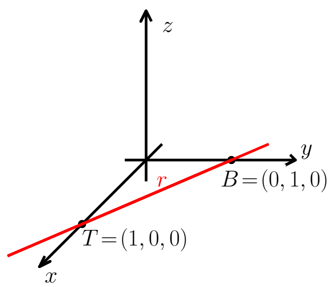
Recordemos que la dimensión del espacio generado por las columnas de A es el rango de A. Utilizando el Teorema de las Dimensiones, podemos concluir lo siguiente:

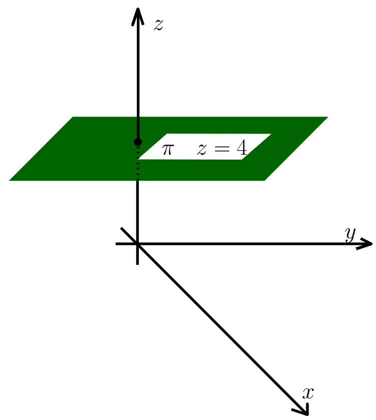
Corolario 8.1 *Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ con coeficientes reales y rango igual a k. Entonces, la dimensión del espacio de soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneo*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

es igual a $n - k$.

Ejemplo 8.5 *1. **Ejercicio 8. Examen GAL1 interactiva. Diciembre 2023.** Se consideran la recta r y el plano π de las figuras:*





a) *Probar que si S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y $r \subseteq S$, entonces* $\dim(S) \geq 2$.

b) *Probar que si S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y $\pi \subseteq S$, entonces $S = \mathbb{R}^3$.*

c) *Probar que no existe ninguna transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $r \subseteq \operatorname{Ker}(T)$ y $r \subseteq \operatorname{Im}(T)$.*

d) *Probar que existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\pi \subseteq \operatorname{Ker}(T)$ y hallarla explícitamente.*

Solución:

a) *Si $r \subseteq S$, en particular $(1, 0, 0) \in S$ y $(0, 1, 0) \in S$, por lo que*

$$\Big[\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}\Big] \subseteq S.$$

Por esto S contiene un subespacio de dimensión 2 y entonces $\dim S \geq 2$.

b) *De manera similar, si $\pi \subseteq S$, entonces basta con elegir 3 puntos no alineados en π para obtener un conjunto linealmente independiente incluido en π (y por lo tanto S contiene una base de $\mathbb{R}^3$).*
En efecto, por ejemplo consideremos $\{(0, 0, 4), (1, 0, 4), (0, 1, 4)\} \subseteq S$, de donde

$$\Big[\{(0, 0, 4), (1, 0, 4), (0, 1, 4)\}\Big] \subseteq S.$$

Como $\{(0, 0, 4), (1, 0, 4), (0, 1, 4)\}$ es linealmente independiente, entonces $\mathbb{R}^3 \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^3$, lo que implica que $S = \mathbb{R}^3$.

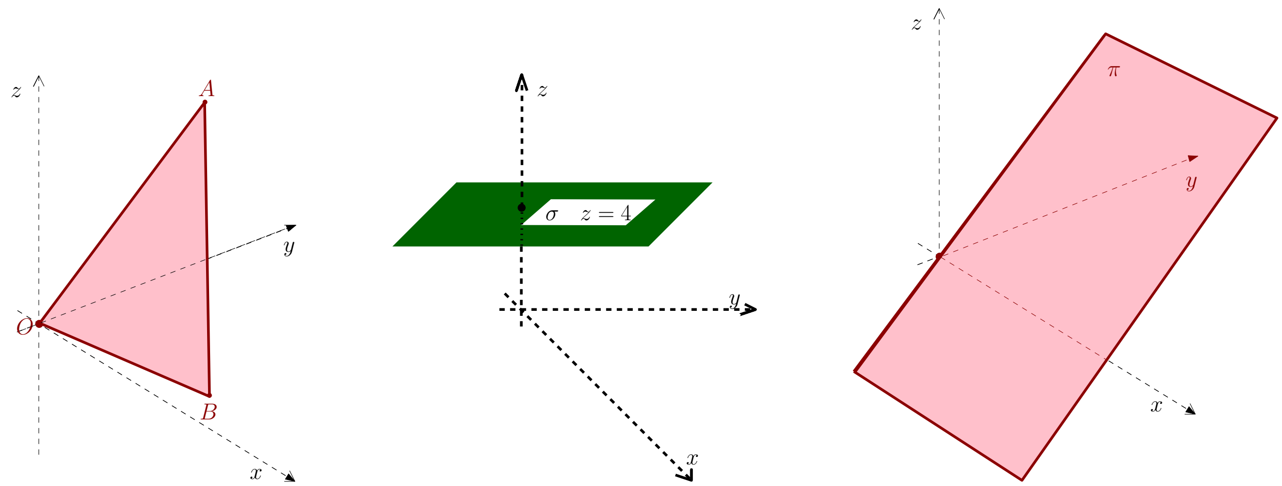
c) *Por absurdo, supongamos que una tal T existe. Por la parte a),* $\dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) \geq 2 + 2 = 4$. *Por el Teorema de las dimensiones*

$$\dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^3 = 3,$$

lo cual es absurdo.

d) *Por la parte b) el núcleo de una tal T debe ser $\mathbb{R}^3$. La única $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la transformación lineal nula $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$, razonamiento que prueba su existencia, su unicidad y la define explícitamente.*

2. ***Ejercicio 8. Examen GAL1 interactiva. Febrero 2024.*** *Se consideran las siguientes figuras:*



a) *Probar que no existen transformaciones lineales* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tales que* $T(\overset{\triangle}{OAB}) \subseteq \sigma$.

b) *Probar que existen infinitas transformaciones lineales* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tales que* $T(\overset{\triangle}{OAB}) \subseteq \pi$.

c) *Probar que si* S *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$ *y* $\sigma \subseteq S$, *entonces* $S = \mathbb{R}^3$.

d) *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *una transformación lineal tal que* $\sigma \subseteq \mathrm{Ker}(T)$. *Hallar el núcleo de* T. *¿Es* T *un isomorfismo? Justificar.*

Solcución:

(a) *Si* T *es lineal, entonces* $T(0,0,0) = (0,0,0)$. *Entonces,* $(0,0,0) \in T(\triangle OAB)$. *Pero el plano* σ *no pasa por el origen, así que ninguna transformación lineal lleva al triángulo en el plano* σ.

(b) *Los vectores* $\overrightarrow{OA}$ *y* $\overrightarrow{OB}$ *son linealmente independientes, de modo que se pueden completar a una base de* $\mathbb{R}^3$. *Sea* $B = \{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\} = \{A, B, C\}$ *una tal base (cualquier punto* C *fuera del plano del triángulo sirve). Por el teorema de determinación de las transformaciones lineales en una base, si elegimos arbitrariamente* $A', B' \in \pi$ *y* C' *cualquiera en* $\mathbb{R}^3$, *existe una única transformación lineal* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que:*

$$T(A) = A', \quad T(B) = B', \quad T(C) = C'$$

Entonces $T(\triangle OAB) = \triangle OA'B'$ *(pudiendo degenerar este triángulo en un segmento si* A', B', O *estuvieran alineados o incluso ser un punto si* $A' = O = B'$*). Como (entre otras) la elección de* C' *es arbitraria, existen infinitas soluciones que cumplen lo pedido.*

(c) *Sea* S *un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$ *tal que* $\sigma \subseteq S$, *entonces basta con elegir 3 puntos no colineales en* σ *para obtener un conjunto linealmente independiente incluido en* σ *(y por lo tanto* S *contiene una base de* $\mathbb{R}^3$. *En efecto, por ejemplo consideremos* $\{(0,0,4), (1,0,4), (0,1,4)\} \subseteq S$, *de donde*

$$\{(0,0,4), (1,0,4), (0,1,4)\} \subseteq S.$$

Como $\{(0,0,4), (1,0,4), (0,1,4)\}$ *es linealmente independiente, entonces* $\mathbb{R}^3 \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^3$, *lo que implica que* $S = \mathbb{R}^3$.

(d) *Usando el enunciado de la parte anterior sabemos que una tal transformación lineal T satisface que $Im(T) = \mathbb{R}^3$, por lo cual T es sobreyectiva. Aplicando el teorema de las dimensiones deducimos que $dim(Ker(T)) = 0$, de donde $Ker(T) = \{(0,0,0)\}$. Entonces T es inyectiva. Concluimos entonces que es un isomorfismo porque es biyectiva.*

8.2. Práctico 10.

Práctico 10.

Transformaciones lineales. Nucleo e imagen. Teorema de las dimensiones.

Ejercicios Sugeridos:

Concepto y ejemplos de transformaciones lineales.

1. En los siguientes casos determinar si la funció T es una transformacion lineal:

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (y - x, z + y)$.

   b) $T : C[0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $T(f) = f(0)$, donde $C[0, 1] = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$.

   c) Dado $v \in \mathbb{R}^3$ fijo, la función $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $T(u) = \langle u, v\rangle$.

   d) $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} \to \mathbb{R}$ tal que $T(A) = \mathrm{Rg}(A)$.

   e) $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ tal que $T(A) = A^t$.

   f) Dados V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y B una base de V, la función $T : V \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(v) = \mathrm{coord}_B(v)$.

2. a) Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

   $$T(1) = (1, 0), T(x) = (1, 1), T(x^2) = (0, 0).$$

   Hallar $T(p)$ para todo p.

   b) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

   $$T(1, 0, 0) = (2, 1, 0), T(1, 1, 0) = (-1, 2, 3), T(1, 1, 1) = (0, 0, 1).$$

   ¿Existe una única transformación lineal que verifique las condiciones dadas? Justifique su respuesta. Si es afirmativa, entonces hallar $T(3, 2, 1)$.

   c) Determinar si existe alguna transformación $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ que satisfaga

   $$T(1) = (1, 0), T(1 + x) = (1, 1), T(1 + x + x^2) = (0, 0), T(3 + 2x + x^2) = (2, 1).$$

   En caso de que exista, encontrarlas todas.

3. En los siguientes casos hallar la expresion analítica de las transformaciones lineales que cumplen las condiciones dadas, y determinar cuantas hay:

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

   $$T(1, 1, -1) = (2, 1, 0), T(1, 2, 1) = (-1, 2, 3), T(1, 0, -3) = (0, 0, 1).$$

b) $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(M_1) = (1,-1), T(M_2) = (1,1), T(M_3) = (1,1), T(M_4) = (3,1), T(M_5) = (1,-3),$$

donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nucleo e imagen de una transformación lineal.

4. Hallar el núcleo e imagen de las siguientes transformaciones lineales:

   a) $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(p) = (p(1) + p(-1), p(0))$.
   b) $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathbb{R}$ tal que $T(A) = \mathrm{tr}(A)$.

5. Se consideran las transformaciones $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tal que

$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y & y \\ y & y-z \end{pmatrix},$$

y

$$S : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathbb{R}^3[x]$$

definida por

$$S(A)(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix}.$$

Verificar que T y S son lineales, y hallar el núcleo y la imagen de T, S y $S \circ T$.

6. Dada $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$, definimos la transformación lineal $T_A : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ como $T_A(M) = AM$. Demostrar que T_A es invertible si y solo si A es invertible.

Teorema de las dimensiones.

7. Sean $T : V \to \mathbb{R}$ y $S : V \to \mathbb{R}$ transformaciones lineales, donde $\dim(V) = n$.

   b) Demostrar que $\dim(\mathrm{N}(T)) = n$ o $n-1$.
   b) $\mathrm{N}(T) = \mathrm{N}(S)$ si y solo si existe un número real $\alpha \neq 0$ tal que $T = \alpha S$.
   c) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $T(x,y,z) = x+y+z$. Hallar $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, lineal, sabiendo que $\mathrm{N}(T) = \mathrm{N}(S)$ y $S(1,0,0) = 2$.

8. Decidir si las dos afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas, dando una demostración o un contraejemplo según corresponda.

   a) Si $T : V \to W$ es lineal, es tal que existe un conjunto $A = \{v_1, \ldots, v_r\} \subset V$ linealmente independiente que cumple que $T(A) = \{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es también linealmente independiente, entonces T es inyectiva.
   b) Si $T : V \to W$ es lineal y existe una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V que cumple que $T(B) = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es también linealmente independiente, entonces T es inyectiva.

9. Sean V y W espacios vectorailes con $dim(V) < dim(W)$, y $T : V \to W$ y $S : W \to U$ transformaciones lineales.
   a) Demostrar que T no es sobreyectiva
   b) Demostrar que S no es inyectiva.
10. Sean U, V y W espacios vectoriales, y $T : V \to W$ y $S : W \to U$ transformaciones lineales.
    a) Demostrar que $\mathrm{N}(T) \subset \mathrm{N}(S \circ T)$.
    b) Si $S \circ T$ es inyectiva, demostrar que T es inyectiva.
    c) Demostrar que $\mathrm{Im}(S \circ T) \subset \mathrm{Im}(S)$.
    d) Si $S \circ T$ es sobreyectiva, demostrar que S es sobreyectiva.
    e) Sean A una matriz $n \times m$ y B una matriz $m \times n$, con $n < m$. Demostrar que BA no es invertible.

8.2.1. Solución Práctico 10

Concepto y ejemplos de transformaciones lineales.

1. a. Es una transformación lineal. Para probar esto consideremos $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$T(\alpha(x, y, z)) = (\alpha y - \alpha x, \alpha z + \alpha y) = \alpha(y - x, z + y) = \alpha T(x, y, z)$$

$$T((x, y, z) + (x', y', z')) = (y + y' - x - x', z + z' + y + y') =$$

$$(y - x, z + y) + (y' - x', z' + y') = T(x, y, z) + T(x', y', z')$$

   b. Es una transformación lineal. Sean $f, g \in C[0, 1]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$T(f + g) = (f + g)(0) = f(0) + g(0) = T(f) + T(g)$$

$$T(\alpha f) = (\alpha f)(0) = \alpha f(0) = \alpha T(0)$$

   c. Es una transformación lineal. Sean $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$T(u_1 + u_2) = \langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle = T(u_1) + T(u_2)$$

$$T(\alpha u_1) = \langle \alpha u_1, v\rangle = \alpha\langle u_1, v\rangle = \alpha T(u_1)$$

   donde usamos propiedades de producto escalar.

   d. No es una transformación lineal. Por ejemplo, si A es una matriz de rango $k \neq 0$, tenemos que $T(0A) = rango(0A) = rango(O_{n\times n}) = 0 \neq rango(A) = T(A)$.

   e. Es una transformación lineal. Sean $A, B \in M_{n\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$T(A + B) = (A + B)^t = A^t + B^t = T(A) + T(B)$$

$$T(\alpha A) = (\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha T(A)$$

   donde usamos propiedades de matriz traspuesta vistas en prácticos anteriores.

f. Es una transformación lineal. Supongamos que la base es $\{v_1, .., v_n\}$ y sean $v, w \in V$, entonces existen $\alpha_1, ..., \alpha_n$ y $\beta_1, ..., \beta_n$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

$$w = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$$

Por lo que $T(v) = coord_B(v) = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ y $coord_B(w) = (\beta_1, ..., \beta_n)$
Dado λ cualquiera, se cumple que

$$\lambda v = \lambda(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = (\lambda\alpha_1)v_1 + ... + (\lambda\alpha_n)v_n$$

Y por lo tanto

$$T(\lambda v) = coord_B(\lambda v) = (\lambda\alpha_1, ..., \lambda\alpha_n) = \lambda(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \lambda T(v)$$

Por otro lado

$$v + w = (\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) + (\beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n) =$$

$$(\alpha_1 + \beta_1)v_1 + ... + (\alpha_n + \beta_n)v_n$$

Y tenemos que

$$T(v + w) = coord_B(v + w) = (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n) = T(v) + T(w)$$

2. a. Todo polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ puede escribirse como $p(x) = a.x^2 + b.x + c,1$. Dado que T es una transformación lineal, sabemos que

$$T(a.x^2 + b.x + c,1) = aT(x^2) + bT(x) + cT(1)$$

Por lo que para un polinomio cualquiera se cumple que

$$T(p) = a(0,0) + b(1,1) + c(1,0) = (b + c, b)$$

b. Sí, existe una única transformación lineal que verifica las condiciones. Esto es porque el conjunto $\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, por lo tanto, dado un punto $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ cualquiera, el valor de T en él está determinado por la siguiente ecuación

$$T(a, b, c) = (a - b)T(1,0,0) + (b - c)T(1,1,0) + cT(1,1,1)$$

Además

$$T(3,2,1) = 1T(1,0,0) + 1T(1,1,0) + 1T(1,1,1) =$$

$$(2,1,0) + (-1,2,3) + (0,0,1) = (1,3,4)$$

c. El conjunto $\{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$. Por lo tanto, para que exista una transformación lineal que cumpla las condiciones, debe verificarse que

$$T(3 + 2x + x^2) = T(1) + T(1 + x) + T(1 + x + x^2) = (2,1)$$

Tenemos entonces que la afirmación es correcta.

Además, para un polinomio genérico ax^2+bx+c , se cumple que

$$ax^2+bx+c = a(x^2+x+1)+(b-a)(x+1)+(c-b)1$$

Entonces

$$T(ax^2+bx+c) = (c-b)(1,0)+(b-a)(1,1)+a(0,0) = (c-a, b-a)$$

3. a. El conjunto $\{(1,1,-1),(1,2,1),(1,0,-3)\}$ no es generador de $\mathbb{R}^3$ y se cumple que $(1,0,-3) = 2(1,1,-1)+(-1)(1,2,1)$.
Sin embargo

$$T(1,0,-3) = (0,0,1) \neq 2(2,1,0)+(-1)(-1,2,3)$$

Por lo tanto, no existen transformaciones lineales que verifiquen las condiciones.

b. Existen infinitas transformaciones lineales que verifican las condiciones. Esto es porque el conjunto $\{M_1,M_2,M_3,M_4,M_5\}$ no es un generador de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ y a diferencia de la parte anterior, no tenemos información contradictoria sino redundante. Es decir, no nos alcanza la información que tenemos para determinar cuánto vale una transformación T que cumpla todas las propiedades en todo el espacio $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$.

Nucleo e imagen de una transformación lineal.

4. a. Para encontrar el núcleo, nos preguntamos cuáles son los polinomios p de $\mathbb{R}_3[x]$ tales que $T(p) = (0,0)$. Sea $p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

$$T(p) = (p(1)+p(-1), p(0)) = (2b+2d, d)$$

Entonces $T(p) = (0,0)$ si y solo si $d = b = 0$. Es decir

$$N(T) = \{ax^3+cx : a,c \in \mathbb{R}\}$$

Por otro lado, para encontrar la imagen de T, debemos buscar los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $\exists p \in \mathbb{R}_2[x]$ con $T(p) = (x,y)$. Si $p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ tenemos que $(x,y) = (2b+2d, d)$. Es decir,

$$Im(T) = \mathbb{R}^2$$

b. $N(T) = \{A \in : a+d = 0\}$. $Im(T) = \mathbb{R}$.

5. Verificamos que T es una transformación lineal: sean $(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$T((x,y,z)+(x',y',z')) = T(x+x', y+y', z+z') = \begin{pmatrix} x+x'-(y+y') & y+y' \\ y+y' & y+y'-(z+z') \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x-y & y \\ y & y-z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'-y' & y' \\ y' & y'-z' \end{pmatrix} = T(x,y,z)+T(x',y',z')$$

$$T(\alpha(x,y,z)) = \begin{pmatrix} \alpha(x-y) & \alpha y \\ \alpha y & \alpha(y-z) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x-y & y \\ y & y-z \end{pmatrix} = \alpha T(x,y,z)$$

Verificamos que S es una transformación lineal: sean $A,B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$S(A+B)(x) = (1\ x)(A+B)\begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} = (1\ x)A\begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} + (1\ x)B\begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} = S(A)(x) + S(B)(x)$$

$$S(\alpha A)(x) = (1\ x)(\alpha A)\begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} = \alpha(1\ x)(A)\begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} = \alpha S(A)(x)$$

Calculemos el núcleo y la imagen de T. Buscamos primero los $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $T(x,y,z) = O_{2\times 2}$. A partir de la definición de T, es claro que $N(T) = \{(0,0,0)\}$. Por otro lado, también observando la definición de la transformación lineal, las matrices $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tales que existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = A$ deben ser simétricas, es decir, $Im(T) = \{A : A = A^t\}$.

Calculemos el núcleo y la imagen de S. Por un lado, si consideramos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tenemos que $S(A)(x) = 0$ si y solo si $ax + (b+c)x^2 + dx^3 = 0$, por lo tanto $N(S) = \{A : b = -c, a = d = 0\}$. Además, desarrollando el producto matricial de la definición de S, vemos que $Im(S) = \{p : p(x) = ax^3 + bx^2 + cx\}$.

Por último, estudiemos el núcleo y la imagen de $S \circ T$. Tenemos que $S \circ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_3[x]$ y

$$(S \circ T)(a,b,c) = S\begin{pmatrix} a-b & b \\ b & b-c \end{pmatrix}(x) = (a-b)x + 2bx^2 + (b-c)x^3$$

Por lo tanto, $(S \circ T)(a,b,c) = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$ y tenemos que $N(S \circ T) = \{(0,0,0)\}$. Además, observamos que $Im(T) = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(x) = ax^3 + bx^2 + cx\}$.

6. Si la transformación T es invertible, entonces en particular es sobreyectiva. Por lo tanto, existe una matriz M tal que $T(M) = I_n$. Es decir, existe una matriz M tal que $AM = I_n$ y concluimos que A es una matriz invertible.

   Recíprocamente, si la matriz A es invertible, entonces podemos definir la transformación $S(M) = A^{-1}M$ y se cumple que

$$S \circ T(M) = A^{-1}(AM) = (A^{-1}A)M = I_n M = M$$

$$T \circ S(M) = A(A^{-1}M) = (AA^{-1})M = I_n M = M$$

   Por lo que $S = T^{-1}$ y concluimos que T es invertible.

Teorema de las dimensiones.

7. a. Observamos primero que $\dim(\mathbb{R}) = 1$ y $Im(T)$ es un subespacio de $\mathbb{R}$. Por lo tanto, si $Im(T) \neq \{0\}$, entonces $Im(T) = \mathbb{R}$ y por el teorema de las dimensiones, tenemos que

$$n = \dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(N(T)) + \dim(\mathbb{R})$$

   Por lo tanto, $\dim(N(T)) = n - 1$.

   Por otro lado, si $Im(T) = \{0\}$, entonces $\dim(Im(T)) = 0$ y por el teorema de las dimensiones tenemos que $\dim(N(T)) = \dim(V) = n$.

b. Por la parte a), sabemos que $\dim(Im(T)) = 0, 1$. Si la dimensión de la imagen es 0, entonces T y S son ambas la transformación nula y la afirmación se cumple trivialmente.

Si la dimensión de la imagen es 1, es decir, $Im(T) = Im(S) = \mathbb{R}$. Sea v tal que $T(v) = \alpha$ y $S(v) = 1$ donde $\alpha \neq 0$. Cualquier otro vector que no vaya en el 0 debe ser de la forma kv pues la dirección de v es la única que no está en el núcleo de las transformaciones.

Sea $w \in V$ entonces, si $w \in N(T)$, $T(w) = 0 = \alpha S(w)$. Y si $w \notin N(T)$ entonces

$$T(w) = T(kv) = kT(v) = k\alpha = k\alpha 1 = k\alpha S(v) = \alpha S(kv) = \alpha S(w)$$

c. Tenemos que $N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} = \{(x, y, -x - y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Una base de este subespacio es $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ y por lo tanto $dim(N(T)) = 2 = dim(\mathbb{R}^3) - 1$. Además, $N(S) = N(T)$. Utilizando la parte anterior sabemos que $S = \alpha T$, entonces

$$2 = S(1, 0, 0) = \alpha T(1, 0, 0) = \alpha$$

Por lo tanto, $S(x, y, z) = 2(x + y + z)$.

8. a. Esta afirmación es falsa. Supongamos que $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$. Consideremos el conjunto $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ y una transformación $T : V \to W$ tal que $T(1, 0, 0) = (1, 0)$ y $T(0, 1, 0) = (0, 1)$. Claramente el conjunto A es linealmente independiente pues tiene vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y el conjunto $T(A)$ también pues es la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, usando el teorema de las dimensiones, tenemos que $\dim(N(T)) = 1$ y por lo tanto no es inyectiva.

b. Esta afirmación es verdadera. Para ver que la transformación es inyectiva veamos que su núcleo es solamente el vector nulo. Sea entonces $v \in V$ tal que $T(v) = 0_W$. Como B es una base del espacio vectorial V, podemos escribir al vector v como combinación lineal de los vectores de B, es decir existen $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$.

Utilizando propiedades de transformaciones lineales, tenemos que

$$0_W = T(v) = T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + ... + \alpha_n T(v_n)$$

Sabemos que el conjunto $T(B)$ es linealmente independiente y por lo tanto $\alpha_i = 0$ para todo i. Concluimos entonces que $v = 0_V$.

9. b. Sabemos que $Im(S)$ es un subespacio vectorial de V y por lo tanto $\dim(Im(S)) \leq \dim(V)$. Supongamos que S es inyectiva, el teorema de las dimensiones nos dice que

$$\dim(W) = \dim(N(S)) + \dim(Im(S)) = 0 + \dim(Im(S))$$

Por lo tanto, $\dim(Im(S)) = \dim(W) > \dim(V)$ lo cual es absurdo. Por lo tanto, S no puede ser inyectiva.

10. a. Probemos que todo vector $v \in N(T)$ pertenece a $N(S \circ T)$.

Tenemos que $N(S \circ T) = \{v \in V : (S \circ T)(v) = 0_U\}$. Sea $v \in N(T)$, entonces $T(v) = 0_w$ y por lo tanto

$$(S \circ T)(v) = S(T(V)) = S(0_W) = 0_U$$

En el último paso usamos que S es una transformación lineal por lo que lleva el cero de W en el cero de U. Concluimos entonces que $N(T) \subset N(S \circ T)$.

b. Por la parte anterior, tenemos que $N(T) \subset N(S \circ T)$. Como $S \circ T$ es inyectiva, tiene núcleo trivial, es decir

$$N(T) \subset N(S \circ T) = \{0_V\}$$

Por lo tanto, $N(T) = \{0_V\}$ y T es inyectiva.

c. Consideramos $u \in Im(S \circ T)$, entonces sabemos que existe $v \in V$ tal que $(S \circ T)(v) = u$. Si llamamos $w = T(v)$, tenemos que $(S \circ T)(v) = S(T(v)) = S(w)$ y por lo tanto $v \in Im(S)$.

d. Si $S \circ T$ es una transformación sobreyectiva, entonces $Im(S \circ T) = U$. Por la parte anterior sabemos que $Im(S \circ T) \subset Im(S)$. Por lo tanto, $U \subset Im(S)$ y a su vez, $Im(S)$ es un subespacio del espacio vectorial U. Por lo tanto $Im(S) = U$ y concluimos que S es sobreyectiva.

e. Sugerencia: pensar a las columnas de A como vectores de un espacio vectorial de dimensión n y estudiar la dependencia lineal.

8.3. Matriz asociada a una transformación lineal.

En este capítulo veremos una nueva forma de representar las transformaciones lineales que venimos estudiando.

Consideremos dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo, $(V, \mathbb{K}, +_V, *)$ y $(W, \mathbb{K}, +_W, \star)$ y una transformación lineal $T : V \to W$. Sean n y m las dimensiones de los espacios V y W respectivamente y consideremos las bases $\mathcal{A} = \{v_1, ..., v_n\} \xrightarrow{b} V$ y $\mathcal{B} = \{w_1, ..., w_m\} \xrightarrow{b} W$. Como $T(v_j) \in W$ para todo $v_j \in \mathcal{A}$, podemos escribir a este vector en términos de la base $\mathcal{B}$. Es decir, existen escalares a_{ij} con $i = 1, .., m$ tales que

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

Dicho de otra forma, $coord_{\mathcal{B}}(T(v_j)) = (a_{1j}, ..., a_{mj})$.

Definimos la matriz asociada a T en las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ como la matriz cuya $i-$ésima columna corresponde con las coordenadas de $T(v_i)$ en la base $\mathcal{B}$, es decir,

$${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} = \left(coord(T(v_1))^t \dots coord(T(v_n))^t\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}$$

A continuación vemos algunos ejemplos y casos particulares.

Ejemplo 8.1 *Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x+y-z, x-y)$. Consideremos primero $\mathcal{C}_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $\mathcal{C}_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ las bases canónicas de ambos espacios y hallemos la matriz asociada en este caso.*

Para esto, comenzamos calculando T en los vectores de la base de $\mathbb{R}^3$. Tenemos lo siguiente

$$T(1, 0, 0) = (2, 1),\ T(0, 1, 0) = (1, -1),\ T(0, 0, 1) = (-1, 0)$$

Es claro que como estamos usando la base canónica de $\mathbb{R}^2$, las coordenadas de los vectores $(2, 1), (1, -1), (-1, 0)$ en dicha base, son exactamente los mismos vectores. Por lo tanto, la matriz asociada a T en estas bases es

$${}_{\mathcal{C}_2}((T))_{\mathcal{C}_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 8.2 *Para un ejemplo más interesante, consideremos la transformación anterior pero tomando la base* $\mathcal{B} = \{(1,-1),(2,-1)\}$ *de* $\mathbb{R}^2$. *Para hallar la matriz asociada en este caso, tenemos que calcular* $coord_{\mathcal{B}}(T(v_i))$ *para cada* $v_i \in \mathcal{C}_1$. *Comenzamos tomando el vector* $(2,1)$ *y buscamos los escalares* α *y* β *tales que*

$$(2,1) = \alpha(1,-1) + \beta(2,-1)$$

A partir de esto planteamos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 2 \\ -\alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

y concluimos que $(\alpha,\beta) = (-4,3)$. *Repitiendo el procedimiento llegamos a que* $coord_{\mathcal{B}}(1,-1) = (1,0)$ *y* $coord_{\mathcal{B}}(-1,0) = (1,-1)$. *Por lo tanto, la matriz asociada a la transformación* T *en las bases* $\mathcal{C}_1$ *y* $\mathcal{B}$ *es*

$$_{\mathcal{C}_1}((T))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 8.3 *Sea* $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ *tal que*

$$T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a-b & c \\ c & c-b \end{pmatrix}$$

Sean además $\mathcal{A} = \{x^2+1, 2x, x+1\}$ *y* $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
Comenzamos calculando T *de los vectores de la base* $\mathcal{A}$:

- $T(x^2+1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $T(2x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
- $T(x+1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Lo siguiente es encontrar las coordenadas de los vectores obtenidos en la base $\mathcal{B}$.

- *La matriz* $T(x^2+1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *está en la base* $\mathcal{B}$ *por lo que* $coord_{\mathcal{B}}(T(x^2+1)) = (0,0,1,0)$
- *Además* $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-4)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y tenemos que* $coord_{\mathcal{B}}(T(2x)) = (0,-2,0,-4)$
- $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $coord_{\mathcal{B}}(T(x+1)) = (0,-2,1,-3)$

Por último, armamos la matriz asociada çolgando”las coordenadas obtenidas como columnas de la matriz, es decir:

$$_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Observar que la matriz asociada a la transformación lineal $T : V \to W$ en las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, siempre queda determinada por las coordenadas en la base $\mathcal{B}$ de T aplicada a los vectores de la base $\mathcal{A}$. Por lo que podemos realizar el proceso inverso a las partes anteriores. Es decir, conociendo la matriz asociada y las bases de los espacios, podemos obtener la transformación linear correspondiente. Veamos un ejemplo de esto.

Ejemplo 8.4 *Sea $\mathcal{A} = \{(-1,1,0),(1,-2,0),(1,-1,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que*

$$_{\mathcal{A}}((T))_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Sabemos, por definición de matriz asociada, que las columnas de la matriz anterior corresponden a las coordenadas en la base $\mathcal{A}$ de los transformados de los vectores de la base $\mathcal{A}$. Es decir, sabemos lo siguiente

- $coord_{\mathcal{A}}(T(-1,1,0)) = (1,1,1)$
- $coord_{\mathcal{A}}(T(1,-2,0)) = (0,1,1)$
- $coord_{\mathcal{A}}(T(1,-1,1)) = (2,0,-2)$

A partir de esto, conocemos $T(v)$ para cada $v \in \mathcal{A}$

- $T(-1,1,0) = 1.(-1,1,0) + 1.(1,-2,0) + 1.(1,-1,1) = (1,-2,1)$
- $T(1,-2,0) = 0.(-1,1,0) + 1.(1,-2,0) + 1.(1,-1,1) = (2,-3,1)$
- $T(1,-1,1) = 2.(-1,1,0) + 0.(1,-2,0) + -2.(1,-1,1) = (-4,4,-2)$

Ahora, sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ cualquiera. Para calcular $T(x,y,z)$, escribamos al vector como combinación lineal de la base $\mathcal{A}$. Buscamos $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ tales que

$$(x,y,z) = \alpha_1(-1,1,0) + \alpha_2(1,-2,0) + \alpha_3(1,-1,1)$$

Resolviendo un sistema de ecuaciones, llegamos a que

$$(x,y,z) = (-2x-y+z)(1,1,0) + (-x-y)(1,-2,0) + z(1,-1,1)$$

Por lo tanto,

$$T(x,y,z) = (-2x-y-z)T(-1,1,0) + (-x-y)T(1,-2,0) + zT(1,-1,1) =$$

$$(-2x-y-z)(1,-2,1) + (-x-y)(2,-3,1) + z(-4,4,-2) =$$
$$(-4x-3y-5z, 7x+5y+6z, -3x-2y-3z)$$

Para resolver problemas como el del ejemplo anterior, tenemos un resultado más abastracto que generaliza lo que hicimos

Teorema 8.3 *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y con bases $\mathcal{A} = \{v_1,...,v_n\} \xrightarrow{b} V$, $\mathcal{B} = \{w_1,...,w_m\} \xrightarrow{b} W$. Para toda transformación lineal $T : V \to W$, se cumple la siguiente igualdad:*

$$coord_{\mathcal{B}}(T(v)) = {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}\, coord_{\mathcal{A}}(v)$$

Demostración: Notemos ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} = ((a_{ij}))$ y sea $v \in V$ con $coord_{\mathcal{A}}(v) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Como T es transformación lineal, tenemos que

$$T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_n T(v_n).$$

Por definición de matriz asociada, sabemos que la columna $j-$ésima de ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ corresponde a $coord_{\mathcal{B}} T(v_j)$. Utilizando esto, la ecuación anterior puede reescribirse de la siguiente forma

$$T(v) = \alpha_1(a_{11}w_1 + ... + a_{m1}w_m) + \alpha_2(a_{12}w_1 + ... + a_{m2}w_m) + ... + \alpha_n(a_{1n}w_1 + ... + a_{mn}w_m)$$
$$(\alpha_1 a_{11} + ... + \alpha_n a_{1n})w_1 + (\alpha_1 a_{21} + ... + \alpha_n a_{2n})w_2 ... + (\alpha_1 a_{m1} + ... + \alpha_n a_{mn})w_m$$

Por lo tanto, tenemos que

$$coord_{\mathcal{B}}(T(v)) = \begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + ... + \alpha_n a_{1n} \\ \alpha_1 a_{21} + ... + \alpha_n a_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_1 a_{m1} + ... + \alpha_n a_{mn} \end{pmatrix} = \mathcal{B}((T))_{\mathcal{A}} coord_{\mathcal{A}}(v)$$

8.3.1. Operaciones entre transformaciones lineales

Hasta ahora, sabemos que si tenemos dos transformaciones lineales $S, T : V \to W$, entonces podemos calcular las transformaciones $S + T : V \to W$ y $\alpha \cdot T : V \to W$. Veremos un resultado que nos da una nueva forma de hallar las matrices asociadas a dichas transformaciones a partir de las matrices asociadas a S y T

Teorema 8.1 *Sean V y W dos $\mathbb{K}-$espacios vectoriales con bases $\mathcal{A} = \{v_1 ..., v_n\}$ y $\mathcal{B} = \{w_1, .., w_m\}$ respectivamente. Dadas $T, S : V \to W$ dos transformaciones lineales y $\alpha \in \mathbb{K}$, las matrices asociadas a las transoformaciones*

$$T + S : V \to W / (T + S)(v) := T(v) + S(v)$$
$$\alpha \cdot T : V \to W / (\alpha T)(v) := \alpha T(v)$$

están dadas por

$${}_{\mathcal{B}}((T + S))_{\mathcal{A}} = \mathcal{B}((T))_{\mathcal{A}} + \mathcal{B}((S))_{\mathcal{A}}$$
$${}_{\mathcal{B}}((\alpha \cdot T))_{\mathcal{A}} = \alpha \cdot_{\mathcal{B}} ((T))_{\mathcal{A}}$$

Demostración: Notemos ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} = ((a_{ij}))$, ${}_{\mathcal{B}}((S))_{\mathcal{A}} = ((b_{ij}))$. Dado $v_j \in \mathcal{A}$, se tiene que

$$(T + S)(v_j) = T(v_j) + S(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij} w_i$$

Esto es porque la columna $j-$ésima de la matriz ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ corresponde con las cordenadas en la base $\mathcal{B}$ del vector $T(v_j)$ y la columna $j-$ésima de la matriz ${}_{\mathcal{B}}((S))_{\mathcal{A}}$ corresponde con las cordenadas en la base $\mathcal{B}$ del vector $S(v_j)$. De la ecuación anterior concluimos que

$$(T + S)(v_j) = \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} + b_{ij}) w_i$$

Como la columna $j-$ésima de la matriz ${}_{\mathcal{B}}((T + S))_{\mathcal{A}}$ tiene las coordenadas de $(T + S)(v_j)$ en la base $\mathcal{B}$, concluimos que ${}_{\mathcal{B}}((T + S))_{\mathcal{A}} = \mathcal{B}((T))_{\mathcal{A}} + \mathcal{B}((S))_{\mathcal{A}}$.

De forma análoga, $(\alpha \cdot T)(v_j) = \alpha T(v_j) = \alpha \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha a_{ij} w_i$ y tenemos que ${}_{\mathcal{B}}((\alpha \cdot T))_{\mathcal{A}} = \alpha \cdot_{\mathcal{B}} ((T))_{\mathcal{A}}$

Teorema 8.2 *Sean V, W, U tres $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$, $\dim(U) = s$. Sean $\mathcal{A} = \{v_1, .., v_n\}, \mathcal{B} = \{w_1, ..., w_m\}, \mathcal{C} = \{u_1, ..., u_s\}$ bases de V, W, U respectivamente. Si $T : V \to W$ y $S : W \to U$ son transformaciones lineales con matrices asociadas ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ y ${}_{\mathcal{C}}((S))_{\mathcal{B}}$, entonces la matriz asociada a la transformación lineal $S \circ T : V \to U$ está dada por*

$$ {}_{\mathcal{C}}((S \circ T))_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{C}}((S))_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} $$

Demostración: Notemos ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} = ((a_{jk}))$, ${}_{\mathcal{C}}((S))_{\mathcal{B}} = ((b_{ij}))$ y ${}_{\mathcal{C}}((S))_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} = ((c_{ki}))$ donde $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq n$.

Usando la definición del producto de matrices, tenemos que los coeficientes c_{ki} son de la forma

$$ c_{ik} = \sum_{h=1}^{m} b_{ih} a_{hk} $$

Por otro lado, dado $v_k \in \mathcal{A}$, se tiene que

$$ (S \circ T)(v_k) = S(T(v_k)) = S\left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk} w_j\right) = \sum_{j=1}^{m} a_{jk} S(w_j) = \sum_{j=1}^{m} a_{jk} \sum_{i=1}^{s} b_{ij} u_i = $$

$$ \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_{jk}\right) u_i = \sum_{i=1}^{s} c_{ik} u_i $$

Por lo tanto, la matriz asociada a $S \circ T$ es ${}_{\mathcal{C}}((S \circ T))_{\mathcal{A}} = ((c_{ik}))$.

Corolario 8.2 *Sea $T : V \to W$ un isomorfismo, $\mathcal{A}$ una base de V y $\mathcal{B}$ una base de W. Entonces, ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ es invertible, y la matriz asociada a la transformación lineal inversa $T^{-1} : W \to V$ en bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ viene dada por*

$$ {}_{\mathcal{A}}((T^{-1}))_{\mathcal{B}} = ({}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}})^{-1} $$

Demostración: Dado que $T \circ T^{-1} = id_V$ y $T^{-1} \circ T = id_W$ usando el teorema anterior, tenemos que

$$ {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} \cdot {}_{\mathcal{A}}((T^{-1}))_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}((T \circ T^{-1}))_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}((id_V))_{\mathcal{B}} = I $$
$$ {}_{\mathcal{A}}((T^{-1}))_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{A}}((T^{-1} \circ T))_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{A}}((id_W))_{\mathcal{A}} = I $$

Por lo tanto, ${}_{\mathcal{A}}((T^{-1}))_{\mathcal{B}} = ({}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}})^{-1}$

En el capítulo anterior definimos el núcleo y la imagen de una matriz $A \in Mat_{m\times n}$ de la siguiente forma

$$ N(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = 0\} $$

$$ Im(A) = \{Y \in \mathbb{R}^m : \exists X \in \mathbb{R}^n : AX = Y\} $$

Veamos qué relación tiene esto con el núcleo y la imagen de una transformación lineal. Para esto, consideramos una matriz $A \in Mat_{m\times n}$ y definimos la transformación $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $T_A(X) = AX$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se cumple que en las bases canónicas de estos espacios, $\mathcal{C}_n$ y $\mathcal{C}_m$ respectivamente, la matriz asociada a T_A es exactamente A, es decir

$$ {}_{\mathcal{C}_m}((T_A))_{\mathcal{C}_n} = A $$

Por esta razón, podemos relacionar al núcleo y la imagen de A con el núcleo y la imagen de T_A.

$$N(A) = N(T_A) = \{x \in \mathbb{R}^n : T(X) = 0\}$$

$$Im(A) = Im(T) = \{Y \in \mathbb{R}^m : \exists X \in \mathbb{R}^n : T(X) = Y\}$$

Proposición 8.1 *Las columnas de A generan la imagen de A.*

Demostración: Sea $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $T_A(X) = AX$. Si $\mathcal{C}_n = \{e_1, ..., e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, sabemos que el conjunto $\{T_A(e_1), ..., T_A(e_n)\}$ es un generador de la imagen de T_A que es igual a la imagen de A.

Además, $T_A(e_i) = Ae_i = A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A^(i)$

donde $A^(i)$ es la i-ésima columna de A.

Por lo tanto, el conjunto $\{A^(1), ..., A^(n)\}$ constituye una base de $Im(A)$.

Dado que el rango de una matriz es el número de columnas L.I., tenemos el siguiente corolario.

Corolario 8.3 *El rango de una matriz A es igual a la dimensión de su imagen*

Veamos algunos ejemplos de esto.

Ejemplo 8.5 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 9 & 1 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

Luego de escalerizar, obtenemos que

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y \\ z = 0 \end{cases}$$

Por lo que

$$N(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x = -3y\} = \{(-3y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} \implies N(A) = [(-3, 1, 0)]$$

Además, como sabemos que las columnas de A generan $Im(A)$, tenemos que

$$Im(A) = [(1, 0, 0, 0), (3, 0, 0, 0), (0, 5, 0, 0)] = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)]$$

donde la última igualdad se debe a que $(3, 0, 0, 0) = 3(1, 0, 0, 0)$.

Con esto, podemos hallar núcleo y la imagen de una transformación a partir del núcleo y la imagen de su matriz asociada.

Proposición 8.2 *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo, consideremos los conjuntos $A = \{v_1, ..., v_n\} \xrightarrow{b} V$ y $B = \{w_1, ..., w_m\} \xrightarrow{b} W$ y una transformación lineal $T : V \to W$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *Si* $v \in N(T) \implies coord_{\mathcal{A}}(v) \in N({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}})$
2. *Si* $x \in N({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}) \implies coord_{\mathcal{A}}^{-1}(x) \in N(T)$

Demostración:

1. *Si* $v \in N(T) \implies T(v) = \overrightarrow{0}$. *Como* $\mathcal{B}$ *es una base de* W, *tenemos que* $coord_{\mathcal{B}}(T(v)) = \overrightarrow{0}$. *Además,*

$$coord_{\mathcal{B}}(T(v)) =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{A}} coord_{\mathcal{A}}(v).$$

Es decir, ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} coord_{\mathcal{A}}(v) = \overrightarrow{0}$ *y concluimos que* $coord_{\mathcal{A}}(v) = \overrightarrow{0}$.

2. *Si* $x = (x_1, ..., x_n) \in N({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}) \implies {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} x = \overrightarrow{0}$. *Por lo tanto,*

$$(coord_{\mathcal{B}}.(T(v_1))...coord_{\mathcal{B}}.(T(v_n))) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}$$

Es decir,

$$coord_{\mathcal{B}}(T(v_1).x_1 + ... + coord_{\mathcal{B}}(T(v_n).x_n = \overrightarrow{0} \implies coord_{\mathcal{B}}(x_1.T(v_1) + ... + x_n.T(v_n)) = \overrightarrow{0}$$
$$x_1.T(v_1) + ... + x_n.T(v_n) = \overrightarrow{0} \implies T(x_1 v_1 + ... + x_n v_n) = \overrightarrow{0}$$

Donde las usamos que $coord_{\mathcal{B}}$ *es una transformación lineal inyectiva y que* T *es lineal. Con esto concluimos que* $coord_{\mathcal{A}}^{-1}(x) = (x_1 v_1 + ... + x_n v_n) \in N(T)$.

La siguiente proposición se demuestra fácilmente a partir de los resultados anteriores.

Proposición 8.3 *Sean* V *y* W *dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo, consideremos los conjuntos* $A = \{v_1, ..., v_n\} \xrightarrow{b} V$ *y* $B = \{w_1, ..., w_m\} \xrightarrow{b} W$ *y una transformación lineal* $T : V \to W$. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. $N(T)$ *y* $N({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}})$ *son isomorfos*
2. $\dim(N(T)) = n - rango({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}})$
3. *Si* $\{e_1, ..., e_k\} \xrightarrow{b} N(T) \implies \{coord_{\mathcal{A}}(e_1), ..., coord_{\mathcal{A}}(e_k)\} \xrightarrow{b} N({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}})$
4. *Si* $\{x_1, ..., x_k\} \xrightarrow{b} N({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}) \implies \{coord_{\mathcal{A}}^{-1}(x_1), ..., coord_{\mathcal{A}}^{-1}(x_k)\} \xrightarrow{b} N(T)$

Ejemplo 8.6 *Consideremos las bases* $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{b} Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *y* $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\} \xrightarrow{b} \mathbb{R}^3$ *y* $T : Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ *una transformación lineal cuya matriz asociada* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *es*

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Si queremos hallar una base del núcleo de T, utilizando la proposición anterior, podemos comenzar hallando una base de $N({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}})$. Tenemos lo siguiente

$$ {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} $$

$$ \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t - 2z \\ y = 2t - z \end{cases} $$

De esta forma, tenemos que $N({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}) = \{(t-2z, 2t-z, z, t) : z, t \in \mathbb{R}\} = \{z(-2,-1,1,0) + t(1,2,0,1) : z, t \in \mathbb{R}\}$ y $\{(-2,-1,1,0), (1,2,0,1)\} \xrightarrow{b} N({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}})$. Utilizando la proposición anterior, tenemos que

$$ \{coord_{\mathcal{A}}^{-1}(-2,-1,1,0), coord_{\mathcal{A}}^{-1}(1,2,0,1)\} \xrightarrow{b} N(T) $$

Es decir,

$$ \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{b} N(T) $$

Ejemplo 8.7 *Sean $\mathcal{A} = \{1, t, t^2\} \xrightarrow{b} \mathbb{R}_2[x]$ y $\mathcal{B} = \{(2,0,-1), (0,1,4), (0,0,3)\} \xrightarrow{b} \mathbb{R}^3$ y $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ tal que*

$$ {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} $$

Nuevamente, para hallar una base de $N(T)$ comenzamos hallando una base de $N({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}})$.

$$ (x,y,z) \in N({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}) \Leftrightarrow {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} $$

$$ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = -z \end{cases} $$

Concluimos que

$$ N({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}) = \{(3z, -z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(3,-1,1) : z \in \mathbb{R}\} \implies \{(3,-1,1)\} \xrightarrow{b} N({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}) $$

Utilizando la proposición anterior, tenemos que

$$ \{coord_{\mathcal{A}}^{-1}(3,-1,1)\} = \{3 - t + t^2\} \xrightarrow{b} N(T) $$

La siguiente proposición nos da una relación explícita entre la imagen de una transformación y la imagen de su matriz asociada

Proposición 8.4 *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo, consideramos $\mathcal{A} = \{v_1, ..., v_n\} \xrightarrow{b} V$ y $\mathcal{B} = \{w_1, ..., w_m\} \xrightarrow{b} W$ y una transformación lineal $T : V \to W$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *Si* $w \in Im(T) \implies coord_{\mathcal{B}}(w) Im({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}})$

2. *Si* $y \in Im({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}) \implies coord_{\mathcal{B}}^{-1}(y) \in Im(T)$

Demostración:

1. Si $w \in Im(T) \implies \exists v \in V : T(v) = w \implies coord_{\mathcal{B}}(T(v)) = coord_{\mathcal{B}}(w)$. Además, sabemos que $coord_{\mathcal{B}}(T(v)) = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} coord_{\mathcal{A}}(v) \implies coord_{\mathcal{B}}(w) = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} coord_{\mathcal{A}}(v)$ y concluimos que existe un vector $coord_{\mathcal{A}}(v)$ tal que el sistema $coord_{\mathcal{B}}(w) =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{A}} coord_{\mathcal{A}}(v)$ es compatible, por lo que $coord_{\mathcal{B}}(w) \in Im({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}})$.

2. Si $y = (y_1, ..., y_m) \in Im({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}) \implies \exists x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$
{}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \implies (coord_{\mathcal{B}}(T(v_1)))...coord_{\mathcal{B}}(T(v_n))) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = y
$$

$$
\implies x_1.coord_{\mathcal{B}}(T(v_1)) + ... + x_n.coord_{\mathcal{B}}(T(v_n)) = y \implies coord_{\mathcal{B}}(x_1 T(v_1) + ... + x_n T(v_n)) = y
$$

$$
\implies x_1 T(v_1) + ... + x_n T(v_n) = coord_{\mathcal{B}}^{-1}(y) \implies T(x_1 v_1 + ... + x_n v_n) = coord_{\mathcal{B}}^{-1}(y)
$$

Es decir, existe $x_1 v_1 + ... + x_n v_n \in V$ tal que $T(x_1 v_1 + ... + x_n v_n) = coord_{\mathcal{B}}^{-1}(y)$ y por lo tanto, $coord_{\mathcal{B}}^{-1}(y) \in Im(T)$.

La siguiente proposición se demuestra fácilmente a partir de los resultados anteriores.

Proposición 8.5 *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo, consideremos los conjuntos $A = \{v_1, ..., v_n\} \xrightarrow{b} V$ y $B = \{w_1, ..., w_m\} \xrightarrow{b} W$ y una transformación lineal $T : V \to W$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. $Im(T)$ *y* $Im({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}})$ *son isomorfos*

2. $\dim(Im(T)) = rango({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}})$

3. *Si* $\{h_1, ..., h_k\} \xrightarrow{b} Im(T) \implies \{coord_{\mathcal{B}}(h_1), ..., coord_{\mathcal{B}}(h_k)\} \xrightarrow{b} Im({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}})$

4. *Si* $\{y_1, ..., y_k\} \xrightarrow{b} Im({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}) \implies \{coord_{\mathcal{B}}^{-1}(y_1), ..., coord_{\mathcal{B}}^{-1}(y_k)\} \xrightarrow{b} Im(T)$

Cambio de Bases

Definición 8.1 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$. Se conoce como* ***matriz cambio de base*** *de la base $\mathcal{A}$ a la base $\mathcal{A}'$ a la matriz ${}_{\mathcal{A}'}((I))_{\mathcal{A}}$ donde $I : V \to V$ es la transformación identidad.*

Proposición 8.6 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ dos bases de un espacio vectorial V. Entonces, para cualquier $v \in V$ se cumple que*

$$
coord_{\mathcal{A}'}(v) =_{\mathcal{A}'} ((I))_{\mathcal{A}} coord_{\mathcal{A}}(v)
$$

Proposición 8.7 *Sea V un $\mathbb{K}$- espacio vectorial con bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ y sea $I : V \to V$ la transformación identidad. Entonces*

1. ${}_{\mathcal{A}}((I))_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

2. ${}_{\mathcal{A}'}((I))_{\mathcal{A}}$ *es invertible y* $({}_{\mathcal{A}'}((I))_{\mathcal{A}})^{-1} = {}_{\mathcal{A}}((I))_{\mathcal{A}'}$

Proposición 8.8 *Sean* V *y* W *dos* $\mathbb{K}$- *espacios vectoriales con* $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ *bases de* V *y* $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ *bases de* W *y sea* $T : V \to W$ *una transformación lineal. Entonces*

$${}_{\mathcal{B}'}((T))_{\mathcal{A}'} = {}_{\mathcal{B}'}((I_W))_{\mathcal{B}} \cdot \mathcal{B}((T))_{\mathcal{A}} \cdot {}_{\mathcal{A}}((I_V))_{\mathcal{A}'}$$

donde $I_V : V \to V$ *y* $I_W : W \to W$ *son las transformaciones identidad de* V *y* W *respectivamente.*

Ejemplo 8.6 ***Ejercicio 6. Examen GAL1 interactiva. Febrero 2024.*** *Sean las bases ordenadas de* $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{A} := \Big((1,0,0), \quad (0,1,0), \quad (0,0,1)\Big)$ *y*
$\mathcal{B} := \Big((1,1,1), \quad (1,0,1), \quad (0,1,-1)\Big)$. *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* ${}_{\mathcal{A}}[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Entonces:*

(A) $T(x,y,z) = (x, \quad 3x - y + 2z, \quad -x - z)$.

(E) $T(x,y,z) = (2x + 3z, \quad -x + 2y - 5z, \quad -2x - y - z)$.

(I) $T(x,y,z) = (x + 2y - 2z, \quad -y + 2z, \quad 3x + 3y - z)$.

(O) $T(x,y,z) = (x + 2y - z, \quad -3y + 2z, \quad -x - y)$.

(U) $T(x,y,z) = (-2x + 2y + z, \quad , x - y, \quad , -x + 2y + z)$.

(Y) $T(x,y,z) = (x - y + z, \quad y - z, \quad 2x + z)$.

Solución: Para calcular $T(x,y,z)$, *basta con hallar* ${}_{\mathcal{A}}[T]_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{A}}[T]_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[Id]_{\mathcal{A}}$. *La matriz de cambio de base* ${}_{\mathcal{B}}[Id]_{\mathcal{A}}$ *es la inversa* ${}_{\mathcal{A}}[Id]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, *y entonces*

$${}_{\mathcal{A}}[T]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + 2y + z \\ x - y \\ -x + 2y + z \end{pmatrix}$, *y entonces la respuesta correcta es la (U).*

8.4. Práctico 11.

Práctico 11.

Matriz asociada a una transformación lineal.

Ejercicios Sugeridos:

Matriz asociada a una transformación lineal.

1. Hallar ${}_B(T)_A$ en los siguientes casos:

   a) $A = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y $B = \{(1,0),(0,1)\}$.

   b) $A = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $B = (1,0),(0,1)$.

   c) $A = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $B = (1,3),(2,5)$.

2. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ tal que ${}_U(T)_E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, donde $E = \{1, x+1, (x+1)^2\}$ y $U = \{(1,1,0),(1,2,3),(3,2,1)\}$:

   a) Hallar $T(x^2 + x - 1)$.

   b) Encontrar la expresión general de $T(p)$ siendo $p = ax^2 + bx + c$ un polinomio genérico de $\mathbb{R}_2[x]$.

3. Consideremos una matriz $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ y la transformación $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ definida por $T(B) = AB$:

   a) Demostrar que T es lineal.

   b) ¿Existen bases en $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tal que la matriz asociada en dichas bases sea justamente A? Justifique la respuesta.

   c) Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, hallar la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x,y,z) = (2x - y + z, 3y - z, x + 2y + z).$$

   Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $A = \{(1,0,1),(-1,1,2)\}$ Hallar la matriz asociada de la restricción de T a S, $T|_S : S \to \mathbb{R}^3$, utilizando A como base de S y la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

5. Hallar las dos matrices de cambio de base entre la base canónica C de $\mathbb{R}^3$ y la base

$$B = \{(1,1,1),(1,0,1),(-1,0,1),\}$$

   es decir, ${}_B(T)_C$ siendo $T = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Verificar que esta matriz de cambio de base es la inversa de la otra matriz de cambio de base que se puede definir.

6. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente, y $T : V \to W$ una transformación lineal:

   a) Demostrar que existen $k \in \mathbb{N}$, B base de V, y C base de W tal que la matriz asociada en estas bases está dada por

$$({}_C(T)_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \le k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   b) Sea $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ definida por

$$T(a,b,c,d,e) = \begin{pmatrix} a - d & -a + b + 3c - 3d \\ b + 3c - 3d - e & d - e \end{pmatrix}.$$

Hallar bases B y C de $\mathbb{R}^5$ y $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2})$ respectivamente, tal que la matriz asociada a T en esas bases sea

$$_C(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.4.1. Solución Práctico 11.

Matriz asociada a una transformación lineal.

1. a. Dividimos el procedimiento en tres partes: calculamos T en los vectores de la base $\mathcal{A}$, escribimos a los vectores transformados como combinación linel de la base $\mathcal{B}$ y por último, colgamos las coordenadas de los transformados como columnas de la matriz. En este caso, como la base $\mathcal{B}$ es la canónica de $\mathbb{R}^2$, el segundo paso es trivial.

   Tenemos entonces que

   - $T(1,0,0) = (3,1)$
   - $T(0,1,0) = (2,-5)$
   - $T(0,0,1) = (-4,3)$

   Entonces la matriz asociada a la transformación T en las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

   b. Razonando de forma análoga, comenzamos calculando T en la base $\mathcal{A}$

   - $T(1,1,1) = (1,-1)$
   - $T(1,1,0) = (5,-4)$
   - $T(1,0,0) = (3,1)$

   Nuevamente, como la base $\mathcal{B}$ es la canónica de $\mathbb{R}^2$, el segundo paso es trivial y por lo tanto la matriz asociada es

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

   c. En esta parte tenemos la misma base $\mathcal{A}$ de antes así que en el primer paso obtenemos los mismos resultados. Busquemos entonces las coordenadas de estos vectores en la base $\mathcal{B}$. Para el vector $(1,-1)$ tenemos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-3F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

   De donde $coord_{\mathcal{B}}(1,-1) = (-7,4)$. De la misma forma hayamos las coordenadas de $(5,-4)$ y $(3,1)$ y con ellas armamos la matriz.

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{pmatrix}$$

2. a. Utilizaremos el teorema 7,27 de las notas del curso que dice

$$coord_{\mathcal{B}}(T(v)) =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{A}} coord_{\mathcal{A}}(v)$$

Lo primero que tenemos que hacer entonces, es buscar las coordenadas del vector $x^2 + x - 1$ en la base $\mathcal{E}$. Es decir, queremos los α, β, γ que realizan la sigueinte combinación lineal

$$x^2 + x - 1 = \alpha 1 + \beta(x+1) + \gamma(x^2 + 2x + 1)$$

Para que ambos lados sean iguales para todo x, deben cumplirse las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} \gamma = 1 \\ 2\gamma + \beta = 1 \\ \gamma + \beta + \alpha = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto, $coord_{\mathcal{E}}(x^2 + x - 1) = (-1, -1, 1)$ y

$$coord_{\mathcal{U}}(T(x^2 + x - 1)) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b. Usando la matriz asociada, podemos conocer el valor de la transformación T en una base de la siguiente forma.

- $coord_{\mathcal{U}}(T(1)) = (2, 1, 1) \implies T(1) = 2(1, 1, 0) + (1, 2, 3) + (3, 2, 1) = (6, 6, 4)$
- $coord_{\mathcal{U}}(T(x+1)) = (2, 3, 3) \implies T(x+1) = 2(1, 1, 0) + 3(1, 2, 3) + 3(3, 2, 1) = (14, 14, 12)$
- $coord_{\mathcal{U}}(T((x+1)^2)) = (1, 1, 2) \implies T((x+1)^2) = (1, 1, 0) + (1, 2, 3) + 2(3, 2, 1) = (8, 7, 5)$

Consideremos un polinomio genérico $p(x) = ax^2 + bx + c$ y busquemos sus coordenadas en la base $\mathcal{E}$

$$ax^2 + bx + c = \alpha 1 + \beta(x+1) + \gamma(x+1)^2$$

De la ecuación anterior, tenemos que $\gamma = a, \beta = b - 2a, \alpha = c - b + a$. Con esto, podemos calcular el valor de $T(p)$

$$T(p) = (c-b+a)T(1) + (b-2a)T(x+1) + aT(1) = (c-b+a)(6,6,4) + (b-2a)(14,14,12) + a(8,7,5)$$

$$T(p) = (-14a + 8b + 6c, -15a + 8b + 6c, -15a + 8b + 4c)$$

3. a. Es claro que T es lineal por estar definida como un producto de matrices.

b. No existen bases de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tales que la matriz asociada a T en dichas bases sea $\mathcal{A}$. Esto es porque el tamaño de la matriz asociada debe ser 4×4 pues los espacios de salida y llegada de T son de dimensión 4.

c. Para esta parte, calculamos T en las matrices de la base canónica y luego colgamos como columnas de la matriz asociada a los vectores (matrices) obtenidos.

- $T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

- $T\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}$
- $T\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\4&0\end{pmatrix}$
- $T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\0&4\end{pmatrix}$

Por lo que la matriz asociada a T en la base canónica es

$$_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\3&0&4&0\\0&3&0&4\end{pmatrix}$$

4. Comenzamos igual que en las partes anteriores, calculando el valor de T en los vectores de la base. Como estamos considerando la restricción de T a S, solo nos interesa T en los dos vectores de la base $\mathcal{A}$ y no en una base de $\mathbb{R}^3$.

   - $T(1,0,1)=(3,-1,2)$
   - $T(-1,1,2)=(-1,1,3)$

   Como la letra dice que debemos usar la base canónica de $\mathbb{R}^3$, solo resta colocar los vectores recién calculados como columnas de la matriz asociada. Es decir

$$_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{A}}=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&1\\2&3\end{pmatrix}$$

5. Lo que tenemos que encontrar en esta parte es $_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{C}}$ y $_{\mathcal{C}}(Id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{B}}$. Comencemos con la segunda matriz.

   Para encontrar $_{\mathcal{C}}(Id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{B}}$, razonando de forma análoga a los ejercicios anteriores, debemos aplicarle la transformación identidad a los vectores de la base $\mathcal{B}$ y buscar sus coordenadas en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ para luego colgar dichas coordenadas como columnas de la matriz. Es claro que esto resulta en una matriz que tiene como columnas a los vectores de la base $\mathcal{B}$. Es decir

$$_{\mathcal{C}}(Id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

   Para encontrar $_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{C}}$ debemos aplicarle la transformación identidad a los vectores de la base canónica y buscar sus coordenadas en la base $\mathcal{B}$. Consideramos entonces el vector $(1,0,0)$ y buscamos sus coordenadas en $\mathcal{B}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\1&0&0&0\\1&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[F_2-F_1]{F_3-F_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&-1&1&-1\\0&0&2&-1\end{array}\right)$$

   De donde $coord_{\mathcal{B}}(1,0,0)=(0,1/2,-1/2)$. Razonamos de manera análoga para los vectores restantes y obtenemos $coord_{\mathcal{B}}(0,1,0)=(1,-1,0), coord_{\mathcal{B}}(0,0,1)=(0,1/2,1/2)$. Por lo tanto

$$_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

6. a. Sea $k = \dim(Im(T))$ y tomemos una base de la imagen de T, llamémosla $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$. Como estos vectores están en la imagen de T, existen $v_1, v_2, ..., v_k \in V$ tales que $T(v_1) = w_1, \ \ldots, \ T(V_k) = w_k$. Probemos que el conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ es linealmente independiente: supongamos que hay una combinación lineal $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$. Entonces $0 = T(0) = T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_k T(v_k) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k$, y como el conjunto $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ es linealmente independiente tenemos que $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_k = 0$. Ahora llamemos S al subespacio de V generado por $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$. Como este conjunto es linealmente independiente y por definición genera S, es base de S, y entonces $\dim(S) = k$.

   Por otro lado, del Teorema de las Dimensiones sabemos que $\dim(N(T)) = \dim(V) - \dim(Im(T)) = n - k$. Ahora tomamos una base de $N(T)$, que por lo anterior va a tener $n - k$ elementos. Llamemos a estos últimos $v_{k+1}, \ldots, v_n$.

   Ahora probemos que $S \cap N(T) = \{0\}$: un vector v en esa intersección se escribe como combinación lineal $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$, que además cumple que $T(v) = 0$. Entonces $0 = T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_k T(v_k) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k$, y como el conjunto $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ es linealmente independiente tenemos que $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_k = 0$, con lo cual $v = 0$.

   De lo anterior deducimos que la suma $S + N(T)$ es directa, con lo cual $\dim(S + N(T)) = \dim(S) + \dim(N(T)) = k + (n - k) = n$, entonces $S + N(T) = V$. Como V es suma directa de S y $N(T)$, uniendo bases de cada uno de ellos obtendremos una base de V. De esta manera, el conjunto $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ forma una base de V.

   Por otro lado, como el espacio W tiene dimensión m, existen $m - k$ vectores, $w_{k+1}, ..., w_m$, que junto con los k anteriores forman una base de W. Le llamamos $\mathcal{C}$ al conjunto de todos estos vectores, es decir, $\mathcal{C} = \{w_1, ..., w_k, w_{k+1}, ..., w_m\}$.

   Tenemos entonces que para todo vector v_i con $i \leq k$, se cumple que $coord_{\mathcal{C}}(v_i)$ es un vector con un 1 en la i-ésima entrada y ceros en el resto de las entradas pues $T(v_i) = w_i$. Además, para todo vector v_i con $i > k$, se cumple que $coord_{\mathcal{C}}(v_i) = (0, ..., 0)$ pues dicho vector está en el núcleo de T.

   Es claro entonces que en estas bases, la matriz asociada a T cumple las condiciones requeridas.

   b. Comenzamos buscando una base de la imagen. Para esto, consideramos una matriz genérica y estudiamos las condiciones que deben cumplir sus coeficientes para que exista una preimagen. A partir de esto, obtendremos un sistema que del que resulta la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & a_{11} \\ -1 & 1 & 3 & -3 & 0 & a_{12} \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -1 & a_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_{22} \end{array}\right)$$

   Escalerizando, concluimos que las matrices de la imagen deben cumplir que $a_{22} = -a_{11} - a_{12} + a_{21}$. Por lo tanto, una base de la imagen es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   Nos preguntamos entonces, cuáles son las preimágenes de los vectores de esta base. Para esto, consideramos la expresión analítica de la transformación y la igualamos a los diferentes elementos de la base anterior. De este planteo, obtendremos tres sistemas de ecuaciones, compatibles indeterminados, que al resolverlos nos dan la siguiente información:

- $T(d+1, 4d-3c+1, c, d, d+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $T(d, 4d-3c+1, c, d, d+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $T(d, 4d-3c, c, d, d+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Tomando $c = d = 0$ tenemos que los vectores $\{(1, 1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 0, -1)\}$ forman un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^5$ tal que aplicarles T resulta en la base de la imagen que consideramos.

Por otro lado, podemos encontrar una base del núcleo resolviendo un sistema del que resulta la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Nuevamente, escalerizando, vemos que los vectores del núcleo son los que cumplen $e = a = d, b = 4d - 3c$ por lo que una base del núcleo es

$$\{(1, 4, 0, 1, 1), (0, -3, 1, 0, 0)\}$$

Y sabemos que las coordenadas T aplicado a estos vectores, en cualquier base, son $(0, 0, 0, 0)$. Además, junto con los anteriores forman una base de $\mathbb{R}^5$. Es decir, tomaremos la base $\mathcal{C}$ como el conjunto

$$\mathcal{C} = \{(1, 1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 0, -1), (1, 4, 0, 1, 1), (0, -3, 1, 0, 0)\}$$

Lo único que nos falta es completar la base de la imagen para conseguir una base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Para esto agregamos una matriz linealmente independiente con las anteriores. O lo que es lo mismo, agregamos una matriz que no cumpla las condiciones para estar en la imagen de T. Con esto obtenemos la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Con estas bases, la matriz asociada a la transformación tiene la forma que se pide.

CAPÍTULO 9

EVALUACIONES: SEGUNDO PARCIAL.

9.1. Año 2008.

9.1.1. Primer semestre. Segundo parcial: 8 Mayo 2007.

Múltiple opción.

1. Dado el plano π de ecuación $x + 2y + 2z = 1$, sea $\mathbf{r}$ la recta que dista 3 de π, tiene vector director con tercera coordenada nula y que pasa por el punto $(0, 0, 5)$. Indique la ecuación de $\mathbf{r}$

   (A) $\mathbf{r} = \begin{cases} x + 2z = 10 \\ y + z = 5 \end{cases}$

   (B) $\mathbf{r} = \begin{cases} x + 2y + 2z = 10 \\ z = 5 \end{cases}$

   (C) $\mathbf{r} = \begin{cases} x = 0 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$

   (D) $\mathbf{r} = \begin{cases} x + 2y + 2z = -8 \\ z = 5 \end{cases}$

   (E) $\mathbf{r} = \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + z = 5 \end{cases}$

2. Sea $V = \mathbb{R}_n[x]$, el espacio de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual a $n - 1$. Sea $W = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \,|\, p(0) = p(1) = p(-1) = 0\}$ y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces

   (A) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = n - 1$ o $n - 2$.

   (B) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = n, n - 1$, o $n - 2$.

   (C) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = n$.

(D) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = n$ o $n-1$.

(E) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = n-1$.

3. Consideremos $a \in \mathbb{R}$ y $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que:

$$\begin{aligned} T(ax^2 + 2x - 1) &= (-1, 9/2, 10), \\ T((a+1)x + 2) &= (2, 1, 0), \\ T(x^2 + x) &= (0, 1, 2). \end{aligned}$$

Entonces:

(A) Para todo valor de $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ y $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

(B) Si $a = 5$, entonces $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$ y $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

(C) Para todo valor de $a \in \mathbb{R}$, $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$ y $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

(D) Si $a = 5$, entonces $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ y $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

(E) Si $a \neq 5$, entonces $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$ y $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

4. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre espacios de dimensión finita. Entonces:

(A) Si $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(T))$ entonces T es inyectiva.

(B) Si $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(T))$ entonces T es sobreyectiva.

(C) Ninguna de las restantes afirmaciones es correcta.

(D) Si T es sobreyectiva entonces $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ y $\mathrm{Im}(T) = W$.

(E) Si T es inyectiva entonces $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ y $\mathrm{Im}(T) = W$.

5. Consideremos $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que:

$${}_A[T]_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

es su matriz asociada en la base $A = \{(-1, 1, 0), (1, -2, 0), (1, 4, 2)\}$.

Entonces:

(A) $\mathrm{Im}(T) = [(-1, -2, 0), (1, 1, -1)]$ y $\mathrm{Ker}(T) = [(9, -10, 2)]$.

(B) $\mathrm{Im}(T) = [(2, 2, 2), (3, 2, 2)]$ y $\mathrm{Ker}(T) = [(9, -10, 2)]$.

(C) $\mathrm{Im}(T) = [(1, 4, 2)]$ y $\mathrm{Ker}(T) = [(-1, 1, 0), (1, -2, 0)]$.

(D) $\mathrm{Im}(T) = [(-1, -2, 0), (1, 1, -1)]$ y $\mathrm{Ker}(T) = [(-2, 6, 1)]$.

(E) $\mathrm{Im}(T) = [(1, 3, 1), (0, 1, 1)]$ y $\mathrm{Ker}(T) = [(-2, 6, 1)]$.

6. Sean v_1, v_2, v_3, v_4 vectores diferentes de un mismo espacio vectorial tales que: $A = \{v_1, v_2\}$ y $B = \{v_3, v_4\}$ son conjuntos L.I. Sean $S_1 = [v_1, v_2]$ y $S_2 = [v_3, v_4]$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

(i) $S_1 + S_2 = [v_1 + v_3, v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_2 + v_4]$.

(ii) $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

(iii) $\dim(S_1) + \dim(S_2) = \dim(S_1^\top S_2) + \dim(S_1 + S_2)$.

(A) Las tres afirmaciones son verdaderas.
(B) Solo la afirmación (i) es verdadera.
(C) Ninguna de las restantes opciones es correcta.
(D) Solo las afirmaciones (i) y (ii) son verdaderas.
(E) Solo la afirmación (iii) es verdadera.

7. Sea S_1 el subespacio de $V = \mathbb{R}_3[x]$ formado por los polinomios que verifican $p(-1) = 0$, S_2 el subespacio de V generado por: $\{t^3 + t, t^2 - t, 2t + 1\}$. Entonces se cumple que:

(A) $V = S_1 + S_2$ y $\dim(S_1 \cap S_2) = 2$.
(B) $V = S_1 + S_2$ y $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$.
(C) $V = S_1 + S_2$ y $\dim(S_1 \cap S_2) = 3$.
(D) $V \neq S_1 + S_2$.
(E) $V = S_1 \oplus S_2$.

8. Sean $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal, $A = \{(1,1,0), (0,1,1), (0,-1,1)\}$ y

$$B = \{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}.$$

La matriz asociada a T de la base A en la base B es:

$$_B(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se verifica que:

(A) $T(1,-1,0) = (5,4,5,1)$.
(B) $T(1,-1,0) = (3,3,4,1)$.
(C) Ninguna de las anteriores es correcta.
(D) $T(1,-1,0) = (1,3,-1,0)$.
(E) $T(1,-1,0) = (1,4,-1,1)$.

9. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 5, y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

I Necesariamente existe $v \in V$ tal que $T(v) \neq 0$.

II Si $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$, entonces existe $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ conjunto linealmente independiente tal que $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\} \subset V$ es linealmente independiente.

III Si $T^3 = 0$, entonces $\mathrm{Ker}(T) \subset \mathrm{Im}(T)$.

Entonces,

(A) Las tres afirmaciones son correctas.
(B) Solo las afirmaciones I) y III) son correctas.

(C) Solo la afirmación I) es correcta.
(D) Solo las afirmaciones I) y II) son correctas.
(E) Solo las afirmaciones II) y III) son correctas.

10. Sea $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$, $n > 1$, tal que $T(A) = A + A^t$. Indicar la opción correcta:

(A) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \frac{n(n-1)}{2}$.

(B) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = \frac{n(n-1)}{2}$.

(C) T es sobreyectiva pero no inyectiva.

(D) T es inyectiva pero no sobreyectiva.

(E) T es biyectiva.

9.2. Año 2011.

9.2.1. Primer semestre. Segundo parcial: 28 Junio 2011.

Múltiple opción.

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión n, y sea $T : V \to V$ una transformación lineal que cumple $T^2 = 0$ ($T \circ T = 0$). Se consideran las siguientes afirmaciones:

   (I) $N(T^2) \subseteq \mathrm{Im}(T)$.

   (II) $\mathrm{Im}(T) \subseteq N(T)$.

   (III) $\dim \mathrm{Im}(T) \leq \frac{n}{2}$.

   Indicar la opción correcta:

   (A) Solamente las afirmaciones I y II son correctas.

   (B) Solamente las afirmaciones II y III son correctas.

   (C) Las tres afirmaciones son correctas.

   (D) Solamente la afirmación II es correcta.

   (E) Solamente la afirmación III es correcta.

2. Sean $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[x]$ y $S : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ tales que $T(a, b) = (a + 2b)x^2 + (b - a)x$ y

$$_A((S))_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   siendo $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $B = \{1, x, x^2\}$.

   Se cumple entonces que:

   Indicar cuál de las siguientes opciones describe la composición de las transformaciones lineales S y T definidas como:

   (A) $S \circ T(a, b) = (a + 5b, 2a + 4b)$
   (B) $S \circ T(a, b) = (0, -a + b, 2a + 4b)$
   (C) $S \circ T(a, b) = (a + 2b, -a + b, 2a + 4b)$
   (D) $S \circ T(a, b) = (-a + b, a + 5b, 2a + 4b)$
   (E) $S \circ T(a, b) = (0, a + 5b, 2a + 4b)$

3. Se consideran los siguientes subespacios vectoriales:

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0\}$$
$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z + w = 0\}$$
$$V = [(1, -2, 1)] \subset \mathbb{R}^3$$

   Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

   (A) Existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $N(T) = V$ e $Im(T) = S \cap U$.

   (B) Existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $N(T) = V$ e $Im(T) = S$.

(C) Existen al menos dos transformaciones lineales distintas $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tales que $N(T) = V$ e $Im(T) = S \cap U$.
(D) Existen al menos dos transformaciones lineales distintas $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tales que $N(T) = V$ e $Im(T) = U$.
(E) Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ es una transformación lineal tal que $N(T) = V$, entonces $Im(T) = S \cap U$.

4. Consideremos los siguientes subespacios de $\mathbb{R}_3[x]$:

$$S_1 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : 2a - b = 0 \text{ y } a + c - d = 0\}$$
$$S_2 = [x^3 - 2x, 2x^2 - 1]$$

Indicar cuál de las siguientes opciones es correcta:

(A) $\{x^3 + 2x^2 + x, x + 1\}$ es una base de S_1 y $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.
(B) La dimensión de S_1 es 2, por lo que $\mathbb{R}_3[x] \neq S_1 \oplus S_2$ pero $\mathbb{R}_3[x] = S_1 + S_2$.
(C) $\mathbb{R}_3[x] = S_1 \oplus S_2$.
(D) $\{x^3 + 2x^2 - x, x + 1\}$ es una base de S_1 y $S_1 \cap S_2 = [x^3 + 2x^2 - 2x - 1]$.
(E) $\{x^3 + 2x^2 - x, x + 1\}$ es una base de S_1 y $S_1 \cap S_2 = S_1$.

5. Sea r la recta que pasa por el punto $(-4, -5, 3)$ e interseca perpendicularmente a la recta $s(\lambda) = (-1, -3, 2) + \lambda(3, -2, -1)$. Entonces,

(A) r :
$$\begin{cases} 2x + 3z = 1 \\ 3x - 2y - z = -5 \end{cases}$$
(B) r :
$$\begin{cases} x + 3z = 5 \\ 3x - 2y + z = -5 \end{cases}$$
(C) r :
$$\begin{cases} x + y + z = -6 \\ 3x - 2y - z = -5 \end{cases}$$
(D) r :
$$\begin{cases} x + 3z = 5 \\ 3x - 2y - z = -5 \end{cases}$$
(E) r :
$$\begin{cases} x + 3z = 5 \\ x + y + z = -6 \end{cases}$$

6. Dados los siguientes subconjuntos de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$:

$$S_1 = \{M \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}) : \text{traza}(M) = 0\}$$
$$S_2 = \{M \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} : \det(M) = 0\}$$
$$S_3 = \{M \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} : M^2 \text{ es la matriz nula}\}$$

Entonces,

(A) Solo S_1 es un subespacio.

(B) Solo S_1 y S_2 son subespacios.

(C) Solo S_2 y S_3 son subespacios.

(D) Solo S_1 y S_3 son subespacios.

(E) Todos son subespacios.

Desarrollo.

1. Ejercicio 1.

   (a) Definir núcleo e imagen de una transformación lineal.

   (b) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Probar que T es inyectiva si y solo si $N(T) = \{\vec{0}\}$.

   (c) Deducir que si $V = W$, entonces T es invertible si y solo si $N(T) = \{\vec{0}\}$.

   (d) Sean V y W espacios de dimensión finita, y $T : V \to W$ una transformación lineal. Probar:

   (i) Si T es inyectiva, entonces existe una aplicación lineal $S : W \to V$ tal que $S \circ T = Id$.

   (ii) Para la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

   $$T(x, y, z) = (x + y + z, x + y, y + z, x + z),$$

   hallar una aplicación S como se especifica en la parte anterior.

2. Ejercicio 2. Consideremos los siguientes subespacios:

   - $S_1 = \{M \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3} \mid M = -M^t\}$
   - $S_2 = [(0, 1, 2, 1), (2, 1, 0, 1), (-2, 1, 4, 1)]$

   (a) Hallar una base de S_1 y una base de S_2 e indicar en cada caso las respectivas dimensiones.

   (b) Hallar, si es posible, una transformación lineal $T_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ que verifique $Im(T_1) = S_1$. En caso de ser posible definir una tal T_1, ¿se puede definir de una única manera? Justificar.

   (c) Hallar, si es posible, una transformación lineal $T_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ que verifique $Im(T_2) = S_1$ y $N(T_2) = S_2$. En caso de ser posible definir una tal T_2, ¿se puede definir de una única manera? Justificar.

   Justificar en todos los casos.

Solución.

1	2	3	4	5	6
B	E	C	D	D	A

9.3. Año 2012.

9.3.1. Primer semestre. Segundo parcial: 27 Junio 2012.

Mútiple opción.

1. Sea $V = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ el espacio vectorial de las matrices reales de tamaño 2×2. Se consideran los siguientes subconjuntos de V:

$$S_1 = \{A \in V : A = A^t\}$$
$$S_2 = \{A \in V : \text{traza}(A) = 0\}$$

Indicar la opción correcta:

(A) S_1 y S_2 son subespacios vectoriales de V tales que $\dim(S_1 \cap S_2) = 2$ y $\dim(S_1 + S_2) = 4$.

(B) S_1 es un subespacio vectorial de V con $\dim(S_1) = 3$ pero S_2 no es un subespacio vectorial de V.

(C) S_1 y S_2 son subespacios vectoriales de V tales que $V = S_1 \oplus S_2$.

(D) S_1 y S_2 son subespacios vectoriales de V tales que $S_1 + S_2 = [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}]$

(E) S_1 y S_2 son subespacios vectoriales de V tales que $V \neq S_1 + S_2$.

2. Se consideran los siguientes subespacios:

$$S = [1 + x^2]$$
$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : a = b, c = d \right\}$$

siendo $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio de los polinomios reales de grado menor o igual que 2 y $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$. Indicar la opción correcta:

(A) Existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tal que $\mathrm{N}(T) = S$ e $\mathrm{Im}(T) = U$.

(B) Existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tal que $\mathrm{N}(T) = S$ e $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$.

(C) Existe más de una transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tal que $\mathrm{N}(T) = S$ e $\mathrm{Im}(T) = U$.

(D) Si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tal que $\mathrm{N}(T) = S$, entonces $\mathrm{Im}(T)$ es igual a la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(E) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tal que $\mathrm{N}(T) = S$ y $\mathrm{Im}(T) = U$.

3. Sean $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ lineal tal que ${}_B(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, donde $A = \{1, 1 + x, x^2\}$ y $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$.

Indicar la opción correcta:

(A) $N(T) = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(x) = ax^2 + bx + c, 7a + 2b + 3c = 0, 4a + b + 2c = 0\}$ y $Im(T) = \mathbb{R}^2$.

(B) $N(T) = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(x) = ax^2 + bx + c, 7a + 2b + 3c = 0, 4a + b + 2c = 0\}$ y $\dim(Im(T)) = 1$.

(C) $N(T) = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(x) = ax^2 + bx + c, 3a + 2b + c = 0, 4a + b + c = 0\}$ y $Im(T) = \mathbb{R}^2$.

(D) $N(T) = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(x) = ax^2 + bx + c, 3a + 2b + c = 0, 4a + b + c = 0\}$ y $\dim(Im(T)) = 1$.

(E) $N(T) = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(x) = ax^2 + bx + c, 3a + 2b + c = 0, 4a + 3b + 2c = 0\}$ y $Im(T) = \mathbb{R}^2$.

4. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de un espacio vectorial V. Sea S el subespacio de V generado por el conjunto $A = \{v_1 + 2v_2, v_2 - v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4, v_4\}$. Indicar la opción correcta:

   (A) $\dim(S) = \dim(V)$.

   (B) $\dim(V) - \dim(S) = 1$.

   (C) $\dim(S) = 1$.

   (D) $\dim(S) = \dim(V)^2$.

   (E) Ninguna de las otras afirmaciones es correcta.

5. La ecuación de la recta paralela al plano $x+2y-z = 0$, ortogonal a la recta $(x, y, z) = (1, 2, 3)+\lambda(0, 1, -1)$ y que pasa por el punto $(6, 1, -7)$ es:

   (A) $(x, y, z) = (5, 2, -6) + \lambda(-2, 0, 2)$.

   (B) $2x + y + z = 6, x + z = -1$.

   (C) $x + y = 7, -x + y - z = 2$.

   (D) $(x, y, z) = (6, 1, -7) + \lambda(1, 0, 0)$.

   (E) $x + 2y - z = 15, -x + y - z = 2$.

6. Se considera la base $\mathcal{A} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y la base $\mathcal{B} = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ de P_2, los polinomios de grado menor o igual a dos. Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la matriz asociada a la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$:

$$_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Si $coord_A(v) = (2, 1, 0)$ entonces:

   (A) $T(v) = x^2 + 12$.

   (B) $T(v) = x^2 + 5x + 3$.

   (C) $T(v) = x^2 + 6x + 9$.

   (D) $T(v) = x^2 + 8x + 12$.

   (E) $T(v) = (3, 5, 1)$.

Desarrollo.

Ejercicio 1.

1. Sea el conjunto $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_j, \dots, v_p\} \subset V$ y $S = [A]$ (donde S es el subespacio generado por $\mathcal{A}$). Probaremos que si v_j es una combinación lineal de $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} - \{v_j\}$, entonces $[A_0] = S$ (es decir, A_0 también genera al subespacio S).

2. Sean $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ y $S_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0\}$.

   (a) Determina una base de S_1 y una base de S_2, e indica la dimensión en cada caso.

   (b) Encuentra $S_1 \cap S_2$ e indica una base.

Ejercicio 2

1. Sea V un espacio vectorial y S_1 y S_2 dos subespacios no triviales tales que $V = S_1 + S_2$. Demuestra que $V = S_1 \oplus S_2$ si y solo si $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$.

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ y $S : V \to V$ transformaciones lineales que verifican $T^2 = S^2 = 0$ y $T \circ S + S \circ T = \mathrm{Id}$.

   (a) Dado un vector $v \in V$, muestra que si $w_1 = T(S(v))$ y $w_2 = S(T(v))$, entonces $w_1 \in N(T)$ y $w_2 \in N(S)$.

   (b) Demuestra que $V = N(T) + N(S)$. (Sugerencia: usa la parte anterior.)

   (c) ¿Se cumple que $V = N(T) \oplus N(S)$?

   (d) Demuestra que $\mathrm{Im}(T) = N(T)$ y $\mathrm{Im}(S) = N(S)$.

Solución.

1	2	3	4	5	6
A	C	A	B	B	D

Solución Ejercicio 1.

1. Ver notas del curso.

2. a) $\{(1, 1, 0, 1), (1, -1, 1, 1), (1, -1, 1, -1)\}$ es una base de S_1 y la dimensión de S_1 es 3. $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ es una base de S_2 y la dimensión de S_2 es 3.

b) Tenemos que $S_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 2z = 0\}$ y $S_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0\}$, de donde $S_1 \cap S_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 2z = 0, x + y - z + t = 0\}$ y una base de $S_1 \cap S_2$ es $\{(1, 1, 0, -2), (2, 0, 1, -1)\}$.

Solución Ejercicio 2.

1. Ver notas del curso.

2. a) $T(w_1) = T^2(S(v)) = 0$, entonces $w_1 \in N(T)$. $S(w_2) = S^2(T(v)) = 0$, entonces $w_2 \in N(S)$.

b) Como $T \circ S + S \circ T = \mathrm{Id}$, entonces para todo $v \in V$, $v = (T \circ S + S \circ T)(v) = T(S(v)) + S(T(v))$, y por la parte anterior, $T(S(v)) \in N(T)$ y $S(T(v)) \in N(S)$, de donde $V = N(T) + N(S)$.

c) Como $V = N(T) + N(S)$, tenemos que $V = N(T) \oplus N(S)$ si y solo si $N(T) \cap N(S) = \{\mathbf{0}\}$. Sea $v \in N(T) \cap N(S) = \{\mathbf{0}\}$. Entonces $T(v) = S(v) = \mathbf{0}$ y como para cualquier v se cumple $v = T(S(v)) + S(T(v))$, tenemos que $v = \mathbf{0}$, entonces $N(T) \cap N(S) = \{\mathbf{0}\}$ y $V = N(T) \oplus N(S)$.

d) Para ver que $Im(T) = N(T)$ probaremos que $Im(T) \subset N(T)$ y $N(T) \subset Im(T)$.

$Im(T) \subset N(T)$: Sea $w \in Im(T)$, entonces $w = T(v)$ para algún $v \in V$ y $T(w) = T^2(v) = \mathbf{0}$, de donde $w \in N(T)$.

$N(T) \subset Im(T)$: Sea $v \in N(T)$. Como para todo $v \in V$ se cumple $v = T(S(v)) + S(T(v))$, tenemos que $v = T(S(v)) + S(\mathbf{0}) = T(S(v))$ y, por lo tanto, $v \in Im(T)$, de donde $N(T) \subset Im(T)$.

Análogamente se prueba que $Im(S) = N(S)$.

9.4. Año 2013.

9.4.1. Primer semestre. Segundo parcial: 03 Julio 2013.

Múltiple opción.

1. Se consideran dos transformaciones lineales $T, S : V \to V$. Entonces:
   (A) $N(T+S) = N(T) + N(S)$.
   (B) $Im(T+S) = Im(T) + Im(S)$.
   (C) $V = N(T) + Im(T)$.
   (D) Si $V = N(T) + Im(T) = N(S) + Im(S)$ entonces $N(T) = N(S)$ y $Im(T) = Im(S)$.
   (E) $N(T) \subset N(S \circ T)$.

2. Sea V un espacio vectorial y sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ un conjunto LI de V, entonces
   (A) $\dim(V) = 4$.
   (B) $\{v_1, v_1 - 2v_2, v_1 + v_3\}$ es LD.
   (C) Si $S_1 = [2v_1 - v_2, -3v_2]$ y $S_2 = [v_1 - v_3, 2v_3]$, entonces $V = S_1 \oplus S_2$.
   (D) $v_3 \notin [2v_1 - v_2, -3v_2, v_1 + 2v_3, v_4]$.
   (E) $\dim([v_1, v_1 - 2v_2, v_1 + v_3]) = 3$.

3. Si $\mathbb{R}_2[x]$ es el espacio vectorial de los polinomios con grado menor o igual a 2, se considera la función $T : \mathbb{R}_2[x] \to R^3$ que cumple:
   $T(2x^2 - 3x + 1) = (-6, 5, -4)$, $T(x^2 + 2) = (0, 1, 1)$, $T(x + 1) = (2, -1, 2)$, $T(1) = (0, 0, 1)$. Entonces:
   (A) Existen infinitas transformaciones lineales que cumplen estas condiciones.
   (B) No existe ninguna transformación lineal que cumple con estas condiciones.
   (C) Existe una única transformación lineal que cumple estas condiciones y $T(3x^2 - 5x + 3) = (-10, 8, -5)$.
   (D) Existe una única transformación lineal que cumple estas condiciones y $T(3x^2 - 5x + 3) = (-1, 2, -5)$.
   (E) Existe una única transformación lineal que cumple estas condiciones y $T(3x^2 - 5x + 3) = (4, 8, -2)$.

4. Sea $V = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ y considere el subespacio S definido como: $S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]$.
   Entonces la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ si y solo si:
   (A) $a + b + c + d = 0$.
   (B) $b = c = 0$.
   (C) $a - 2b - c + d = 0$.
   (D) $a - 2b + 2c - d = 0$.
   e) $b = d = 0$.

5. Si $\mathbb{R}_2[x]$ es el espacio vectorial de los polinomios con grado menor o igual a 2, sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ definida por $T(p) = p'$, siendo p' la derivada de p. Entonces:
   (A) T es una transformación lineal y es biyectiva.

(B) T es una transformación lineal y es sobreyectiva pero no inyectiva.

(C) T es una transformación lineal y es inyectiva pero no sobreyectiva.

(D) T no es una transformación lineal ni inyectiva ni sobreyectiva.

(E) T no es una transformación lineal.

6. Sea $S = [(1,2,1),(a,a+b,b)]$ y $u = (b,a-b,a) \in \mathbb{R}^3$ con $a,b \in \mathbb{R}$. Entonces $u \in S$:

(A) Solo si $a = 0$ (cualquier b).

(B) Solo si $b = 0$ (cualquier a).

(C) Para cualquier a y b.

(D) Solo si $a = b = 0$.

(E) Solo si $a = b = 1$.

7. Sea $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$ y $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0\}$. Entonces:

(A) $\dim(S_1) = \dim(S_2) = 2$ y $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2$.

(B) $\dim(S_1) = \dim(S_2) = 2$ y $\mathbb{R}^3$ no es suma directa de S_1 y S_2.

(C) $\dim(S_1) = 2$, $\dim(S_2) = 1$ y $S_1 + S_2 = \mathbb{R}^3$.

(D) $\dim(S_1) = 2$, $\dim(S_2) = 1$ y $S_1 + S_2 \neq \mathbb{R}^3$.

(E) Ninguna de las anteriores.

8. Sean $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal inyectiva, $A = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto linealmente independiente y $B = \{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$. Entonces:

(A) B es base de $\mathbb{R}^3$ y ${}_B(T)_A$ es la identidad.

(B) B es base de $\mathbb{R}^3$ y ${}_B(T)_A$ no es invertible.

(C) B es LI pero no generador de $\mathbb{R}^3$.

(D) B genera a $\mathbb{R}^3$ pero no es LI.

(E) $N(T) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ y $Im(T) = \mathbb{R}^3$.

9. Sea V un espacio vectorial y $A = \{u_1, u_2, u_3\} \subset V$. Considere las siguientes afirmaciones:

(I) Si $u_3 = 2u_1$ entonces el subespacio generado por A es igual al subespacio generado por $A_0 = \{u_2, u_3\}$.

(II) Si A es un conjunto generador de V, entonces la dimensión de V es 3.

(III) El subespacio generado por A es el mismo que el subespacio generado por el conjunto $B = \{u_1, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3\}$.

(IV) El subespacio generado por el conjunto B del ítem (III) está incluido en el subespacio generado por A pero no viceversa.

Entonces:

(A) Solo la opción (I) es verdadera.

(B) Solo (II) y (IV) son verdaderas.

(C) Solo la opción (III) es verdadera.

(D) Solo la opción (IV) es verdadera.

(E) Solo (I) y (III) son verdaderas.

10. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal, tal que su matriz asociada en las bases canónicas es:
$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:
(A) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\dim(Im(T)) = 2$ y $\dim(N(T)) = 1$.
(B) $\dim(Im(T)) = 2$ y $\dim(N(T)) = 1$ si y solo si $\lambda = -2$ o $\lambda = -1$.
(C) $\dim(Im(T)) = 2$ y $\dim(N(T)) = 1$ si y solo si $\lambda \neq -2, \lambda \neq -1$.
(D) Si $\lambda = -2$ entonces $\dim(Im(T)) = 2$ y $\dim(N(T)) = 0$.
(E) Si $\lambda = -1$ entonces $\dim(Im(T)) = 1$ y $\dim(N(T)) = 2$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	E	C	C	D	B	B	A	E	A

9.4.2. Segundo semestre. Segundo parcial: 28 Noviembre 2013.

Verdadero-falso.

1. Si $\dim(V) = \dim(W) = n$ y $T : V \to W$ es lineal, entonces T es un isomorfismo.
2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y sean $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ subconjuntos de V tales que los correspondientes subespacios generados coinciden. Entonces, A es linealmente independiente si y solo si B lo es.
3. Sea V un espacio vectorial, S_1 y S_2 dos subespacios de V. Si B_1 es una base de S_1 y B_2 es una base de S_2, entonces $B_1 \cap B_2$ es una base de $S_1 \cap S_2$.
4. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ la transformación lineal definida por $T(p) = p(1) + p'(1)(x-1) + \dfrac{p''(1)}{2}(x-1)^2$, entonces T es biyectiva.
5. Sea $S : V \to V$ una transformación lineal. Entonces, $T : V \to V \times V$ definida para todo $u \in V$ por $T(u) = (S(u) + 2u, S(S(u)))$ es lineal.
6. En $\mathbb{R}_6[x]$ existen subespacios S_1 y S_2 tales que $\dim(S_1) = 5$, $\dim(S_2) = 3$ y $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.
7. Sea $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ y $T :\in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ definida por $T(B) = ABA$. Entonces, A es la matriz asociada a T en algún par de bases de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$.
8. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ biyectiva. Entonces, $v \wedge T(v) \neq 0$ para todo $v \neq 0$.
9. Si $\{u, v, w\} \subset V$ es linealmente independiente y $T : V \to V$ es una transformación lineal biyectiva, entonces el conjunto $\{2T(u) + T(v), 3T(v), T(w) - T(u)\}$ es linealmente independiente.
10. Sea $A \in\in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ y u un vector fijo de $\mathbb{R}^3$. Entonces, $S = \{X \in \mathbb{R}^3 : AX = \langle X, u\rangle u\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Múltiple opción.

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 6 & -4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que ${}_A(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Indique la opción correcta:

   (A) $N(T) = \{(x, y, z) : x - 2y = 0, 2x + 3y + z = 0\}$

   (B) $(2, 1, -7) \in N(T)$

   (C) $(9, 5, -6) \in N(T)$

2. Considere $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ y los subespacios $S_1 = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : A^t = A\}$ y $S_2 = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : A^t = -A\}$. Indique la opción correcta:

   (A) $S_1 + S_2 = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ y $S_1 \cap S_2 \neq \{0\}$

   (B) $S_1 \oplus S_2 = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$

   (C) $S_1 + S_2 \neq \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ y $S_1 \cap S_2 = \{0\}$

3. Sea V un espacio vectorial tal que $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente. Sea S_1 el subespacio generado por el conjunto $\{v + w, u\}$ y S_2 el subespacio generado por el conjunto $\{u - v, w\}$. Indique la opción correcta:

   (A) $\{u - v - w\}$ es un generador de $S_1 \cap S_2$.

   (B) $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

   (C) $\{v + w, u, u - v, w\}$ es una base de $S_1 + S_2$.

4. Sea $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ una función que verifica

   $T((1, 0, 0, 0, 0)) = (0, 0, 0, 0, 0)$

   $T((0, 0, 0, 0, 1)) = (0, 5, 0, 0, 0)$

   $T((0, 3, 0, 1, 0)) = (2, 4, 5, 8, 9)$

   $T((0, -9, 1, 0, 0)) = (1, 7, -7, 6, 2)$

   Indique la opción correcta:

   (A) Existen infinitas transformaciones lineales inyectivas $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ que verifican las condiciones anteriores.

   (B) Existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ que verifica las condiciones anteriores.

   (C) Existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ que verifica las condiciones anteriores y cumple $(0, 1, 0, 0, 0) \in N(T)$.

5. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Indique la opción correcta:

   (A) Si $\dim(V) > \dim(W)$ entonces $N(T) \neq \{0\}$.

   (B) Si $\dim(V) < \dim(W)$ entonces $\dim(Im(T)) = \dim(V)$.

   (C) Si $\dim(V) > \dim(W)$ y T es sobreyectiva, entonces dada una base B de V se tiene que $T(B)$ es una base de W.

6. Sean $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ definida por $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(-1) & p(2) \end{pmatrix}$ y el subespacio $S = \left[\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]$.
   Indique la opción correcta:
   (A) $S \cap Im(T) = \{0\}$
   (B) $S \subset Im(T)$
   (C) T es un isomorfismo.

7. Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\alpha \neq 0$, y el subespacio $S = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(x+\alpha) = p(x-\alpha), \forall x \in \mathbb{R}\}$. Indique la opción correcta:
   (A) $\dim(S) = 0$.
   (B) $\dim(S) = 1$.
   (C) $\dim(S) = 2$ para un número finito de valores de α.

8. Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V. Considere $T : V \to V$ una transformación lineal tal que:
   $T(v_1) = v_4$
   $T(v_2) = v_4 + v_3$
   $T(v_3) = v_4 + v_3 + v_2$
   $T(v_4) = v_4 + v_3 + v_2 + v_1$
   Indique la opción correcta:
   (A) $T \circ T$ no es sobreyectiva.
   (C) $T \circ T$ no es inyectiva.
   (C) $T \circ T$ es inyectiva y sobreyectiva.

9. La ecuación de la recta que pasa por $P = (1, 2, 2)$ y es ortogonal a las rectas $r_1 : x + 2y - 3z - 1 = 0, x + 2y - z = 0$ y $r_2 : 3x - y + 3z = 0, x + 4y - 2 = 0$ es:
   (A) $\frac{x-1}{13} = \frac{y-2}{26} = \frac{z-2}{6}$
   (B) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$
   (C) $\begin{cases} x = 1 - 26\lambda \\ y = 2 - 43\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 12\lambda \end{cases}$

10. Indique la opción correcta:
   (A) Si A y B son semejantes entonces $A + I$ y $B + I$ también son semejantes, siendo I la matriz identidad.
   (B) Si A y B son semejantes entonces $A - B$ es semejante a la matriz nula.
   (C) Existe una matriz invertible $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tal que A es semejante a $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	V	F	V	V	F	F	F	V	V

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	A	C	A	A	B	C	A	A

9.5. Año 2014.

9.5.1. Primer semestre. Segundo parcial: 05 Julio 2014.

Múltiple opción.

1. En $\mathbb{R}^4$, se consideran los subespacios vectoriales

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_2 - x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

y

$$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 - x_2 + x_4 = 0\}.$$

Entonces:

(A) $\dim(S_1) = 2$, $\dim(S_2) = 3$ y $\mathbb{R}^4 = S_1 + S_2$ pero la suma no es directa.
(B) $\dim(S_1) = 2$, $\dim(S_2) = 3$ y $\mathbb{R}^4 = S_1 \oplus S_2$.
(C) $\dim(S_1) = 2$, $\dim(S_2) = 2$ y $\mathbb{R}^4 = S_1 \oplus S_2$.
(D) $\dim(S_1) = 2$, $\dim(S_2) = 2$ y $\mathbb{R}^4 \neq S_1 + S_2$.
(E) $\dim(S_1) = 2$, $\dim(S_2) = 3$ y $\mathbb{R}^4 \neq S_1 + S_2$.

2. Sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Consideremos los conjuntos $A_1 = \{v_2 - v_1, v_3 - v_1, v_3\}$ y $A_2 = \{v_2 - v_1, v_3 - v_1, v_2 - v_3\}$. Entonces:

(A) A_1 es base de $\mathbb{R}^3$ y A_2 no lo es.
(B) A_2 es base de $\mathbb{R}^3$ y A_1 no lo es.
(C) Tanto A_1 como A_2 son bases de $\mathbb{R}^3$.
(D) Ni A_1 ni A_2 son bases de $\mathbb{R}^3$.
(E) No es posible determinar si A_1 y A_2 son bases de $\mathbb{R}^3$ sin conocer los vectores v_1, v_2, v_3.

3. Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $T^2 = -2T$ (Se recuerda que $T^2 = T \circ T$). Consideremos las siguientes afirmaciones:

(A) $\mathrm{Im}(T^2) = \mathrm{Im}(T)$.
(B) $\mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{N}(T) = \{0\}$.
(C) $V = \mathrm{N}(T) + \mathrm{Im}(T)$.
(D) $V = \mathrm{N}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.
(E) Como $T^2 = -2T$, necesariamente T es la transformación 0 (es decir, $T(v) = 0$ para todo $v \in V$).

Entonces:

(A) Todas las afirmaciones anteriores son ciertas.
(B) Sólo las afirmaciones (c) y (e) son ciertas.
(C) Sólo las afirmaciones (a), (b), (c) y (d) son ciertas.
(D) Sólo las afirmaciones (a) y (b) son ciertas.
(E) Sólo las afirmaciones (a), (c) y (d) son ciertas.

4. Sean $\mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales, y $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ el espacio vectorial de las matrices 2×2 con entradas reales. Se considera una transformación lineal $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tal que

$$T(1+x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$T(1-x^3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$T(x+x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$T(x-x^2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

(A) Estos datos no determinan una única transformación lineal.
(B) Estos datos determinan un isomorfismo entre $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$.
(C) Estos datos determinan una transformación lineal cuyo núcleo tiene dimensión 1.
(D) Estos datos determinan una transformación lineal cuya imagen tiene dimensión 2.
(E) No hay ninguna transformación lineal que verifique las condiciones indicadas.

5. Sean $A = \{(1,1,1),(1,2,0),(1,0,0)\}$ y $B = \{(2,2),(-1,1)\}$. A es base de $\mathbb{R}^3$ y B es base de $\mathbb{R}^2$. Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal cuya matriz asociada en las bases A y B es

$${}_B[T]_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

entonces:

(A) $T(x,y,z) = (y+2z, -x+y+3z)$.
(B) $T(x,y,z) = \left(x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z, 3x - y - 3z\right)$.
(C) $T(x,y,z) = (x, 7x - 2y - 6z)$.
(D) $T(x,y,z) = (-x+2y, 5x-6z)$.
(E) $T(x,y,z) = \left(2x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z, 3x - y - 3z\right)$.

6. En $\mathbb{R}^3$, consideramos los subespacios vectoriales

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$$

y

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y=0, x+y-z=0\}.$$

Observemos que $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2$. Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida del modo siguiente: $\forall v \in \mathbb{R}^3$, si $v = s_1 + s_2$ con $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$, entonces $T(v) = 4s_1$.

En $\mathbb{R}^3$ consideramos las bases $B = \{(1,-1,0),(1,1,0),(1,1,2)\}$ y $C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. La matriz asociada a T en las bases B y C es

(A) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(E) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Desarrollo.

7. Ejercicio 7.

   1 Sean V y W dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión finita y $T : V \to W$ una transformación lineal. Probar que T es inyectiva si y solo si $N(T) = \{0\}$.

   2 Probar que no existen transformaciones lineales inyectivas de $V = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \mid A^t = A\}$ en $\mathbb{R}^2$.

8. Ejercicio 8.

   1 Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un subconjunto de V. Definir la expresión: A es linealmente independiente.

   2 Sean V y W dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Probar que si $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es un subconjunto de V tal que $T(A) = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ tiene n elementos y es linealmente independiente en W, entonces A es linealmente independiente en V.

Solución.

1	2	3	4	5	6
A	A	C	C	C	E

9.5.2. Segundo semestre. Segundo parcial. 27 Noviembre 2014.

Verdadero-falso.

1. Sea V un espacio vectorial, S_1 y S_2 subespacios de V tales que $V = S_1 \oplus S_2$, y sea $T : V \to V$ una transformación lienal. Si T es un isomorfismo entonces $T(S_1) \oplus T(S_2) = V$.

2. Si $T : V \to V$ es una transformación lineal, entonces $S : V \to V \times V$ definida para todo $v \in V$ como $S(v) = (T(v) + v, T(2T(v)))$, es también una transformación lineal.

3. Considere $T : V \to W$, una transformación lineal inyectiva. Si $A = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de V entonces $T(A) = \{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)\}$ es una base de W.
4. En $\mathbb{R}_5[x]$ existen subespacios S_1 y S_2 tales que $\dim(S_1) = 5, \dim(S_2) = 3$ y $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$.
5. Si $T : V \to V$ es una trasnformación lineal sobreyectiva, entonces $T \circ T$ también lo es.
6. Considere $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ un isomorfismo. Existe una base B de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tal que
$$_B(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
7. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal y $\dim(V) > \dim(W)$ entonces $\ker(T) \neq \{\mathbf{0}\}$.
8. Sea $\{u, v, w\} \subset V$ linealmente independiente y $T : V \to V$ una transformación lineal inyectiva. Entonces $\{T(u) - T(v), 2T(w) + T(u), 3T(v)\}$ es también linealmente independiente.
9. Consideremos el espacio vectorial $V = \mathbf{Mat}(\mathbb{C})_{2\times 2}$ con el cuerpo de escalares $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Entonces existe una transformación lineal $T : V \to V$ tal que $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ y dim(Im(T))=4.
10. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $A = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ un conjunto generador de V. Entonces podemos eliminar vectores de A convenientemente para obtener una base de V.

Múltiple opción.

1. Considere el conjunto $A = \{(1, 1, 2, 4), (2, -1, -5, 2), (1, -1, -4, 0), (2, 1, 1, 6)\} \subset \mathbb{R}^4$. Indique la opción correcta:
   (A) La dimensión del espacio generado mpor A es 3.
   (B) La dimensión del espacio generado mpor A es 2.
   (C) La dimensión del espacio generado mpor A es 4.
2. Considere $\mathbb{R}^3$ y los subespacios vectoriales $S_1 = [(1, 0, 0), (1, 1, 0)]$ y $S_2 = [(0, 3, 0), (0, 0, 1)]$. Entonces
   (A) $S_1 \cap S_2 = [(1, 0, 0), (1, 1, 0)]$ y $S_1 + S_2 = \mathbb{R}^3$.
   (B) $S_1 \cap S_2 = [(0, 1, 0)]$ y $S_1 + S_2 = \mathbb{R}^3$.
   (C) $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$ y $S_1 + S_2 = [(1, 0, 0), (1, 1, 0)]$.
3. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x, y, z) = (3x + z, -2x + y, -x + 2y + 4z)$.
   Entonces:
   (A) T es invertible.
   (B) ker(T) $= \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$.
   (C) T no es sobreyectiva.
4. Sean $A = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ y $B = \{x^2 + 1, x, 1\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}_2[x]$ la transformación lineal determianda por la matriz asociada
$$_B(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Entonces

(A) $T(5,1,1) = 6x^2 + x + 5$.
(B) $T(5,1,1) = 4x^2 + x + 1$.
(C) $T(5,1,1) = 4x^2 + x + 4$.

5. Considere $S_1 = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3} : A^t = A\}$ y $S_2 = \{B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3} : B^t = -B\}$, subespacios de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$.

   Entonces:

   (A) $\dim(S_1 \cap S_2) = 6$.
   (B) $S_1 \oplus S_2 = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$.
   (C) $\dim(S_1 + S_2) = 3$.

6. Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ definida por $T(p) = q$, donde $q(x) = p(x) - xp'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   Entonces:

   (A) $\ker(\mathrm{T}) = [2x]$ e $\mathrm{Im(T)} = [1, -x^2, -2x^3]$.
   (B) $\ker(\mathrm{T}) = [x]$ e $\mathrm{Im(T)} = [x + x^3, x - 2x^3]$.
   (C) $\ker(\mathrm{T}) = \{\mathbf{0}\}$ e $\mathrm{Im(T)} = \mathbb{R}_3[x]$.

7. Sean V, W y U espacios vectoriales reales tales que $\dim(\mathrm{V}) = \dim(\mathrm{W}) = 2\dim(\mathrm{U})$. Considere dos transformaciones lineales $T : V \to V$ y $S : W \to U$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

   I) $\ker(S \circ T) \subset \ker(\mathrm{T})$.
   II) $\ker(\mathrm{T}) \subset \ker(S \circ T)$.
   III) $\dim(\mathrm{Im}(S \circ T)) > \dim\ (\ker(S \circ T))$.

   Indicar la opción correcta:

   (A) Solamente las afirmaciones II y III son ciertas.
   (B) Solamente las afirmaciones I y III son ciertas.
   (C) Solamente la afirmación II es cierta.

8. Considere $\mathbb{R}^2$ y las bases ordenadas $C = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B\{(2,3),(1,0)\}$. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{2}$ en sentido antihorario.

   Entonces

   (A) ${}_B(T)_C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (B) ${}_B(T)_C = \dfrac{\pi}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (C) ${}_B(T)_C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	V	F	F	V	F	V	V	F	V

1	2	3	4	5	6	7	8
B	B	A	C	B	A	C	C

9.6. Año 2015.

9.6.1. Primer semestre. Segundo parcial: 2 Junio 2015.

Verdadero-falso.

1. Sea $S : V \to V$ una transformación lineal. Entonces $T : V \to V \times V$ definida como $T(u) = (S(2u) - 3u, S(S(u)))$ es una transformación lineal.
2. Sea $M \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ y $T_M : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3} \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ tal que $T_M(A) = AM$. Entonces M es la matriz asociada a T_M en algún par de bases de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$.
3. En $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ existen subespacios S_1 y S_2 tales que $\dim(S_1) = 5$, $\dim(S_2) = 4$, y $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.
4. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal inyectiva y $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ es linealmente independiente, entonces $\{2T(v_1) + T(v_2), -2T(v_3 + v_1), T(v_1)\}$ es linealmente independiente.
5. Existe $T : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ una transformación lineal inyectiva.
6. Todo espacio vectorial $V \neq \{\mathbf{0}\}$ tiene un subconjunto linealmente dependiente con dos elementos.
7. Sea V un espacio vectorial. Un conjunto $B \subset V$ es una base de V si y solo si todo elemento de V se escribe en forma única como combinación lineal de elementos de B.
8. La transformación lineal $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ dada por
$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_0 - a_1 & -a_0 + a_1 + 2a_3 \\ a_2 - a_3 & a_2 + a_3 \end{pmatrix}$$
tiene núcleo de dimensión uno e imagen de dimensión tres.

Múltiple opción.

1. En $\mathbb{R}^3$, consideramos los subespacios $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$ y $S_2 = [(1, 1, -1), (1, -1, -1), (3, -1, -3)]$.
   (A) S_1 y S_2 tienen la misma dimensión y $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$.
   (B) S_1 y S_2 tienen la misma dimensión y $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$.
   (C) S_1 y S_2 no tienen la misma dimensión y $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$.
   (D) S_1 y S_2 no tienen la misma dimensión y $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$.
2. Sea V un espacio vectorial con base $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Consideremos los conjuntos $B = \{v_1 - v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_3 - v_4, v_1 + v_4\}$ y $C = \{v_1 - v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_3 - v_4, 2v_1 + v_4\}$.
   (A) Tanto B como C son bases de V.
   (B) B es linealmente independiente y C no.
   (C) C es generador de V y B no.
   (D) Ni B ni C son bases de V.
3. Consideremos la función $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$T(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

(A) Como $T(1,0,0) = (1,0,0)$, $T(0,1,0) = (0,1,0)$ y $T(0,0,1) = (0,0,1)$, T es una transformación lineal y $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$.

(B) Como $T(1,0,0) = (1,0,0)$, $T(0,1,0) = (0,1,0)$ y $T(1,1,0) = (1,1,0)$, T es una transformación lineal y $\dim(\mathrm{Im}(T)) \neq 3$.

(C) Como $T(1,0,0) = (1,0,0)$, $T(0,1,0) = (0,1,0)$ y $T(1,0,1) = (1,1,1)$, T es una transformación lineal sobreyectiva.

(D) Si $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$, la restricción de T a S es una transformación lineal.

4. Consideremos las siguientes transformaciones lineales del espacio de polinomios de grado menor o igual a dos en $\mathbb{R}^2$:

$$T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2, \quad T(p) = (p(-1), p(-1)),$$
$$S : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2, \quad S(p) = (p(0), p(1)).$$

Sean $V_1 = \ker(T)$, $V_2 = \ker(S)$ y $V = V_1 + V_2$.

(A) $V = V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}_2[x]$.

(B) $V = V_1 \oplus V_2$ y $V \neq \mathbb{R}_2[x]$.

(C) La suma $V_1 + V_2$ no es directa y $V \neq \mathbb{R}_2[x]$.

(D) La suma $V_1 + V_2$ no es directa y $V = \mathbb{R}_2[x]$.

5. Sean $B = \{(3,0,1), (0,1,2), (1,0,0)\}$ y $A = (1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)$ bases de $\mathbb{R}^3$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$_A[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $v = (2,1,3)$ entonces

(A) $T(v) = (2,0,2)$.

(B) $T(v) = (5,4,7)$.

(C) $T(v) = (0,0,2)$.

(D) $T(v) = (2,3,4)$.

6. Sea $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ una matriz cuyo rango es 1. Supongamos que $n \geq 3$ y consideramos la siguiente transformación lineal

$$T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}, \quad T(M) = A \cdot M.$$

(A) $\dim(\ker(T)) = n^2 - 1$.

(B) $\dim(\ker(T))$ no se puede determinar a partir de los datos dados.

(C) $\dim(\ker(T)) = n(n-1)$.

(D) $\dim(\ker(T)) = n^2 - 3$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8
V	F	V	V	F	V	V	V

1	2	3	4	5	6
A	B	D	A	A	C

Justificación.

Verdadero-falso:

1. **Verdadero.** Se demuestra verificando que $T(u+v) = T(u) + T(v)$ y $T(\alpha u) = \alpha T(u)$ para $u, v \in V$ y $\alpha \in K$.

2. **Falso.** $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ es un espacio vectorial real de dimensión 9, por lo que la matriz asociada a TM en cualquier par de bases debe ser de tamaño 9×9, y M es 3×3.

3. **Verdadero.** Daremos un ejemplo. Sean S_1 el subespacio generado por las matrices

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

y S_2 el subespacio generado por las matrices

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Entonces S_1 y S_2 cumplen que $\dim(S_1) = 5$, $\dim(S_2) = 4$ y $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

4. **Verdadero.** Sabemos que como T es inyectiva, el conjunto $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$ es linealmente independiente. Para ver lo que sucede con $\{2T(v_1) + T(v_2), -2T(v_3 + v_1), T(v_1)\}$, consideremos una combinación lineal

$$\alpha(2T(v_1) + T(v_2)) + \beta(-2T(v_3 + v_1)) + \gamma T(v_1) = 0.$$

Esto es

$$(2\alpha - 2\beta + \gamma)T(v_1) + \alpha T(v_2) - 2\beta T(v_3) = 0.$$

Como $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$ es linealmente independiente,

$$2\alpha - 2\beta + \gamma = 0, \quad \alpha = 0, \quad -2\beta = 0,$$

de donde $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

5. **Falso.** Sea $T : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ una transformación lineal. Por el teorema de las dimensiones,

$$\dim \mathbb{R}_4[x] = \dim \ker(T) + \dim \operatorname{Im}(T) \leq \dim \ker(T) + \dim \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2},$$

de donde

$$\dim \ker(T) \geq \dim \mathbb{R}_4[x] - \dim \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} = 5 - 4 = 1.$$

Por lo tanto, $\ker(T) \neq \{\mathbf{0}\}$ y T no es inyectiva.

6. **Verdadero.** Como $V \neq \{\mathbf{0}\}$, existe $v \in V$ no nulo. Entonces $\{0, v\}$ es un subconjunto linealmente dependiente de V con dos elementos.

7. **Verdadero.** Ver teórico.

8. **Verdadero.**

$$p = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \in \ker(T) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_0-a_1 & -a_0+a_1+2a_3 \\ a_2-a_3 & a_2+a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0-a_1=0 \\ -a_0+a_1+2a_3=0 \\ a_2-a_3=0 \\ a_2+a_3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0=a_1 \\ a_2=a_3=0 \end{cases}$$

Por lo tanto, una base de $\ker(T)$ es $\{1+x\}$, y $\dim\ker(T)=1$. El teorema de las dimensiones nos dice que $\dim \operatorname{Im}(T) = \dim \mathbb{R}_3[x] - \dim\ker(T) = 4-1=3$.

Mútiple Opción

1. Observamos que los elementos de S_1 son de la forma $(x, y, -x-y) = x(1,0,-1)+y(0,1,-1)$, por lo que $A_1 = \{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ es un generador de S_1. Como A_1 es linealmente independiente, es base de S_1 y $\dim(S_1)=2$. Por otro lado, S_2 está generado por $A_2 = \{(1,1,-1),(1,-1,-1),(3,-1,-3)\}$. El conjunto A_2 es linealmente dependiente, y $(3,-1,-3) = (1,1,-1)+2(1,-1,-1)$. Por lo tanto, $A_2' = \{(1,1,-1),(1,-1,-1)\}$ también genera a S_2, y como es linealmente independiente es base de S_2 y $\dim(S_2)=2$. Sea $S = S_1+S_2$. Por ser S un subespacio de $\mathbb{R}^3$, su dimensión es menor o igual que 3. Por otro lado,
$$\dim(S) = \dim(S_1)+\dim(S_2)-\dim(S_1\cap S_2),$$
de donde $\dim(S_1\cap S_2) = \dim(S_1)+\dim(S_2)-\dim(S) \geq 1$. (También es posible hallar $S_1\cap S_2$ directamente, y calcular su dimensión, que resulta ser exactamente 1.) Por lo tanto, la respuesta correcta es: S_1 y S_2 tienen la misma dimensión y $\dim(S1\cap S2)=1$.

2. Para ver si B es linealmente independiente, tomamos una combinación lineal
$$\alpha(v_1-v_2)+\beta(v_1+v_2+v_3)+\gamma(v_3-v_4)+\delta(v_1+v_4)=0,$$
es decir,
$$(\alpha+\beta+\delta)v_1+(-\alpha+\beta)v_2+(\beta+\gamma)v_3+(-\gamma+\delta)v_4=0.$$
Como A es linealmente independiente, tenemos que
$$\begin{cases} \alpha+\beta+\delta=0 \\ -\alpha+\beta=0 \\ \beta+\gamma=0 \\ -\gamma+\delta=0 \end{cases}$$
Este sistema es compatible determinado (lo cual podemos verificar, por ejemplo, viendo que la matriz del sistema tiene determinante 1), por lo que $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$ y B es linealmente independiente.

Para ver si C es linealmente independiente, tomamos una combinación lineal
$$\alpha(v_1-v_2)+\beta(v_1+v_2+v_3)+\gamma(v_3-v_4)+\delta(2v_1+v_4)=0,$$
es decir,
$$(\alpha+\beta+2\delta)v_1+(-\alpha+\beta)v_2+(\beta+\gamma)v_3+(-\gamma+\delta)v_4=0.$$

Como A es linealmente independiente, tenemos que

$$\begin{cases} \alpha+\beta+2\delta=0 \\ -\alpha+\beta=0 \\ \beta+\gamma=0 \\ -\gamma+\delta=0 \end{cases}$$

Este sistema es compatible indeterminado (lo cual podemos verificar, por ejemplo, viendo que la matriz del sistema tiene determinante 0), por lo que tiene una solución distinta de $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$ y C es linealmente dependiente.

Por lo tanto, la respuesta correcta es: B es linealmente independiente y C no.

3. Definimos la transformación $T(a,b,c)=(a,b+ac,c)$, la cual no es una transformación lineal en $\mathbb{R}^3$. Una manera de ver esto es observar que $T(2(1,1,1))=T(2,2,2)=(2,6,2)$ y $2T(1,1,1)=2(1,2,1)=(2,4,2)$. Cuando restringimos T al subespacio $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=0\}$, obtenemos $T|_S(0,b,c)=(0,b,c)$, que es la transformación lineal identidad en S.

   Por lo tanto, la respuesta correcta es: Si $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=0\}$, la restricción de T a S es una transformación lineal.

4. Si $p=a_0+a_1x+a_2x^2$, entonces $T(p)=(a_0-a_1+a_2, a_0-a_1+a_2)$ y $S(p)=(a_0, a_0+a_1+a_2)$. Por lo tanto, $V_1=\ker(T)=\{p\in\mathbb{R}_2[x] : a_0-a_1+a_2=0\}$ y $V_2=\ker(S)=\{p\in\mathbb{R}_2[x] : a_0=0, a_0+a_1+a_2=0\}=\{p\in\mathbb{R}_2[x] : a_0=0, a_1+a_2=0\}$.

   Un elemento de V_1 es de la forma $a_0(1+x)+a_2(x+x^2)$, por lo que $\{1+x, x+x^2\}$ es base de V_1 y $\dim V_1=2$. Un elemento de V_2 es de la forma $a_1(x-x^2)$, por lo que $\{x-x^2\}$ es base de V_2 y $\dim V_2=1$.

   Si $p=a_0+a_1x+a_2x^2\in V_1\cap V_2$, entonces

$$\begin{cases} a_0-a_1+a_2=0 \\ a_0=0 \\ a_1+a_2=0 \end{cases},$$

   es decir, $a_0=a_1=a_2=0$. Por lo tanto, $V_1\cap V_2=\{0\}$ y $V=V_1\oplus V_2$. Como la suma es directa, la dimensión de V es $\dim V_1+\dim V_2=2+1=3=\dim\mathbb{R}_2[x]$, por lo que $V=\mathbb{R}_2[x]$.

   Por lo tanto, la respuesta correcta es V $=V_1\oplus V_2=\mathbb{R}_2[x]$.

5. $(2,1,3)=(3,0,1)+(0,1,2)-(1,0,0)$, por lo que $\operatorname{coord}_B(v)=(1,1,-1)$. Entonces

$$\operatorname{coord}_A(T(v))={}_A[T]_B\cdot\operatorname{coord}_B(v)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}.$$

   Por lo tanto, $T(v)=2(1,0,1)=(2,0,2)$.

6. Como A tiene rango 1, será de la forma

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 v\\ \alpha_2 v\\ \vdots\\ \alpha_n v\end{pmatrix}$$

con $\alpha_i \in K$ en donde $\alpha_j \neq 0$ para algún j. Aquí $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ es no nulo y $\alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_2, \dots, \alpha v_n)$. Denotemos por $e_{i,j}$ a la matriz que tiene un 1 en la fila i y en la columna j y 0 en el resto de las entradas. El conjunto $B = \{e_{i,j} : i, j \in \{1, \dots, n\}\}$ es una base de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$. Entonces $T(B) = \{T(e_{i,j}) : i, j \in \{1, \dots, n\}\}$ es un generador de $\mathrm{Im}(T)$. Para cada i y j, $T(e_{i,j}) = A \cdot e_{i,j}$ es la matriz que en la columna j tiene

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 v_i \\ \alpha_2 v_i \\ \vdots \\ \alpha_n v_i \end{pmatrix}$$

y cuyas demás columnas son nulas. Como hay al menos un i tal que $v_i \neq 0$, la imagen de T está generada por las n matrices que tienen una única columna no nula e igual a $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Por lo tanto, la dimensión de la imagen de T es n. Por el teorema de las dimensiones,

$$\dim(\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}) = \dim(\ker(T)) + \dim(Im(T)) \implies \dim(\ker(T)) = \dim(\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}) - \dim(Im(T)) = n^2 - n = n(n-1).$$

9.7. Año 2016.

9.7.1. Primer semestre. Segundo parcial: 25 Junio 2016.

Verdadero-falso.

1. Sean V un espacio de dimensión finita, u y v dos vectores distintos de V, y $T : V \to V$ una transformación lineal. Si $T(u) = T(v)$, entonces T no es sobreyectiva.
2. Sea $T : V \to V$ lineal, y A y B son bases de V. Si $_A(T)_A =_B (T)_B$, entonces $A = B$.
3. Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Si $T : V \to V$ es biyectiva, entonces existen bases A y B de V tales que $_B(T)_A = I_n$.
4. Si $S_1 = \mathbb{R}_n[x]$ y $S_2 = \mathbb{R}_m[x]$, entonces $\dim(S_1 + S_2) = n + m + 2$.
5. Si G es un generador de un subespacio vectorial S y G_0 es otro generador de S, entonces $G \cup G_0$ es un generador de S.
6. Si L y L_0 son dos conjuntos linealmente independientes de un subespacio vectorial S, entonces $L \cup L_0$ es un conjunto linealmente independiente de S.

Mútilple opción.

1. Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$_A(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

   donde $A = \{(1, 1, 1), (1, -2, 0), (-1, 1, 0)\}$.
   Entonces $T((1, 0, 1)) =$

   (A) (5, 2, 4).
   (B) (3, 2, 6).
   (C) (4, 1, 0).
   (D) (8, 3, 6).
   (E) (1, 1, 1).

2. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Se consideran las siguientes afirmaciones:

   (I) Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$ es linealmente independiente, entonces $\{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\} \subset W$ es linealmente independiente.
   (II) Si $u, v, w \in V$ son tales que $T(w) = T(u) + T(v)$, entonces $w = u + v$.
   (III) Si u y v son colineales en V, entonces $T(u)$ y $T(v)$ son colineales en W.

   Entonces:

   (A) Son todas falsas.

(B) Solo la afirmación (II) es falsa.

(C) Solo la afirmación (I) es falsa.

(D) Solamente (I) y (II) son falsas.

(E) Solamente (I) y (III) son falsas.

3. Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) El conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(II) La intersección de dos subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.

(III) La unión de dos subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.

Entonces indique la opción correcta:

(A) Solo (III) es verdadera.

(B) Solo (II) es verdadera.

(C) Solo (I) es verdadera.

(D) Las tres afirmaciones son verdaderas.

(E) Solo (I) y (II) son verdaderas.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$T(a,b,c) = (a-c)x^2 + (b-2a)x + (3a-2b+c).$$

Entonces:

(A) T no es transformación lineal.

(B) T es transformación lineal con $\dim(\ker(T)) = 2$ y $\dim(Im(T)) = 1$.

(C) T es una transformación lineal biyectiva.

(D) T es transformación lineal no inyectiva con $\dim(\ker(T)) = 1$ y $\dim(Im(T)) = 2$.

(E) T es transformación lineal no inyectiva con $\dim(\ker(T)) = 1$ y $\dim(Im(T)) = 1$.

5. Sean $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p''(0) = p'(0) = 0\}$ y $S_2 = [x^2]$ dos subespacios de $\mathbb{R}_2[x]$. Entonces se cumple:

(A) $\{x-1, 1\}$ es una base de $S_1 + S_2$.

(B) $\mathbb{R}_2[x] \neq S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$.

(C) $\mathbb{R}_2[x] = S_1 \oplus S_2$.

(D) $S_1 + S_2 \subset \mathbb{R}_1[x]$.

(E) $\mathbb{R}_2[x] = S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2 \neq \{\mathbf{0}\}$.

6. Sea $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ definida por $T(M) = KM$, siendo $K \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ una matriz fija. Considere las siguientes afirmaciones:

(I) Existen A y B, bases de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$, tal que $K =_A ((T))_B$.

(II) T es inyectiva $\forall K \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$.

(III) Para $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, se cumple $\mathrm{Im}(T) = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$.

Entonces:

(A) Todas son falsas.
(B) Solamente (I) y (III) son verdaderas.
(C) Solamente (I) y (II) son falsas.
(D) Solamente (II) y (III) son verdaderas.
(E) ToTodas son verdaderas.

7. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$\begin{aligned} T(x^2 - x + 1) &= (1, 7, 3) \\ T(2x^2 + x + 4) &= (0, 1, -3) \\ T(x^2 - 4x - 1) &= (3, 20, 6) \end{aligned}$$

Entonces:

(A) Hay una única transformación lineal T que cumple esas condiciones y su matriz asociada es de 3×2.
(B) Hay una única transformación lineal T que cumple esas condiciones y su matriz asociada es de 3×3.
(C) Hay infinitas transformaciones lineales que cumplen esas condiciones y sus matrices asociadas son de 3×3.
(D) Hay infinitas transformaciones lineales que cumplen esas condiciones y sus matrices asociadas son de 3×2.
(E) No hay ninguna transformación lineal que cumpla esas condiciones.

8. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : A = A^t\} \\ S_2 &= \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : \mathrm{traza}(A) = 0\} \end{aligned}$$

Entonces:

(A) Hay una única transformación lineal $T : S_1 \to S_2$ tal que $\ker(T) = (S_1 \cap S_2)$.
(B) Hay una única transformación lineal $T : S_1 \to S_2$ tal que $\ker(T) = (S_1 \cap S_2)$ y $T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.
(C) Hay una única transformación lineal $T : S_1 \to S_2$ tal que $\ker(T) = (S_1 \cap S_2)$ y $T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.
(D) Hay una única transformación lineal $T : S_1 \to S_2$ tal que $\ker(T) = (S_1 \cap S_2)$ y $T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
(E) Hay una única transformación lineal $T : S_1 \to S_2$ tal que $\ker(T) = (S_1 \cap S_2)$ y

$$T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución.

1	2	3	4	5	6
V	F	V	F	V	F

1	2	3	4	5	6	7	8
A	D	B	D	B	C	E	C

9.7.2. Segundo semestre. Segundo parcial: 19 Noviembre 2016.

Múltiple opción.

1. Sea $A = \{p_1, p_2, p_3\} \subset \mathbb{R}_2[x]$ donde $p_1(x) = (x-1)(x+1)$, $p_2(x) = x-1$, y $p_3(x) = 2x^2 + x - 3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces,

   (A) A es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

   (B) A es una base de $S \subset \mathbb{R}_2[x]$, donde S es el subespacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2 que cumplen $p(0) = 0$.

   (C) A es un generador pero no es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

   (D) A es un generador pero no una base de $W \subset \mathbb{R}_2[x]$, donde W es el subespacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2 que cumplen $p(1) = 0$.

   (E) A es una base de $W \subset \mathbb{R}_2[x]$, donde W es el subespacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2 que cumplen $p(1) = 0$.

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1,1) = (0,1,1)$, $T(0,1,1) = (0,-1,1)$, $T(2,-1,-1) = (0,5,-1)$. Entonces,

   (A) No existe ninguna transformación lineal que verifique las condiciones anteriores.

   (B) Existe una única transformación lineal que verifica las condiciones anteriores y cumple $T(2,0,0) = (0,4,0)$.

   (C) Existen infinitas transformaciones lineales que verifican las condiciones anteriores, pero todas cumplen $T(1,0,0) = (0,2,0)$.

   (D) Existen infinitas transformaciones lineales que verifican las condiciones anteriores, y solo una de ellas cumple $T(1,0,0) = (0,2,0)$.

   (E) Existe una única transformación lineal que verifica las condiciones anteriores y cumple $T(1,2,2) = (0,0,2)$.

3. Sea el espacio vectorial $V = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ consideran los subespacios vectoriales $S_1 = \{A \in V : A = A^t\}$ y $S_2 = \{A \in V : A = -A^t\}$.

   (A) $\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2)$, ya que $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$. Se tiene además que $\dim(S_1) = \dim(S_2)$, entonces $\dim(S_1 + S_2) = \dim(V)$.

   (B) $\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2)$, ya que $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$. Se tiene además que $\dim(S_1) > \dim(S_2)$ y que $\dim(S_1 + S_2) < \dim(V)$.

   (C) $\dim(S_1 + S_2) < \dim(S_1) + \dim(S_2)$, ya que $\dim(S_1 \cap S_2) > 1$.

   (D) $\dim(S_1 + S_2) > \dim(S_1) + \dim(S_2)$, ya que $S_1 \cap S_2 = S_2$.

   (E) Ninguna de las otras opciones es correcta.

4. Se consideran los planos $\pi_1 : y = 7$ y $\pi_2 : 4x + 27 + 3z = 1$ y la recta r paralela a $\pi_1 \cap \pi_2$ por el punto $(2, -5, 2)$. Sea π_3 el plano perpendicular a r por el punto $(2, -5, 2)$. La distancia de π_3 al punto $(7, -3, 2)$ es:

   (A) $\sqrt{5}$
   (B) 5
   (C) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$
   (D) 3
   (E) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

5. Se consideran las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dadas por $T(x, y, z) = (2x + y, x - y + z)$ y $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que ${}_B(S)_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $A = \{(1, 0), (1, 1)\}$ y $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, -1)\}$.

   (A) $(S \circ T)(x, y, z) = (5x + 4y - z, x + 2y - z, x + 2y - z)$
   (B) $(S \circ T)(x, y, z) = (5x + y + z, 2x + y, 3x + z)$
   (C) $(S \circ T)(1, 1, 1) = (7, 3, 4)$
   (D) $(S \circ T)(x, y) = (7x - 3y, 3x - y)$
   (E) $(S \circ T)(1, 0, 1) = (2, 1, 1)$

Desarrollo.

Ejercicio 1.

1. Sea el conjunto $A = \{v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_p\} \subset V$ y $S = [A]$, donde S es el subespacio generado por A. Probar que si v_j es combinación lineal de $A' = A - \{v_j\}$ entonces $[A'] = S$ (también genera al subespacio S).

2. Sean
$$S_1 = [(1, 1, 0, 1), (1, -1, 1, 1), (1, -3, 2, 1), (1, -1, 1, -1)]$$
   y
$$S_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0\}$$

   a) Determinar una base de S_1 y una base de S_2 e indicar la dimensión en cada caso.
   b) Hallar $S_1 \cap S_2$ indicando una base.

Ejercicio 2.

1. Sean V y W espacios de dimensión finita, y $T : V \to W$ una transformación lineal.

   a) Probar que T es inyectiva si y solo si $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.
   b) Si $\dim(V) = \dim(W)$ y $\dim(N(T)) = 0$, deducir que T es invertible. Enunciar los resultados que utilice.

2. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$_A((T))_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $A = \{(1,0,1),(2,1,3),(1,1,0)\}$ y $B = \{x^2+x+1, x^2+1, x^2-2x\}$.

a) Calcular $T(p)$ donde p es el polinomio definido por $p(x) = 2x^2+4x+2$.

b) Hallar una base del núcleo y una base de la imagen de T.

c) Investigar, justificando la respuesta, si existen polinomios p_1 y p_2 con $p_1 \neq p_2$ tales que $T(p_1) = T(p_2)$. En caso afirmativo, encontrar alguna relación entre p_1 y p_2.

d) Calcular $T^{-1}(2,0,4) = \{p \in P_2 : T(p) = (2,0,4)\}$.

Solución.

1	2	3	4	5
D	D	E	D	A

9.8. Año 2017.

9.8.1. Primer semestre. Segundo parcial: 24 Junio 2017.

Múltiple opción.

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que ${}_B(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, siendo $A = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ y $B = \{t^2+1, t+1, 1\}$. Entonces:
   (A) $Im(T) = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(t) = at^2 + bt + c, c = a + b\}$, $dim(N(T)) = 1$.
   (B) $Im(T) = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(t) = at^2 + bt + c, c = a + b\}$, $dim(N(T)) = 2$.
   (C) $Im(T) = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(t) = at^2 + bt + c, c = 2a + 2b\}$, $dim(N(T)) = 1$.
   (D) $Im(T) = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(t) = at^2 + bt + c, c = 2a + 2b\}$, $dim(N(T)) = 2$.
   (E) $Im(T) = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(t) = at^2 + bt + c, c = 2b, a = b\}$, $dim(N(T)) = 2$.

2. Sean $S_1 = [1 + t + \lambda t^2, 1 - t^3]$ y $S_2 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(0) = p''(1) = 0\}$ subespacios de $\mathbb{R}_3[x]$. El valor de λ para el cual $dim(S_1 \cap S_2) = 1$ es:
   (A) -2
   (B) -3
   (C) $1/2$
   (D) 0
   (E) No existe valor.

3. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios:
$$S_1 = [(1,3,2),(-2,0,1),(4,6,3)]$$
y
$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y, z + 2x - 3y = 0\}.$$
Entonces:
   (A) $dim(S_1 + S_2) = 3$ y la suma $S_1 + S_2$ es directa.
   (B) $dim(S_1 + S_2) = 2$ y $dim(S_1) = dim(S_2) = 1$.
   (C) $dim(S_1 + S_2) = 2$ y $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.
   (D) $dim(S_1 + S_2) = 3$ y la suma $S_1 + S_2$ no es directa.
   (E) $dim(S_1 + S_2) = 2$, $dim(S_1) = 2$ y $dim(S_2) = 1$.

4. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$, se considera el conjunto $B = \{t^2 + 2, 2t - 1, 2t^2 - 6t + 7, 5t^2 + 10t + 5\}$ y el subespacio $S = \{p(t) = at^2 + bt + c \in \mathbb{R}_2[x] : c = 2a - \frac{b}{2}\}$. Sea $[B]$ el subespacio generado por B. Entonces:
   (A) $[B] \neq \mathbb{R}_2[x]$, $[B] = S$ pero B no es base de S.
   (B) $[B] = \mathbb{R}_2[x]$ pero $[B] \neq S$.

(C) $[B] \neq \mathbb{P}_2$, $[B] = S$ y B es una base de S.

(D) $[B] = \mathbb{P}_2$, $[B] = S$ y B es una base de S.

(E) $[B] = \mathbb{P}_2$, $[B] = S$ pero B no es una base de S.

5. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ definida por $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p''(0) \\ p'(1) & p''(1) \end{pmatrix}$. Entonces:

(A) T es inyectiva.

(B) T es sobreyectiva.

(C) Una base de $\ker(T)$ es $\{1, t\}$.

(D) Una base de $Im(T)$ es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(E) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

6. Sean $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ un generador de $\mathbb{R}^2$ y $B = \{w_1, w_2, w_3\}$ un generador de $\mathbb{R}^3$. Entonces:

(A) Existen infinitas transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tales que $T(v_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$.

(B) Existe una única $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineal que cumple $T(v_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$ y es inyectiva.

(C) No existe ninguna $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineal que cumple $T(v_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$.

(D) Existe una única $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineal que cumple $T(v_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$ y no es inyectiva.

(E) Ninguna de las opciones es verdadera.

Desarollo.

7. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.

   1. Definir el núcleo de T, $\ker(T)$.
   2. Probar que $\ker(T) = \{0\} \Leftrightarrow T$ es inyectiva.
   3. ¿Existe $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_1[x]$ tal que T sea inyectiva? Justifique.

8. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Probar o dar contraejemplo:

   1. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente en V, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es linealmente independiente en W.
   2. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto generador de V, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es un conjunto generador de $Im(T)$.
   3. Si T es sobreyectiva, entonces $dim(V) \geq dim(W)$.

Solución.

1	2	3	4	5	6
C	B	A	A	D	C

9.8.2. Segundo semestre. Segundo parcial: 18 Noviembre 2017.

Multiple opción.

1. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, $\{u, v\}$ un conjunto linealmente independiente y w un vector que es combinación lineal de $\{u, v\}$. Se consideran los subespacios $S_1 = [u, v]$ y $S_2 = [u, v, w]$.

   (I) $\dim(S_1) = 2$ y $\dim(S_2) = 3$.
   (II) $\dim(S_1) = \dim(S_2) = 2$ pero $S_1 \neq S_2$.
   (III) $w \in S_1$ y además w es combinación lineal única de $\{u, v\}$.

   Entonces:

   (A) Sólo (I) es verdadera.
   (B) Sólo (II) es falsa.
   (C) Las tres afirmaciones son verdaderas.
   (D) Las tres afirmaciones son falsas.
   (E) Sólo (III) es verdadera.

2. Sean V y W $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, tales que $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base de V, y sea $T : V \to W$ una transformación lineal tal que:

   - $T(v_1) = 0$.
   - $\{T(v_2), T(v_3)\}$ es linealmente independiente.
   - $T(v_4)$ es combinación lineal de $\{T(v_2), T(v_3)\}$.

   Entonces:

   (A) $\dim(\ker(T)) = 1$ y $\dim(Im(T)) = 3$.
   (B) $\dim(\ker(T)) = 1$ y $\dim(Im(T)) = 2$.
   (C) $\dim(\ker(T)) = 2$ y $\dim(Im(T)) = 2$.
   (D) $\dim(\ker(T)) = 2$ y $\dim(Im(T)) = 3$.
   (E) $\dim(\ker(T)) = 2$ y $\dim(Im(T)) = 4$.

3. Se consideran los siguientes polinomios en $\mathbb{R}_2[x]$:

$$p_1(x) = x^2 + 1, \quad p_2(x) = x + 1, \quad p_3(x) = 3x^2 - 2x + 1, \quad p_4(x) = x^2 + x.$$

   Entonces:

   (A) $\{p_1, p_2, p_3\}$ es generador de $\mathbb{R}_2[x]$.
   (B) $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ es linealmente independiente.
   (C) p_4 es combinación lineal de $\{p_1, p_2, p_3\}$.
   (D) $\{p_1, p_2, p_4\}$ es generador de $\mathbb{R}_2[x]$.
   (E) $\{p_1, p_2\}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función tal que:

$$T(1,0,1) = (1,2,3),$$
$$T(0,1,1) = (-2,0,2),$$
$$T(2,1,a) = (0,4,8).$$

Entonces:

(A) Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe una única transformación lineal que cumple estas condiciones.
(B) Para $a = 3$, existe una única transformación lineal que cumple estas condiciones.
(C) Para $a = 3$, existen infinitas transformaciones lineales que cumplen estas condiciones.
(D) Para $a = 3$, no existe ninguna transformación lineal que cumple estas condiciones.
(E) Para todo $a \in \mathbb{R}$, existen infinitas transformaciones lineales que cumplen estas condiciones.

5. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$:

- $S_1 = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : A = -A^t\}$,
- $S_2 = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : A = A^t\}$.

Entonces:

(A) $S_1 \cup S_2 = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$.
(B) $\dim(S_1) = 3$.
(C) $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} = S_1 \oplus S_2$.
(D) $A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 2 & i \end{pmatrix} \in S_2$, siendo i la unidad imaginaria.
(E) $\dim(S_2) = 2$.

6. Sea el espacio $\mathbb{R}_3[x]$ de polinomios reales de grado menor o igual a 3 con base $A = \{x^2+x^3, x^2, 1+x, x+x^3\}$ y el espacio $\mathbb{R}^3$ con base $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ con matriz asociada:

$${}_B(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $T(2x^3 + x + 2)$ vale:

(A) $(6,9,6)$.
(B) $(6,0,-3)$.
(C) $(7,7,6)$.
(D) $(0,0,0)$.
(E) $(7,1,0)$.

7. Sea el subespacio $S = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : p(1+x) = p(1-x)\}$. Entonces una base de S es:

A) $B = \{x, x^2 + 2x - 1\}$.
(B) $B = \{1, x^2 - 2x\}$.

(C) $B = \{x^2, x+1\}$.
(D) $B = \{1, x\}$.
(E) $B = \{2, x^2+1\}$.

8. Sea el conjunto $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + \beta y - z = \alpha\}$ con α y $\beta \in \mathbb{R}$. Entonces:
   (A) S es un subespacio vectorial de dimensión 3 para todo α y β, y una base de S es $B = \{(1,0,2), (0,1,\beta), (0,0,\alpha)\}$.
   (B) Si $\alpha = 0$ entonces S es un subespacio vectorial de dimensión 2 para todo β y una base de S es $B = \{(1,0,2), (0,1,\beta)\}$.
   (C) Si $\alpha \neq 0$ entonces S es un subespacio vectorial de dimensión 3 para todo β y una base de S es $B = \{(1,0,2), (0,1,\beta), (0,0,\alpha)\}$.
   (D) Si $\alpha = \beta = 0$ entonces S es un subespacio vectorial de dimensión 1 y una base de S es $B = (1,0,2)$.
   (E) Existen valores de β para los cuales S no es un subespacio vectorial, independientemente del valor de α.

9. Dados los siguientes subconjuntos $S_1 = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}$, $S_2 = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a + b = 5\}$, y $S_3 = \{\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} : a + b = 0\}$, de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$. Se consideran las siguientes afirmaciones:
   (I) S_1 y S_2 son subespacios vectoriales de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$.
   (II) S_3 no es un subespacio vectorial de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$.
   (III) El conjunto $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es un generador de S_1.
   (IV) El conjunto $\left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ es un generador de S_3.

   Entonces:
   A. Sólo (I) y (III) son verdaderas.
   B. Sólo (I) y (II) son verdaderas.
   C. Sólo (III) y (IV) son verdaderas.
   D. Sólo (II) es verdadera.
   E. Sólo (IV) es verdadera.

10. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal tal que $T(ax^2+bx+c) = (a+b+c)x^2 + (a+2b)x - a - 2c$. Entonces:
   A. T es biyectiva.
   B. T es inyectiva pero no sobreyectiva.
   C. T es sobreyectiva pero no inyectiva.
   D. $\dim \ker(T) = 1$ y $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$.
   E. $\dim \ker(T) = 2$ y $\dim \operatorname{Im}(T) = 1$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	C	D	C	C	B	B	B	E	D

9.9. Año 2018.

9.9.1. Segundo semestre. Segundo parcial: 17 Noviembre 2018.

Múltiple opción.

1. Sea $A = \{u, v, w, z\}$ base de un espacio vectorial V. Consideramos el subespacio $S = [u + v + 2w + z, v + w, u + z, v - 3w]$. Entonces:

   (A) $\dim(S) = \dim(V)$.
   (B) $\dim(S) = \dim(V) - 1$.
   (C) $\dim(S) = \frac{1}{2}\dim(V)$.
   (D) $\dim(S) = \frac{1}{2}\dim(V) - 1$.
   (E) $\dim(S) + \dim(V) = 9$.

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y - z, x + 3y)$. Entonces:

   (A) $\ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z = 0\}$ y $Im(T) = \mathbb{R}^3$.
   (B) $\ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x = y = z\}$ y $Im(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + y + 2 = 0\}$.
   (C) $\ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2y, x = -3y\}$ y $Im(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z - y\}$.
   (D) $\ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z = 0\}$ y $Im(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + y + z = 0\}$.
   (E) $\ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x = y = z\}$ y $Im(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0\}$.

3. Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ la transformación lineal dada por $T(p) = p'$. Le llamamos C a una base cualquiera de $\mathbb{R}_3[x]$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

   I. La matriz $[C_(T)]_C$ es invertible.
   II. T es inyectiva.
   III. La dimensión de $Im(T)$ es 3.

   Entonces:

   (A) Solamente (III) es correcta.
   (B) Solamente (II) y (III) son correctas.
   (C) Solamente (I) es correcta.
   (D) Las tres afirmaciones son correctas.
   (E) Solamente (I) y (II) son correctas.

4. Sean $S : U \to V$ y $T : V \to W$ dos transformaciones lineales. Se consideran las siguientes afirmaciones:

   I. Si S y T son biyectivas, entonces $T \circ S$ es biyectiva.
   II. Si B es una base de V, entonces el subespacio generado por $T(B)$ es la imagen de $T \circ S$.
   III. Si S es sobreyectiva, $\dim(\ker(T \circ S)) = \dim(\ker(S)) + \dim(\ker(T))$.

   Entonces:

   (A) Solamente (III) es correcta.

(B) Solamente (II) y (III) son correctas.
(C) Solamente (I) es correcta.
(D) Solamente (I) y (III) son correctas.
(E) Solamente (I) y (II) son correctas.

5. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2 y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal tal que $T(1,1,2) = 1 + x$ y $T(2,2,2) = 2x^2$. Entonces:

(A) $T(0,0,-1) = x^2 - x - 1$.
(B) $T(0,0,-1) = x^2 + 2$.
(C) $T(0,0,-1) = x + 2$.
(D) $T(0,0,-1) = x^2$.
(E) Con los datos disponibles no se puede determinar $T(0,0,-1)$.

6. La distancia del punto $(1,0,0)$ al plano de ecuación reducida $2x - y + z = 1$ es igual a:

A) 0.
(B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
(C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
(D) $\frac{1}{\sqrt{6}}$.
(E) $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

7. Sea $S_\alpha = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : A = \alpha A^t\}$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y A^t significa la matriz traspuesta de A.

(A) Existen valores de α para los cuales S_α no es un subespacio vectorial de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$.
(B) S_α es un subespacio vectorial de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ para todo α y además existen solamente dos valores de α tales que $\dim(S_\alpha) = 0$.
(C) S_α es un subespacio vectorial de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ para todo α y además existen infinitos valores de α para los cuales $\dim(S_\alpha) = 2$.
(D) S_α es un subespacio vectorial de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tal que $\dim(S_\alpha) \neq 0$ para todo α.
(E) S_α es un subespacio vectorial de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ para todo α y además existen infinitos valores de α tales que $\dim(S_\alpha) = 0$.

8. Se consideran los siguientes polinomios en P_2:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^2 + 1, \\ p_2(x) &= x + 1, \\ p_3(x) &= 3x^2 - 2x + 1, \\ p_4(x) &= x^2 + x. \end{aligned}$$

Entonces:

(A) $\{p_1, p_2, p_3\}$ es generador de $\mathbb{R}_2[x]$.
(B) $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ es linealmente independiente.

(C) p_4 es combinación lineal de $\{p_1, p_2, p_3\}$.

(D) $\{p_1, p_2, p_4\}$ es generador de $\mathbb{R}_2[x]$.

(E) $\{p_1, p_2\}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$.

9. Sea V un espacio vectorial, del cual se sabe que $\{u, v\}$ y $\{w, z\}$ son conjuntos linealmente independientes y $\dim(V) = 4$. Se consideran los subespacios $S_1 = [u, v]$ y $S_2 = [w, z]$.

   (A) La condición $S_1 \cap S_2 \neq \{0\}$ implica que $V = S_1 \oplus S_2$.

   (B) La condición $S_1 \cap S_2 = [u]$ implica que $w = u$ o $z = u$.

   (C) La condición $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ implica que $V = S_1 \oplus S_2$.

   (D) La condición $S_1 \cap S_2 = [u]$ implica que $V = S_1 + S_2$ pero la suma no es directa.

   (E) Las condiciones $w \notin S_1$ y $z \notin S_1$ implican que la suma es directa.

10. Sea el espacio $\mathbb{R}_3[x]$ de polinomios reales de grado menor o igual a 3 con base $A = \{x^2+x^3, x^2, 1+x, x+x^3\}$ y el espacio $\mathbb{R}^3$ con base $B = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ con matriz asociada:

$$_B(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Entonces, $T(2x^3 + x + 2)$ vale:

   (A) $(6, 9, 6)$.

   (B) $(6, 0, -3)$.

   (C) $(7, 7, 6)$.

   (D) $(0, 0, 0)$.

   (E) $(7, 1, 0)$.

Solucón.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	A	D	A	D	E	D	C	B

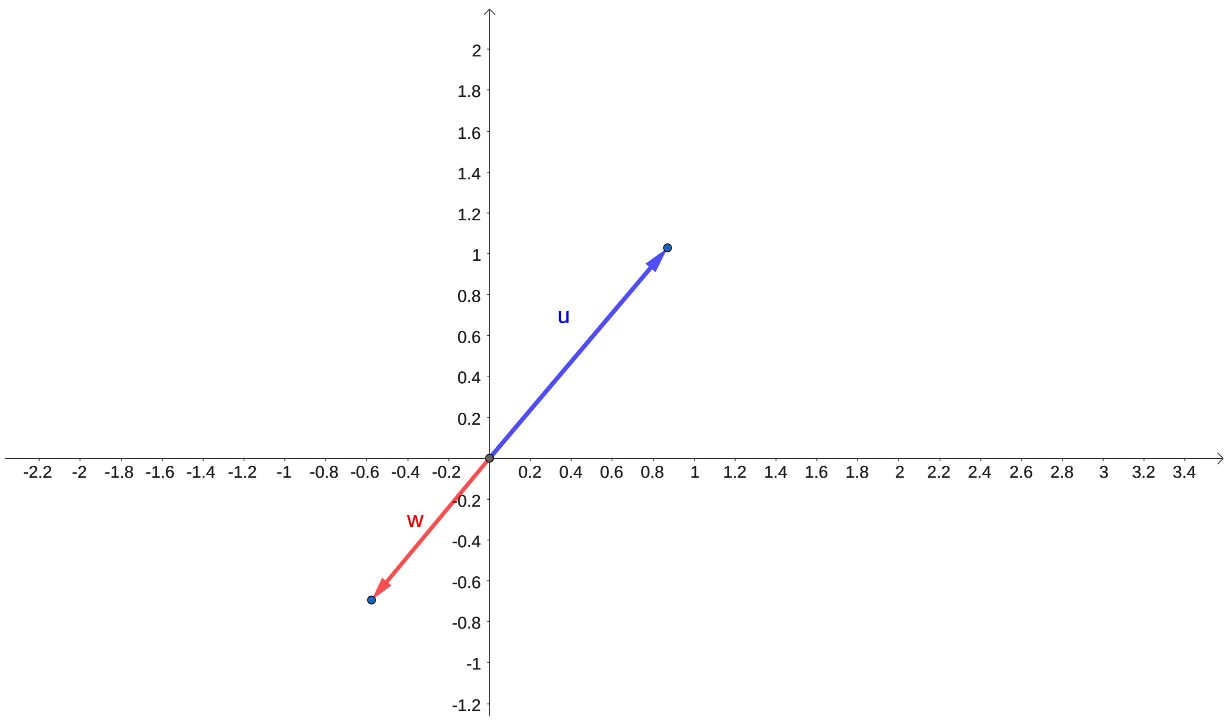
9.10. Año 2019.

9.10.1. Primer semestre. Segundo parcial: 22 Junio 2019.

Verdadero-falso.

1. El conjunto de las matrices antisimétricas de tamaño $n \times n$ es un subespacio vectorial del espacio $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ de las matrices de tamaño $n \times n$.

2. Sean v y w los vectores de $\mathbb{R}^2$ mostrados en la figura. El conjunto $A = \{v, w\} \subset \mathbb{R}^2$ es linealmente independiente.



3. Dado un espacio vectorial V, la matriz asociada a la transformación lineal identidad es la matriz identidad para cualquier par de bases de V.

4. Dados espacios vectoriales V y W, la imagen de un generador de V por una transformación lineal $T : V \to W$ es un generador de la imagen de la transformación lineal T.

5. Sean V un espacio vectorial y $S_1, S_2 \subset V$ dos subespacios de V. Si B_1 es una base de S_1 y B_2 es una base de S_2, entonces $B_1 \cup B_2$ es una base de $S_1 + S_2$.

6. Sea $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ una transformación lineal. Entonces, para todo par de bases de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$, la matriz asociada a la transformación lineal T tiene tamaño 2×2.

Múltiple opción.

1. Sean S_1 y S_2 los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_3[x]$ definidos por

$$S_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[x] : P(x) = P(-x)\}$$

$$S_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[x] : P(x) = -P(-x)\}$$

Indicar la opción correcta:
(A) $\dim(S_1) = 2$ y $x + 1 \in S_1 + S_2$.
(B) $\dim(S_1) = 2$ y $x + 1 \notin S_1 + S_2$.
(C) $\dim(S_1) = 3$ y $x + 1 \in S_1 + S_2$.
(D) $\dim(S_1) = 3$ y $x + 1 \notin S_1 + S_2$.

2. Sean r y s las rectas de $\mathbb{R}_3$ dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r : (x, y, z) = (4, 3, 6) + \lambda(4/3, 1, 1)$$

$$s : (x, y, z) = (4, -2, -6) + \lambda(4/3, 1, 4)$$

La distancia entre las rectas r y s es:
(A) 5
(B) 20
(C) 4
(D) 13

3.

4. Sean las bases $A = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 2)\}$ y $B = \{(2, 1, -1), (0, 1, 0), (-3, 2, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en las bases A y B está dada por:

$$_B[T]_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si $v = (2, 0, 3)$, entonces:
(A) $T(v) = (-1, -3, 2)$
(B) $T(v) = (22, 30, -21)$
(C) $T(v) = (-8, 0, 3)$
(D) $T(v) = (-4, -6, 7)$

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (x - 2z, x + 2y, y + z, -x - y + z)$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Indicar la opción correcta:
(A) $\dim(\ker(T)) = 1$ y $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$
(B) $\dim(\ker(T)) = 2$ y $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$
(C) $\dim(\ker(T)) = 1$ y $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$
(D) $\dim(\ker(T)) = 0$ y $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$

6. Sean $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ y $S : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathbb{R}^5$ dos transformaciones lineales. Indicar la opción correcta:
(A) $S \circ T$ no es inyectiva y $T \circ S$ no es sobreyectiva.
(B) $S \circ T$ puede ser inyectiva y $T \circ S$ puede ser sobreyectiva.
(C) $S \circ T$ no es inyectiva y $T \circ S$ puede ser sobreyectiva.
(D) $S \circ T$ puede ser inyectiva y $T \circ S$ no es sobreyectiva.

7. En el espacio $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$, se consideran los conjuntos
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$
y
$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$
Indicar la opción correcta:
(A) Tanto B como C son bases de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$.
(B) B es linealmente independiente y C no.
(C) C es generador de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ y B no.
(D) Ni B ni C son bases de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$.

8. Dado un parámetro $k \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto
$$A_k = \{((1, k-3, -3, 1), (1, -2, k-1, 4), (0, 2-2k, k+2, 6))\} \subseteq \mathbb{R}^4$$
Entonces:
(A) El conjunto A_k es L.I. para todo valor de $k \in \mathbb{R}$.
(B) El conjunto A_k es L.D. solo para un valor de $k \in \mathbb{R}$.
(C) El conjunto A_k es L.D. solo para dos valores de $k \in \mathbb{R}$.
(D) El conjunto A_k es L.D. solo para tres valores de $k \in \mathbb{R}$.

Solución.

Verdadero- falso.

1. Para ver que esto es verdad, nos fijamos que el conjunto $S = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : A = -A^t\}$ cumple las propiedades de subespacio vectorial.
   - Es claro que la matriz nula pertenece al conjunto pues su traspuesta es sí misma y su opuesta también.
   - Dadas dos matrices $A, B \in S$, tenemos que
   $$(A+B)^t = A^t + B^t = -A - B = -(A+B)$$
   donde usamos propiedades de traspuesta. Por lo que $A + B \in S$.
   - Dada $A \in S$, $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que
   $$(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda(-A) = -(\lambda A)$$
   por lo que $\lambda A \in S$. Nuevamente, solo usamos propiedades de traspuesta. La respuesta es V.

2. Es claro que $w = -\alpha v$ por lo que el conjunto es L.D. La respuesta es F.

3. La matriz asociada a la transformación identidad en dos bases $A, B \xrightarrow{b} V$, es la matriz cambio de base, que sabemos que no es la matriz identidad a menos que ambas bases sean la identidad. La respuesta es F.

4. Sea $w \in Im(T)$ y sea $A = \{v_1, ..., v_n\}$ un generador de V. Entonces Sabemos que existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$. Además, como $A \xrightarrow{g} V$, sabemos que v puede escribirse como combinación lineal de A, es decir, existen $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tales que
$$v = \lambda_1 + ... + \lambda_n$$
Por lo tanto, $T(v) = \lambda_1 T(v_1) + ... + \lambda_n T(v_n)$. Es decir, $T(v)$ puede escribirse como combinación lineal de $T(A)$ y conlcuimos que $T(A) \xrightarrow{g} Im(T)$.

5. Consideremos los espacios $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}, S_2\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$ y las bases $B_1 = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \xrightarrow{b} S_1$ y $B_2\{(1, 0, 0), (1, 0, 1)\} \xrightarrow{b} S_2$. La unión de ellas da el conjunto $B_1 \cup B_2 = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ que claramente no es L.I. aunque sí es generador de $S_1 + S_2$. La respuesta es F.

6. Dado que la matriz asociada tiene las coordenadas de los vectores que se obtienen de aplicarle T a una base de $M_{2\times 2}$, debe tener dimensiones 4×4. La respuesta es F.

Múltiple opción.

1. Es fácil ver que los elementos de S_1 son de la forma $p(x) = bx^2 + d$ y los de S_2 son de la forma $p(x) = ax^3 + cx$ de donde obtenemos las siguientes bases para cada uno de ellos
$$B_1 = \{x^2, 1\} \xrightarrow{b} S_1, B_2 = \{x^3, x\} \xrightarrow{b} S_2$$
De aquí, $\dim(S_1) = 2$. Además, el elemento $x \in S_2$ y el elemento $1 \in S_1$ por lo que la suma de ellos pertenece a la suma de los subespacios. La respuesta es A.

2. Para esto puede usarse simplemente utilizando la fórmula
$$d(r, s) = \frac{|\langle \vec{AB}, v \wedge w\rangle|}{|v \wedge w\rangle|}$$
donde tomamos $A = (4, 3, 6)$, $B = (4, -2 - 6)$. $v = (4/3, 1, 1)$, $w = (4/3, 1, 4)$. Entonces, $\vec{AB} = (0, 5, 12)$, $\langle v, w\rangle = (3, -4, 0)$ y tenemos que $d(r, s) = 4$. Es decir, la respuesta es C.

3. Este ejercicio lo razonamos por descarte. Es claro que la primera figura no puede ser la correcta pues $T((0, 0)) \neq (0, 0)$. Por otro lado, vemos que en la segunda figura, la transformación no deforma todos los vectores del eje horizontal de la misma manera: $T(1, 0) = (-1, 0), T(-1, 0) = (1/2, 0)$ por lo que tampoco puede ser la correcta. Por último, la cuarta figura no puede ser la correcta pues la transformación manda rectas paralelas en rectas no paralelas. Concluimos que la respuesta correcta es C.

4. Sabemos, por un resultado visto en el teórico, que se cumple la siguiente relación
$$coord_B(T(v)) =_B (T)_A coord_A(v)$$

Por lo tanto, comenzamos escribiendo al vector $(2,0,3)$ en la base A. Para esto, podemos plantear un sistema de ecuaciones que al resolverlo nos da el siguente resultado

$$(2,0,3) = 1.(1,0,1) + (-1)(1,1,0) + 1.(2,1,2)$$

es decir, $coord_A(2,0,3) = (1,-1,1)$

Hacemos el producto de la matriz asociada por este vector

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es decir, $coord_B(T(2,0,3)) = (-1,-3,2)$ y por lo tanto

$$T(2,0,3) = (-1)(2,1,-1) + (-3)(0,1,0) + 2(-3,2,1) = (-8,0,3)$$

La respuesta es C.

5. Para encontrar el núcleo de la transformación lineal, nos preguntamos cuáles son los vectores $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $T(x,y,z) = (0,0,0,0)$. Esto equivale a pedir que (x,y,z) sean solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

Planteando una matriz o simplemente despejando, llegamos a que la solución del sistema es $\{(2z,-z,z) : z \in \mathbb{R}\}$. Es claro que una base de este subespacio vectorial es $\{(2,-1,1)\}$ y por lo tanto, el núcleo de T tiene dimensión 1. Utilizando el teorema de las dimensiones, sabemos que la imagen de T debe tener dimensión 2. La respuesta es A.

6. Utilizando el teorema de las dimensiones, sabemos que T no puede ser inyectiva y S no puede ser sobreyectiva. Consideremos ahora las transformaciones $S \circ T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ y $T \circ S : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$.

Sea $v \in N(T) \setminus \{0\}$. Entonces tenemos que

$$(S \circ T)(v) = S(T(v)) = S(0) = 0$$

Por lo que $v \in N(S \circ T), v \neq 0$ y tenemos que $S \circ T$ no es inyectiva.

Por otro lado, notar que $Im(S)$ es un subespacio de dimensión 4 dentro de R^5 y a este subespacio es a quien le aplicamos T al hacer la composición $T \circ S$. Por lo tanto, puede existir una transformación T que lleve a este subespacio de forma sobreyectiva a $M_{2\times 2}$. La respuesta es C.

7. Comenzamos planteando una combinación lineal de los vectores de B e igualándola a la matriz nula. De esto obtendremos un sistema de ecuaciones del cual resulta la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Escalerizando observamos que esta matriz tiene rango 4 por lo que hay 4 vectores L.I. en B. Como el conjunto B vive en un espacio de dimensión 4, es claro que B es base de este espacio.

Razonando de la misma forma para el conjunto C, vemos la matriz resultante tiene rango 3 por lo que C no es linealmente independiente. La respuesta es B.

8. Lo que tenemos que hacer en esta parte es plantear una combinación lineal de los vectores del conjunto e igualarla al vector nulo. Es decir

$$\alpha(1, k-3, -3, 1) + \beta(1, -2, k-1, 4) + \gamma(0, 2-2k, k+2, 6) = (0, 0, 0, 0)$$

Encontrar los α, β, γ que resuelven esta combinación lineal se traduce a escalerizar la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k-3 & -2 & 2-2k \\ -3 & k-1 & k+2 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+3F_1]{F_2-(k-3)F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -k+1 & 2-2k \\ 0 & k+2 & k+2 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -k+1 & 2-2k \\ 0 & k+2 & k+2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4/3]{F_2 \leftrightarrow F_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & k+2 & k+2 \\ 0 & -k+1 & 2-2k \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4-(-k+1)F_2]{F_3-(k+2)F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -k-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que la matriz tiene rango 3 para todo $k \neq -2$. La respuesta correcta es B.

9.10.2. Segundo semestre. Segundo parcial: 16 Noviembre 2019.

Verdadero-falso.

1. Si $A \subseteq \mathbb{R}^{10}$ es un conjunto generador de $\mathbb{R}^{10}$, entonces existe un subconjunto $A_0 \subseteq A$ que es una base de $\mathbb{R}^{10}$.

2. Sea $T : \mathbb{R}^9 \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3times3}$ una transformación lineal. Si existen una base A de $\mathbb{R}^9$ y una base B de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times3}$ tales que ${}_B(T)_A = O_9$, entonces $T(v) = O_3$ para todo $v \in \mathbb{R}^9$.

3. Sean V un espacio vectorial y W_1, W_2 dos subespacios vectoriales de V. Entonces el conjunto $W = W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V.

4. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal inyectiva entre dos espacios vectoriales V y W de dimensión n. Entonces, para toda base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, el conjunto $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es una base de W.

5. El conjunto $W = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times3} : A \text{ no es invertible}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times3}$.

6. Sean A una base de $\mathbb{R}^5$, B una base de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times2}$ y C una base de $\mathbb{R}_3[x]$. Entonces, para todas las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times2}$ y $S : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times2n} \to \mathbb{R}_3[x]$, tenemos que ${}_C(S \circ T)_A =_C (S)_B \times_B (T)_A$.

Mútiple opción.

1. Se aplica una transformación lineal

2. Sea $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ una transformación lineal. Entonces:

   (A) $\ker(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{O_2\}$ si y solo si $\ker(T) + \mathrm{Im}(T) = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$.

   (B) $\ker(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{O_2\}$ siempre implica que $\ker(T) + \mathrm{Im}(T) = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$, pero existen ejemplos donde $\ker(T) + \mathrm{Im}(T) = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ y $\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) \neq \{O_2\}$.

   (C) $\ker(T) + \mathrm{Im}(T) = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ siempre implica que $\ker(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{O_2\}$, pero existen ejemplos donde $\ker(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{O_2\}$ y $\ker(T) + \mathrm{Im}(T) \neq \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$.

   (D) Existen ejemplos donde $\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T) = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ y $\ker(T) \cap \mathrm{Im}(T) \neq \{O_2\}$, y otros ejemplos donde $\ker(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{O_2\}$ y $\ker(T) + \mathrm{Im}(T) \neq \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$.

3. Sean las bases $A = \{(0,1,1),(1,2,0),(1,0,-1)\}$ y $B = \{(1,-3,1),(0,1,2),(-1,2,-2)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en las bases A y B está dada por:

$$_B[T]_A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

   Si $v = (2,3,0)$, entonces:

   (A) $T(v) = (4,0,2)$.

   (B) $T(v) = (9,-3,5)$.

   (C) $T(v) = (2,-8,0)$.

   (D) $T(v) = (4,-20,-7)$.

4. Se consideran las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que cumplen las condiciones: $T(1,-1,3) = (2,0,-1,5)$, $T(2,3,-2) = (-3,3,2,-6)$, $T(4,1,4) = (1,3,0,4)$. Entonces:

   (A) No existe ninguna transformación lineal T que cumple las condiciones.

   (B) Existe una única transformación lineal T que cumple las condiciones, y dicha transformación lineal cumple la condición $T(3,-1,2) = (1,0,3,-2)$.

   (C) Existen infinitas transformaciones lineales T que cumplen las condiciones, pero solo una de ellas cumple la condición $T(3,-1,2) = (1,0,3,-2)$.

   (D) Existen infinitas transformaciones lineales T que cumplen las condiciones, y todas ellas cumplen la condición $T(3,-1,2) = (1,0,3,-2)$.

5. Sean los puntos $O = (1,1,1)$, $P_1 = (0,8,6)$ y $P_2 = (8,2,6)$. Se escriben π al plano que pasa por los tres puntos O, P_1 y P_2, r a la recta que pasa por los dos puntos P_1 y P_2, y d a la distancia entre la recta r y el punto O. Sean π_1 y π_2 los dos planos a distancia d del plano π. Entonces las ecuaciones de π_1 y de π_2 son:

   (A) $3x + 4y - 5z = 5\sqrt{2} + 2$ y $3x + 4y - 5z = -5\sqrt{2} + 2$.

   (B) $30x + 40y - 50z = 5\sqrt{2} + 2$ y $30x + 40y - 50z = -5\sqrt{2} + 2$.

   (C) $30x + 40y - 50z = 52$ y $30x + 40y - 50z = -48$.

(D) $3x + 4y - 5z = 52$ y $3x + 4y - 5z = -48$.

6. Sean u, v y w los vectores de $\mathbb{R}^3$ mostrados en la siguiente figura

   Indicar la opción correcta:

   (A) $\{u, v, w\}$ es LI y $\dim([u, v, w\}]) = 2$.
   (B) $\{u, v, w\}$ es LD y $\dim([\{u, v, w\}]) = 2$.
   (C) $\{u, v, w\}$ es LI y $[\{u, v, w\}] = \mathbb{R}^3$.
   (D) $\{u, v, w\}$ es LD y $[\{u, v, w\}] = \mathbb{R}^3$.

7. Sean S_1 y S_2 los subespacios de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ definidos por

$$S_1 = \left\{ A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   y

$$S_2 = \left\{ A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   Entonces:

   (A) $\dim(S_1) = 2$ y $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in S_1 + S_2$.

   (B) $\dim(S_1) = 2$ y $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin S_1 + S_2$.

   (C) $\dim(S_1) = 3$ y $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in S_1 + S_2$.

   (D) $\dim(S_1) = 3$ y $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin S_1 + S_2$.

8. Sean $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 2, 3, 4)$, $v_4 = (2, 3, 4, 5)$ y $v_5 = (3, -1, 3, 7)$. Entonces:

   (A) $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es LI y $v_5 \in [\{v_1, v_2, v_3, v_4\}]$.
   (B) $\{v_1, v_2, v_3\}$ es LI, $v_4 \in [\{v_1, v_2, v_3\}]$ y $v_5 \notin [\{v_1, v_2, v_3\}]$.
   (C) $\{v_1, v_2, v_3\}$ es LI y $v_4, v_5 \in [\{v_1, v_2, v_3\}]$.
   (D) $\{v_1, v_3, v_5\}$ es LI, $v_2 \in [\{v_1, v_3, v_5\}]$ y $v_4 \notin [\{v_1, v_3, v_5\}]$.

Solución.

Verdadero- falso.

1. Si A es un conjunto generador, solo le falta ser L.I. para ser una base. Si es L.I., entonces el subconjunto que es base es el mismo A. Si no, de los ejercicios de práctico, sabemos que podemos sacar vectores hasta conseguir un subconjunto L.I. que genera el mismo espacio que el conjunto original. La respuesta es V.

2. Dado un vector cualquiera $v \in \mathbb{R}^9$, lo escribimos como combinación lineal de la base A para obtener $coord_A(v)$. Con esto, el producto ${}_B(T)_A coord_A(v)$ nos da $coord_B(T(v))$. Por letra, sabemos que este último vector es el nulo, pues la matriz asociada es nula, por lo que la combinación de la base B que nos da el vector $T(v)$ es la trivial y tenemos que $T(v) = O_3$. La respuesta es V.

3. Considerando dos rectas distintas por el origen, en R^3, tenemos que la unión de ellas no es un plano, una recta, el vector nulo ni todo $\mathbb{R}^3$ por lo que no forma un subespacio de $\mathbb{R}^3$. La respuesta es F.

4. Como T es inyectiva, el conjunto $\{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ es L.I. Además, como $\dim(V) = n$, usando el teorema de las dimensiones, tenemos que $\dim(Im(T)) = \dim(W)$, es decir, $Im(T) = W$ y por lo tanto T es biyectiva. Por último, sabemos que $\{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ siempre es un generador de la imagen, por lo que en este caso es un generador L.I. de W y por lo tanto, es una base. La respuesta es V.

5. Las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son matrices no invertibles, sin embargo su suma da Id_3 que claramente es una matriz invertible. Es decir, el conjunto W no es cerrado bajo la suma y por lo tanto, no es un subespacio vectorial.

6. Esto es un resultado de teórico. La respuesta es V.

Múltiple opción.

1. Razonamos este ejercicio por descarte. Observamos que la primera figura no es correcta pues la transformación no deforma al eje horizontal de la misma manera: $T(1, 0) = (2, 0), T(2, 0) = (3, 0)$. La tercera figura tampoco es posible pues manda rectas paralelas en rectas no paralelas. La última figura tiene el mismo problema: observar que los segmentos de las rectas $y = 2$, $y = -2$ donde $x \in [1, 2]$ no se envían en segmentos paralelos. La respuesta correcta es la B.

2. El teorema de las dimensiones nos dice en este caso que

$$\dim(\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}) = 4 = \dim(N(T)) + \dim(Im(T))$$

   Si $ker(T) \cap Im(T) = \emptyset$, entonces $\dim(ker(T) + Im(T)) = \dim(ker(T)) + \dim(Im(T)) = 4$. Por lo que $ker(T) + Im(T) = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$.

   Si $ker(T)+Im(T) = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ y $ker(T)\cap Im(T) \neq \emptyset$, esto implicaría que $\dim(ker(T))+dim(Im(T)) > \dim(ker(T) + Im(T)) = 4$ lo cual es absurdo. La opción correcta es A.

3. Sabemos, por un resultado visto en el teórico, que se cumple la siguiente relación

$$coord_B(T(v)) =_B (T)_A coord_A(v)$$

   Por lo tanto, comenzamos escribiendo al vector $(2, 3, 0)$ en la base A. Para esto, podemos plantear un sistema de ecuaciones que al resolverlo nos da el siguente resultado

$$(2, 3, 0) = 1.(0, 1, 1) + 1.(1, 2, 0) + 1.(1, 0, -1)$$

   es decir, $coord_A(2, 3, 0) = (1, 1, 1)$.

   Hacemos el producto de la matriz asociada por este vector

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es decir, $coord_B(T(2,3,0)) = (4,0,2)$ y por lo tanto

$$T(2,3,0) = 4(1,-3,1) + 0(0,1,2) + 2(-1,2,-2) = (2,-8,0)$$

La respuesta es C.

4. Observar que los vectores $\{(1,-1,3),(2,3,-2),(4,1,4)\}$ no forman una base de $\mathbb{R}^3$ por lo que si existe una transformación que cumpla las condiciones, esta no será única. Por otro lado, tenemos que

$$(4,1,4) = 2(1,-1,3) + 1(2,3,-2)$$

Por lo que una transformación lineal debería cumplir que

$$T(4,1,4) = 2T(1,-1,3) + 1T(2,3,-2) = 2(2,0,-1,5) + (-3,3,2,-6) = (1,3,0,4)$$

que coincide con la condición que nos da la letra. Como los datos no son contradictorios sino que redundantes, conocemos T dentro del plano generado los vectores $(1,-1,3)$ y $(2,3,-2)$ pero no fuera de él. Es decir, existen infinitas transformaciones lineales que cumplen las tres condiciones.

Para saber cuántas de ellas cumplen que $T(3,-1,2) = (1,0,3,-2)$, nos fijamos si el vector $(3,-1,2)$ es L.I. con los anteriores. Si lo es, entonces conocemos T en una base de $\mathbb{R}^3$ y debe existir una única transformación lineal que cumpla todas las condiciones. Si no, el dato es redundante y podíamos calcular T en este vector a partir de los datos anteriores. En este caso, tenemos que $(3,-1,2) \notin [(1,-1,3),(2,3,-2)]$ por lo que la respuesta correcta es C.

5. Comenzamos hallando el plano π. Como sabemos que π pasa por los puntos O, P_1, P_2, podemos tomar como vectores directores de π a $v = \vec{OP_1} = (-1,7,5)$ y $w = \vec{OP_2} = (7,1,5)$. Con esto, tenemos que la ecuación de π es la siguiente

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda + 7\mu \\ y = 1 + 7\lambda + \mu \\ z = 1 + 5\lambda + 5\mu \end{cases}$$

Pasamos esta ecuación a implícita primero calculando el vector normal. Este podemos calcularlo haciendo el producto vectorial entre los vectores directores de π, de donde obtenemos $\vec{n} = (30,40,-50)$. Es decir,

$$\pi : 30x + 40y - 50z = D$$

Para conocer D alcanza sustituir por las coordenadas de un punto que sepamos que debe verificar la ecuación, por ejemplo $O = (1,1,1) \implies D = 20$. Tenemos entonces que

$$\pi : 3x + 4y - 5z = 2$$

De la misma forma, hallamos la ecuación de la recta r

$$\begin{cases} x = 8\lambda \\ y = 8 - 6\lambda \\ z = 6 \end{cases}$$

Por otro lado, calculamos la distancia del punto O a la recta r. Esto puede hacerse utilizando la fórmula vista en el teórico

$$d(O,r) = \frac{||\vec{P_1O} \wedge \vec{P_1P_2}||}{||\vec{P_1P_2}||} = 5\sqrt{2}$$

Los planos π_1, π_2 deben ser paralelos al plano π pues si no, la distancia de ellos a π sería 0. Esto equivale a pedir que tengan el mismo vector normal. Es decir

$$\pi_1 : 3x + 4y - 5z = 2 + 5\sqrt{2}$$
$$\pi_1 : 3x + 4y - 5z = 2 - 5\sqrt{2}$$

La respuesta correcta es A.

6. Consideramos primero los vectores u, v. Estos dos forman un plano. Observando la figura, vemos que w no pertenece al plano formado por ellos por lo que no es combinación lineal de u, v y por lo tanto el conjunto $\{u, v, w\}$ es L.I. Como tenemos 3 vectores L.I. en $\mathbb{R}^3$, el subespacio generado por ellos debe ser todo $\mathbb{R}^3$ y la respuesta correcta es C.

7. Consideremos una matriz genérica $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y veamos qué condiciones deben cumplir sus coeficientes para estar en cada subespacio.

   Para el subespacio S_1 tenemos lo siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

   De aquí, tenemos que $c = 0, d = a$. Es decir, $A \in S_1 \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y tenemos que $\dim(S_1) = 2$. Una base de S_1 es $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

   Razonando de la misma forma para S_2, tenemos que una base de este subespacio es $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

   Vemos que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ cumple

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Por lo que pertenece a la suma de los subespacios. La respuesta correcta es A.

8. Para resolver este ejercicio, planteamos una combinación lineal de los vectores v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y la igualamos al vector nulo. De esto, obtenemos un sistema de eucaciones del que resulta la siguiente matriz que escalerizaremos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \leftrightarrow F_2]{F_4-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos entonces que la matriz tiene rango 3 y que los vectores $v_4, v_5 \in [v_1, v_2, v_3]$. La respuesta correcta es C.

9.11. Año 2022.

9.11.1. Segundo semestre. Segundo parcial: 19 Noviembre 2022.

Múltiple opción.

1. Sea $u = (2, 1, -3)$ y $v = (3, a, 2)$, con $a \in \mathbb{R}$. Entonces:

   (A) Siempre la norma de v es mayor que la norma de u.
   (B) Vale que: $\|u\| = \|v\|$ si y solo si $a = 1$.
   (C) Existen valores de a tales que los vectores u y v son colineales.
   (D) Existen dos valores de a tales que los vectores u y v son ortogonales.
   (E) Existe un solo valor de a tal que $\|v\| = \sqrt{38}$.
   (F) No existen valores de a tales que se verifique $\|u\| + \|v\| = \|u + v\|$.

2. Para el espacio vectorial $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, formado por las funciones reales de variable real, considerar los siguientes subespacios vectoriales:

$$S_1 = \{f \in F \mid f(1) = f(0)\},$$
$$S_2 = \{f \in F \mid f(x^2) = f(x)^2, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\},$$
$$S_3 = \{f \in F \mid f(x) = f(-x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\},$$
$$S_4 = \{f \in F \mid \text{f tiene al menos una raíz real}\}.$$

   Entonces:

   (A) Solamente S_1 y S_2 son subespacios vectoriales de F.
   (B) Solamente S_1 y S_3 son subespacios vectoriales de F.
   (C) Solamente S_1 y S_4 son subespacios vectoriales de F.
   (D) Solamente S_2 y S_3 son subespacios vectoriales de F.
   (E) Solamente S_2 y S_4 son subespacios vectoriales de F.
   (F) Solamente S_3 y S_4 son subespacios vectoriales de F.

3. En $\mathbb{R}^3$, consideramos los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 2, 3)$, los vectores $u = (4, 2, 0)$, $v = (1, -2, 0)$, $w = (-1, 2, 0)$, y las rectas paramétricas dadas por:

$$r(\lambda) = A + \lambda \cdot u \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$
$$s(\mu) = B + \mu \cdot v \quad (\mu \in \mathbb{R}).$$

   Entonces:

   (A) Los vectores u, v y w son ortogonales dos a dos.
   (B) La recta s es paralela al plano dado por la ecuación $x + 2y = 9$.
   (C) La distancia entre las rectas r y s es exactamente igual a la distancia entre los puntos A y B.
   (D) Existe un plano paralelo al plano dado por la ecuación $x + 2y = 0$ que contiene a la recta r.

(E) La distancia del punto B al plano dado por la ecuación $x + 2y = 0$ vale $\frac{\sqrt{6}}{5}$.

(F) La distancia entre las rectas s y r vale $\frac{3}{4}$.

4. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial finito dimensional (es decir, generado por algún conjunto finito). Para $m \geq 2$, se tiene una cadena de subespacios vectoriales

$$W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_i \subset W_{i+1} \subset \cdots \subset W_m,$$

es decir, W_i es subespacio de W_{i+1} y W_i está contenido estrictamente en W_{i+1}, para cada $1 \leq i \leq m-1$. Entonces:

(A) Todo conjunto linealmente independiente (LI) de V tiene, al menos, un vector de cada W_i, para todo $1 \leq i \leq m$.

(B) Dado G_{i+1} un generador de W_{i+1}, entonces $G_{i+1} \cap W_i$ es un generador de W_i, para todo $1 \leq i \leq m-1$.

(C) Existe un conjunto LI en V con $m-1$ elementos.

(D) Todo conjunto LI de W_{i+1} tiene más elementos que todo conjunto LI de W_i.

(E) Existen conjuntos generadores en W_i con i vectores.

(F) $W_m = V$.

Desarrollo.

1. Sean $M \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$ y $M^{'} \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times(n+1)}$ tal que los vectores columna de M: $M_1, M_2, \ldots, M_n$ son vectores columna de $M^{'}$ (no necesariamente en el mismo orden). Probar que: $\mathrm{Rg}(M) \leq \mathrm{Rg}(M^{'})$.

2. Indique (sin demostrar) cuál o cuáles de las afirmaciones siguientes es verdadera para toda matriz $X \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$. Para aquellas afirmaciones falsas, exhiba un contraejemplo.

   (a) $|X| = 0 \Rightarrow \mathrm{Rg}(X) = n-1$.

   (b) $|X| \geq 0 \Rightarrow X$ es invertible.

   (c) $|X| \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Rg}(X) = n$.

3. Sea $A \cdot x = b$ un sistema de ecuaciones, con $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$, $x, b \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times 1}$. Demostrar que, si $|A| = 0$ y $|A_n| \neq 0$[1], entonces el sistema de ecuaciones es incompatible.

Solución.

1	2	3	4
F	B	E	C

[1] A_n denota la matriz que surge de sustituir la columna enésima de A por el vector columna b.

9.12. Año 2023.

9.12.1. Primer semestre. Segundo parcial: 24 Junio 2023.

Verdadero-falso.

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, donde V y W son espacios vectoriales reales y $\dim(V) = 3$. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones acerca de V, W y T son verdaderas y cuáles son falsas.

1. Si $\dim(W) = 2$, entonces T es inyectiva.
2. Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un subconjunto de V tal que $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$ es un subconjunto de W linealmente independiente, entonces $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente.
3. Dada $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V, se tiene que T es la transformación lineal nula si y sólo si $T(v_1) = T(v_2) = T(v_3) = 0_W$.
4. Si T es inyectiva, entonces $\dim(W) = 3$.
5. Si $V = U \oplus W_1$ y $V = U \oplus W_2$, entonces $W_1 = W_2$.
6. Si T es sobreyectiva, $W = W_1 \oplus W_2$ (donde W_1 y W_2 son subespacios de W de dimensión finita) y $\dim(\ker(T)) = 2$, entonces $\dim(W_1) \cdot \dim(W_2) = 0$.

Múltiple opción.

1. Sea r la recta en $\mathbb{R}^3$ dada por
$$r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = z.$$
Considerando los planos π_1 y π_2 en $\mathbb{R}^3$ dados por
$$\pi_1 : 2x + y - z = 1 \quad \text{y} \quad \pi_2 : \begin{cases} x = 4 - 4\lambda, \\ y = 2\lambda - 2\mu, \\ z = 2\mu. \end{cases}$$
Si $r \cap \pi_1$ denota la intersección entre la recta r y el plano π_1, entonces la distancia entre $r \cap \pi_1$ y π_2 es igual a:
   (A) 1
   (B) 2
   (C) 3
   (D) 4
2. Sea A el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por
$$A = \{(1, a, a+1), (a, 0, 1), (2a, a^2, a^2 + a + 1)\},$$
donde $a \in \mathbb{R}$. Si $[A]$ denota al subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por A, entonces:
   (A) $[A] = \mathbb{R}^3$ para un único valor de a.

(B) $[A] = \mathbb{R}^3$ para exactamente dos valores de a.
(C) $[A] = \mathbb{R}^3$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
(D) $[A] \neq \mathbb{R}^3$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

3. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3, y $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V. Si se consideran los subconjuntos de V dados por
$$A_1 = \{v_1 + v_2, v_1 + 3v_3, v_2 + v_3\},$$
$$A_2 = \{v_1 + v_2, 3v_2 + v_3, -3v_1 + v_3\},$$
entonces:

(A) A_1 y A_2 son bases de V.
(B) Ni A_1 ni A_2 son bases de V.
(C) A_1 es base de V pero A_2 no.
(D) A_1 no es base de V pero A_2 sí.

4. Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal dada por
$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$
entonces:

(A) $\mathbb{R}^2 = \ker(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$.
(B) $\ker(T) = \operatorname{Im}(T)$.
(C) $\mathbb{R}^2 = \ker(T) + \operatorname{Im}(T)$ y $\ker(T) \cap \operatorname{Im}(T) \neq \{(0,0)\}$.
(D) $\mathbb{R}^2 \neq \ker(T) + \operatorname{Im}(T)$ y $\ker(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{(0,0)\}$.

5. Sea $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas de tamaño 2×2 con coeficientes reales. Se considera el subconjunto $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ dado por
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
y $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal tal que
$$T(M_1) = (1,-1), \quad T(M_2) = (1,1), \quad T(M_3) = (1,1), \quad T(M_4) = (0,1).$$
Entonces, el valor de $T\left(\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}\right)$ es igual a:

(A) $(0,-9)$
(B) $(3,2)$
(C) $(0,0)$
(D) $(-4,2)$

6. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual a 2 y con coeficientes reales. Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ es la transformación lineal dada por

$$T(x, y, z) = zt^2 + (x + y)t + x + y + z,$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, entonces:

(A) T es sobreyectiva.
(B) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.
(C) T es inyectiva.
(D) $\ker(T) = [(1, -1, 0), (0, 0, 1)]$.

Solución.

Verdadero o Falso

1. Falso. Por teorema de las dimensiones, si $\dim(W) < \dim(V)$ entonces T no puede ser inyectiva.
2. Verdadero. $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\} = T(\{v_1, v_2, v_3\})$. Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ fuera L.D. entonces generaría un subespacio de dimensión menor o igual a 2 que T llevaría en un subespacio de dimensión 3. De nuevo, por el teorema de las dimensiones, esto no es posible.
3. Verdadero. El directo es trivial. Para el recíproco, si $T(v_i) = 0_w \forall i = 1, 2, 3$, como para todo $v \in V$ existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \alpha_3 v_3 \implies T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \alpha_3 T(v_3) = 0_W$.
4. Falso. Si T es inyectiva, entonces $\dim(W) \geq \dim(V) = 3$.
5. Falso. Si $V = \mathbb{R}^3$ y U es un plano. Alcanza tomar cualquier par de rectas distintas no contenidas en el plano para obtener dos descomposiciones distintas de V como suma directa de subespacios.
6. Si la dimensión del núcleo de T es 2, entonces por el teorema de las dimensiones, sabemos que $\dim(Im(T)) = 1$. Además, si T es sobreyectiva, entonces $Im(T) = W \implies 1 = \dim(Im(T)) = \dim(W)$. Entonces, la única forma de escribir a W como suma directa de subespacios es que uno de ellos sea 0_W y por lo tanto tenga dimensión 0.

Múltiple opción

1. Podemos reescribir la ecuación de la recta r de la siguiente forma

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Para encontrar $r \cap \pi_1$, sustituimos las coordenadas anteriores en la ecuación de π_1

$$2(3 + 2\lambda) + (1 + 3\lambda) - (\lambda) = 1 \implies 6\lambda + 7 = 1 \implies 6\lambda = -6 \implies \lambda = -1$$

Es decir, $r \cap \pi_1 = \{(1, -2, -1)\}$, donde el punto se obtiene de sustituir el valor de λ en la ecuación de r.

Con esto, si tenemos la ecuación implícita de π_2, podemos calcular la distancia entre $r \cap \pi_1$ y π_2 utilizando la ecuación de distancia de punto a plano.

Pasamos entonces π_2 a implícita

$$\pi_2 : x + 2y + 2z = 4$$

Entonces,

$$d(r \cap \pi_1, \pi_2) = \frac{|1{,}1 + 2.(-2) + 2.(-1) - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 9/\sqrt{9} = 3$$

La respuesta correcta es C.

2. Se tiene que $(2a, a^2, a^2 + a + 1) = a.(1, a, a + 1) + (a, 0, 1)$, por lo tanto, es L.D. para cualquier valor de a. Esto significa que la dimensión del subespacio generado por este conjunto es menor que 3 para todo $a \in \mathbb{R}$ y $[A] \neq \mathbb{R}$ para todo $a \in \mathbb{R}$. La respuesta correcta es D.

3. Como ambos conjuntos tienen 3 elementos, alcanza fijarnos si son conjuntos L.I.

   Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tales que

$$\alpha_1(v_1 + v_2) + \alpha_2(v_1 + 3v_3) + \alpha_3(v_2 + v_3) = 0_V \implies (\alpha_1 + \alpha_2)v_1 + (\alpha_1 + \alpha_3)v_2 + (3\alpha_2 + \alpha_3)v_3 = 0_V$$

   Como el conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es L.I., tenemos que todos los coeficientes de la ecuación anterior deben ser nulos, es decir

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

   Y tenemos que A_1 es un conjunto L.I.

   Razonamos de la misma forma con A_2

$$\alpha_1(v_1 + v_2) + \alpha_2(3v_2 + v_3) + \alpha_3(-3v_1 + v_3) = 0_V \implies (\alpha_1 + -3\alpha_3)v_1 + (\alpha_1 + 3\alpha_2)v_2 + (\alpha_2 + \alpha_3)v_3 = 0_V$$

   Ahora el sistema que obtenemos es

$$\begin{cases} \alpha_1 - 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 = 3\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$$

   Y tenemos que A_2 es un conjunto L.D. La respuesta correcta es C.

4. Comenzamos calculando la imagen de T. Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, entonces existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (a, b)$ si y solo si

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = a \\ -9x - 6y = b \end{cases} \Leftrightarrow a = -2b/3$$

   Por lo tanto, $Im(T) = [(-2/3, 1)]$.

   Además, si $a = b = 0$, tenemos que el sistema es compatible indeterminado y su conjunto solución, que es el núcleo de T es $N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -2y/3\} = [(-2/3, 1)]$. Tenemos que $N(T) = Im(T)$. La respuesta correcta es B.

5. Es fácil ver que el conjunto $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ forma una base del espacio $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, por lo tanto, podemos escribir a la matriz $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de dicho conjunto de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Usando que T es una transformación lineal, podemos calcular $T\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ así

$$T\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} = 2T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 5T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2(1,-1) - 3(1,1) + (1,1) - 5(0,1) = (0,-9)$$

La respuesta correcta es A.

6. Calculemos el núcleo de la transformación T:

$$T(x,y,z) = zt^2 + (x+y)t + x + y + z = 0 \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

Es decir, $N(T) = \{(x,-x,0) : x \in \mathbb{R}\} = [(1,-1,0)]$. Tenemos entonces que T no es inyectiva, de hecho $\dim(N(T)) = 1$ y por el teorema de las dimensiones, $\dim(Im(T)) = 2$. La respuesta correcta es B.

9.12.2. Segundo semestre. Segundo parcial: 18 Noviembre 2023.

Múltiple opción.

1. Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:
   - (A) Si $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B = \{w_1, \ldots, w_n\}$ son conjuntos linealmente independientes y $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \cup B$ es linealmente independiente.
   - (B) Sea $T : V \to U$ una transformación lineal. Si $\ker(T) = 0_V$, entonces T es inyectiva.
   - (C) Si V es un espacio vectorial de dimensión n y $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ genera V, entonces A es una base de V.
   - (D) Sean $T : V \to V$ una transformación lineal y A una base de V. Si ${}_A[T]_A$ es invertible, entonces T es invertible.
   - (E) Si un conjunto A es generador de V, entonces existe $A' \subseteq A$ tal que A' es base de V.

2. Sea el conjunto
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ b & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Indicar la opción verdadera:
   - (A) A es linealmente independiente para todo valor de a y b.
   - (B) A es linealmente dependiente para todo valor de a y b.

(C) Si $a \neq 0$ y $b \neq 1$, A es linealmente independiente.

(D) Si $a = 2$ y $b \neq -1$, A es linealmente independiente.

(E) Si $a = b = 0$, A es linealmente independiente.

3. Sea la base
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Las coordenadas de $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en la base B son:

(A) $(1, 1, 1, 0)$.

(B) $(1, -1, 0, 2)$.

(C) $(1, -1, 1, 0)$.

(D) $(0, 0, 1, 2)$.

(E) $(-2, 0, -2, -1)$.

4. Sea la recta r:
$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases}$$
La distancia entre el punto $a = (1, 0, 3)$ y la recta r es:

(a) 1.

(b) $\sqrt{2/11}$.

(c) $\sqrt{4/5}$.

(d) $\sqrt{2/5}$.

(e) $\sqrt{4/11}$.

5. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ y los subespacios $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(x) = p(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ y $S_2 = \{ax^3 + (a+b)x + b : a, b \in \mathbb{R}\}$. Indicar la opción correcta:

(A) La suma de S_1 y S_2 es directa y $x^2 \notin S_1 + S_2$.

(B) La suma de S_1 y S_2 es directa y $x^3 \notin S_1 + S_2$.

(C) La suma de S_1 y S_2 no es directa y $S_1 + S_2 = \mathbb{R}_3[x]$.

(D) La suma de S_1 y S_2 es directa y $S_1 + S_2 = \mathbb{R}_3[x]$.

(E) La suma de S_1 y S_2 no es directa y $x \notin S_1 + S_2$.

6. Considere la transformación lineal identidad $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, y las bases $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $B = \{(0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$. Entonces la matriz ${}_B(\mathrm{Id})_A$ es:

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(E) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Sea $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tal que $T(A) = A + A^t$, donde A^t es la matriz traspuesta de A. Indicar la opción correcta:

   (A) $\dim \ker(T) = 0$ y $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$.
   (B) $\dim \ker(T) = 1$ y $\dim \operatorname{Im}(T) = 3$.
   (C) $\dim \ker(T) = 1$ y $\dim \operatorname{Im}(T) = 1$.
   (D) $\dim \ker(T) = 2$ y $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$.
   (E) $\dim \ker(T) = 0$ y $\dim \operatorname{Im}(T) = 4$.

8. Se consideran $\mathbb{R}^3$ y el subespacio $S = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b = 0, b + c = 0\}$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\ker(T) = S$, $T(0, 1, 1) = (1, 2, 3)$ y $T(0, 0, 1) = (0, 0, 2)$. Entonces $T(1, 0, 1)$ es igual a:

   (A) $(1, -1, 1)$.
   (B) $(1, 1, -1)$.
   (C) $(1, 2, -1)$.
   (D) $(1, 2, 1)$.
   (E) $(2, -1, -1)$.

9. Indique cuál de los siguientes subconjuntos $S \subseteq \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ es un subespacio.

   (A) $S = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} : \det(A) = 0\}$.
   (B) $S = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} : \det(A) = 1\}$.
   (C) $S = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} : \operatorname{tr}(A) = 0\}$.
   (D) $S = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} : \operatorname{tr}(A) = 1\}$.
   (E) $S = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} : \det(A) = \operatorname{tr}(A)\}$.

10. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2$ tal que $T(p) = (p(0), p(1))$. Una base del núcleo de T es:

   (A) $\{x^2 - x, 1\}$.
   (B) $\{x^2, x\}$.
   (C) $\{x^2 - x\}$.
   (D) $\{x^2 - x + 1\}$.
   (E) $\{x^2, x, 1\}$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	C	B	D	B	B	D	C	C

9.13. Año 2024.

9.13.1. Primer semestre. Segundo parcial (versión 1): 04 de Julio 2024.

1. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ el producto vectorial en $\mathbb{R}^3$. Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es falsa.

   (A) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \perp \mathbf{u}$.
   (B) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \perp \mathbf{v}$.
   (C) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = 0$ y/o $\mathbf{v} = 0$.
   (D) $\mathbf{v} \wedge (2\mathbf{v} - 3\mathbf{u}) = 3\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.
   (E) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = 0$.

2. Considere el espacio vectorial usual $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ y los subespacios
$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 3z = 0\}$$
   y
$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}.$$
   Entonces, una base de la intersección $W_1 \cap W_2$ es:

   (A) $B = \{(3, 3, 2)\}$.
   (B) $B = \{(3, 3, -2)\}$.
   (C) $B = \{(1, 1, 2/3), (1, 1, 2)\}$.
   (D) $B = \{(1, -1, 0)\}$.
   (E) $B = \{(1, -1, 0), (3, 3, -2)\}$.

3. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ con la estructura usual y $A = \{x^2 - 1, x + 1, 1\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$. Entonces:

   (A) $\operatorname{coord}_A(x^2 + 2x + 2) = (1, 1, 0)$.
   (B) $\operatorname{coord}_A(x^2 + 2x + 2) = (1, -1, 2)$.
   (C) $\operatorname{coord}_A(x^2 + 2x + 2) = (1, 1, 1)$.
   (D) $\operatorname{coord}_A(x^2 + 2x + 2) = (1, 2, 1)$.
   (E) $\operatorname{coord}_A(x^2 + 2x + 2) = (0, 1, 1)$.

4. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ con la estructura usual, $A = \{1, 1 + x, x^2\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$ y $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ con matriz asociada
$$_A(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Entonces:

(A) $T(x^2 - x) = x^2 - 1$.
(B) $T(x^2 - x) = x^2 + 1$.
(C) $T(x^2 - x) = x^2 + x - 1$.
(D) $T(x^2 - x) = x^2$.
(E) $T(x^2 - x) = x^2 + x$.

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2[x]$ tal que:

$$T(a, b, c) = (a - b)x^2 + (b - 2c)x + (a - 3b + 4c).$$

Indicar la opción correcta.

(A) T no es una transformación lineal.
(B) T es una transformación lineal con $\dim(\ker(T)) = 2$ y $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$.
(C) T es una transformación lineal biyectiva.
(D) T es una transformación lineal con $\dim(\ker(T)) = 1$ y $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.
(E) T es una transformación lineal con $\dim(\ker(T)) = 1$ y $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$.

6. Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (2x + y, y + z, x - z)$$

y las bases $A = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ y $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Entonces, la matriz asociada a T de la base C a la base A es:

(A) ${}_A(T)_C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(B) ${}_A(T)_C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(C) ${}_A(T)_C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(D) ${}_A(T)_C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

(E) ${}_A(T)_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

7. Se considera $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$ con la estructura de espacio vectorial usual. Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es falsa.

(A) Si A es un generador de $\mathbb{R}^4$, entonces $\mathrm{card}(A) \geq 4$.

(B) Si A_1 y A_2 son conjuntos LI tales que $\text{card}(A_1)+\text{card}(A_2)=4$, entonces $A_1\cup A_2$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

(C) Si A es un conjunto LI en $\mathbb{R}^4$, entonces $\text{card}(A)\leq 4$.

(D) Si A es un conjunto LI en $\mathbb{R}^4$ y $\text{card}(A)=4$, entonces A es una base de $\mathbb{R}^4$.

(E) Sean $S_1\neq\{0\}$ y $S_2\neq\{0\}$ subespacios de $\mathbb{R}^4$ con A_1 base de S_1 y A_2 base de S_2. Si $S_1\oplus S_2=\mathbb{R}^4$, entonces $A_1\cup A_2$ es base de $\mathbb{R}^4$.

8. En el espacio vectorial $V=\mathbb{R}_2[x]$, considerar el conjunto $A=\{1-x+ax^2, 1-ax+x^2, a+x+x^2\}$, donde $a\in\mathbb{R}$. Indicar la opción correcta.

(A) A es LD para todo $a\in\mathbb{R}$.

(B) Existe un único $a\in\mathbb{R}$ para el cual A es LD.

(C) Existen exactamente dos valores de $a\in\mathbb{R}$ para los cuales A es LD.

(D) A es LI para todo $a\in\mathbb{R}$.

(E) Existen exactamente tres valores de $a\in\mathbb{R}$ para los cuales A es LD.

9. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$, se consideran los subespacios

$$S_1=\{p\in\mathbb{R}_3[x]: p(0)=p(2)=0\}$$

y

$$S_2=[x^2-2x, x^3].$$

Indicar la opción correcta.

(A) La suma de S_1 y S_2 es directa y $S_1\oplus S_2=\mathbb{R}^3[x]$.

(B) La suma de S_1 y S_2 no es directa y $S_1+S_2=\mathbb{R}^3[x]$.

(C) La suma de S_1 y S_2 no es directa y $S_1\cap S_2=[x(x-2)]$.

(D) La suma de S_1 y S_2 es directa y $\dim(S_1\oplus S_2)=3$.

(E) La suma de S_1 y S_2 no es directa y $S_1\cap S_2=[x^2(x-2)]$.

10. Se considera el espacio vectorial usual $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ y el subespacio

$$S=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a\end{pmatrix}\in\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}: a,b\in\mathbb{R}\right\}.$$

Sea $T:\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}\to\mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $\ker(T)=S$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)=(1,0)$ y $T\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\right)=(0,1)$. Entonces, $T\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -3\end{pmatrix}\right)$ es igual a:

(A) $(-1,8)$.

(B) $(0,0)$.

(C) $(5,-2)$.

(D) $(-5,2)$.

(E) $(1,-8)$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	A	D	B	D	C	B	E	C	A

Ejercicio 1

Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ y $\wedge$ el producto vectorial en $\mathbb{R}^3$. Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es falsa.

(C) $u \wedge v = 0 \Rightarrow u = 0$ y/o $v = 0$.

El producto vectorial de dos vectores colineales no nulos, vale 0 siempre. Por ejemplo, sea $u = (1, 0, 0)$ y $v = (2, 0, 0)$, entonces $u \wedge v = 0$.

Ejercicio 2

Considere el espacio vectorial usual $\mathbb{R}^3$ y los subespacios $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 3z = 0\}$ y $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$. Entonces, una base de la intersección $W_1 \cap W_2$ es:
(A) $B = \{(3, 3, 2)\}$.

Sea $(x, y, z) \in W_1 \cap W_2$. Como $(x, y, z) \in W_1$, tenemos que $x + y - 3z = 0$ si y sólo si $z = \frac{x+y}{3}$. Por otro lado, $(x, y, z) \in W_2$, por lo que $x = y$. Luego, $(x, y, z) \in W_1 \cap W_2$ si y sólo si $x = y$, $z = \frac{x+y}{3} = \frac{2x}{3}$. Es decir, todo vector en $W_1 \cap W_2$ es de la forma $(x, x, \frac{2x}{3})$. En particular, $W_1 \cap W_2$ tiene dimensión 1 y cualquier vector no nulo será una base. La única opción posible es la (A), poniendo $x = 3$.

Ejercicio 3

Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}_2 2[x]$ con la estructura usual y $A = \{x^2 - 1, x + 1, 1\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$. Entonces:
(D) $\text{coord}_A(x^2 + 2x + 2) = (1, 2, 1)$.

Tenemos que resolver el sistema de ecuaciones $\alpha(x^2 - 1) + \beta(x + 1) + \gamma(1) = x^2 + 2x + 2$. Desarrollando y agrupando por monomios, nos queda $\alpha x^2 + \beta x + (-\alpha + \beta + \gamma) = x^2 + 2x + 2$. De aquí deducimos que $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $-\alpha + \beta + \gamma = 2$. Conociendo α y β, deducimos que $\gamma = 1$. Concluimos que $\text{coord}_A(x^2 + 2x + 2) = (\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 1)$.

Ejercicio 4

Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ con la estructura usual, $A = \{1, 1 + x, x^2\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$ y $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ con matriz asociada

$$_A(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces:
(B) $T(x^2 - x) = x^2 + x - 1$.
Primero hallamos $\text{coord}_A(x^2 - x)$, es decir, resolvemos el sistema de ecuaciones $\alpha + \beta(1 + x) + \gamma x^2 = x^2 - x$. Desarrollando obtenemos $(\alpha + \beta) + \beta x + \gamma x^2 = x^2 - x$. De aquí deducimos que $\alpha + \beta = 0$, $\beta = -1$ y que $\gamma = 1$. Luego obtenemos que $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -1, 1)$. Ahora multiplicamos la matriz asociada por el vector columna

$(1,-1,1)$ y nos da $(1,0,1)$, es decir, $\text{coord}_A(T(x^2-x)) = (1,0,1)$. Finalmente, $T(x^2-x) = 1\cdot 1+0\cdot(1+x)+1\cdot x^2 = 1+x^2$.

Ejercicio 5

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que:

$$T(a,b,c) = (a-b)x^2 + (b-2c)x + (a-3b+4c).$$

Indicar la opción correcta.

(D) T es una transformación lineal con $\dim(\ker(T)) = 1$ y $\dim(\text{Im}(T)) = 2$.

Es fácil ver que T es una transformación lineal. Vamos a hallar el núcleo de T. Por definición de T tenemos que $T(a,b,c) = 0$ si y sólo si $a-b = 0$, $b-2c = 0$ y $a-3b+4c = 0$. De estas ecuaciones obtenemos que $a = b = 2c$. Luego, un vector del núcleo de T es de la forma $(a,a,a/2)$ con $a \in \mathbb{R}$. En particular, vemos que $\dim(\ker(T)) = 1$. Como $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión 3, el teorema de las dimensiones nos dice que $\dim(\text{Im}(T)) = 2$.

Ejercicio 6

Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x,y,z) = (2x+y, y+z, x-z)$$

y las bases $A = \{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ y $C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Entonces, la matriz asociada a T de la base C a la base A es:

(C) ${}_A(T)_C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Vamos a resolver el ejercicio de manera usual: tomamos los vectores de la base de salida C, les aplicamos T, y luego hallamos las coordenadas en la base de llegada A. Primero tomamos $(1,0,0) \in C$ y obtenemos $T(1,0,0) = (2,0,1)$. Luego hallamos $\text{coord}_C(2,0,1)$, que nos da $(2,-2,3)$. Esto quiere decir que $(2,-2,3)$ es la primera columna de la matriz asociada. Del mismo modo $T(0,1,0) = (1,1,0)$ que es exactamente el primer vector de A, es decir, $\text{coord}_A(1,1,0) = (1,0,0)$ que es la segunda columna de la matriz asociada. Por último, $T(0,0,1) = (0,1,-1)$, y las coordenadas de este vector en A son $(0,1,-2)$ que nos da la tercera columna de la matriz asociada.

Ejercicio 7

Se considera $\mathbb{R}^4$ con la estructura de espacio vectorial usual. Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es falsa.

(B) Si A_1 y A_2 son conjuntos LI tales que $\text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) = 4$, entonces $A_1 \cup A_2$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

Contraejemplo: tomamos el conjunto $A_1 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$ que es claramente LI, y definimos $A_2 = \{(1,1,0,0),(2,-2,0,0)\}$. Luego, tanto A_1 como A_2 son conjuntos LI, la suma de sus cardinales es 4, pero $A_1 \cup A_2$ no es LI, luego no puede ser una base de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 8

En el espacio vectorial $V = \mathbb{R}_2[x]$, considerar el conjunto $A = \{1 - x + ax^2, 1 - ax + x^2, a + x + x^2\}$, donde $a \in \mathbb{R}$. Indicar la opción correcta.

(E) Existen exactamente tres valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales A es LD.

Consideramos la ecuación $\alpha(1 - x + ax^2) + \beta(1 - ax + x^2) + \gamma(a + x + x^2) = 0$ que es equivalente a $x^2(a\alpha + \beta + \gamma) + x(-\alpha - \beta a + \gamma) + (\alpha + \beta + a\gamma) = 0$. Esto es un sistema homogéneo de 3 ecuaciones y 3 incógnitas dado por:

$$\begin{cases} a\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha - a\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + a\gamma = 0 \end{cases}$$

cuya matriz del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Al ser un sistema homogéneo, sabemos que es compatible (el vector nulo es solución), así que lo que tenemos que ver es si es determinado o indeterminado. Para los valores $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema es compatible determinado, la solución será única (y por ende la trivial) y el conjunto A será LI. Para los valores $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema es compatible indeterminado, habrá infinitas soluciones, y el conjunto A será LD.

En general los sistemas se resuelven aplicando el método de Rouché-Frobenius y escalerizando la matriz. En este caso particular, como la matriz es cuadrada, el sistema es determinado si y sólo si la matriz A es invertible. Luego, en lugar de escalerizar, podemos calcular el determinante:

$$|A| = -a^3 - 1 + 1 + a - a + a = -a^3 + a = -a(a^2 - 1).$$

Luego $|A| = 0$ si y sólo si $a = 0, 1, -1$. Es decir, para estos tres valores de a la matriz A no es invertible, y el sistema resulta compatible indeterminado. Para los valores de $a \in \mathbb{R}$ distintos a 0, 1, -1, la matriz A es invertible, y el sistema compatible determinado.

Ejercicio 9

En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$, se consideran los subespacios $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(0) = p(2) = 0\}$ y $S_2 = [x^2 - 2x, x^3]$. Indicar la opción correcta.

(C) La suma de S_1 y S_2 no es directa y $S_1 \cap S_2 = [x(x - 2)]$.

Consideramos $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in S1 \cap S2$. Como $p \in S_1$ tenemos que $p(0) = 0$, lo cual implica $d = 0$, y $p(2) = 0$, lo cual implica $c = -4a - 2b$. Luego, p es de la forma $p(x) = ax^3 + bx^2 + (-4a - 2b)x$.

Por otro lado, $p \in S_2 = [x^2 - 2x, x^3]$, es decir, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $p(x) = \alpha x^3 + \beta(x^2 - 2x)$.

Luego $ax^3 + bx^2 + (-4a - 2b)x = \alpha x^3 + \beta(x^2 - 2x)$ si y sólo si $\alpha = a$, $\beta = b$ y $-4a - 2b = -2\beta$. Esto implica que $a = \alpha = 0$, y p es de la forma $p(x) = bx^2 - 2bx = bx(x - 2)$. Es decir, $S_1 \cap S_2 = [x(x - 2)]$ y la suma no es directa.

Ejercicio 10

Se considera el espacio vectorial usual $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ y el subespacio

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sea $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $\mathrm{Ker}(T) = S$,

$$T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, $T \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ es igual a:

(A) $(-1, 8)$.

Primero observamos que el subespacio S está generado por las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, que además no son colineales, luego forman una base de S. Ahora es fácil ver que el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$. A partir de aquí, existen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo este sistema obtenemos: $\alpha = -1, \beta = 8, \gamma = -5$ y $\delta = -4$. Luego por linealidad:

$$T \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = -1T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 8T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 5T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 4T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente:

$$T \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1, 8).$$

CAPÍTULO 10

EVALUACIONES: EXAMÉNES.

10.1. Año 2009.

10.1.1. Examen: 9 Diciembre 2009.

Múltiple opción.

1. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ con la suma y el producto usuales y los siguientes conjuntos:
   (a) $\{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : a + b + c + d = 0\}$
   (b) $\{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p(x) = xp'(x)\}$
   (c) $\{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : ab = 0\}$
   Indique la afirmación correcta:

   (A) Solo (a) y (b) son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_3[x]$.

   (B) Solo uno de los conjuntos anteriores es un subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$.

   (C) Solo (b) y (c) son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_3[x]$.

   (D) Los tres conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_3[x]$.

   (E) Solo (a) y (c) son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_3[x]$

2. Consideramos los siguientes polinomios en $\mathbb{R}_2[x]$:

   $p_1(x) = x^2 + x + 1$

   $p_2(x) = x - 1$

   $p_3(x) = x + 1$

   $p_4(x) = x^2 + 2x$

   y los siguientes polinomios en $\mathbb{R}_3[x]$:

   $q_1(x) = 3x^3 + x$

   $q_2(x) = x^3 + 2x^2 + x$

   $q_3(x) = x^2 + \lambda$

$q_4(x) = 4x^3 + 2x^2 + 2x$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Entonces:

(A) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, existe más de una transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ que cumple $T(p_i) = q_i$, $\forall i = 1, 2, 3, 4$.

(B) Únicamente para $\lambda = 0$, existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ que cumple $T(p_i) = q_i$, $\forall i = 1, 2, 3, 4$.

(C) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, no existe ninguna transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ que cumpla $T(p_i) = q_i$, $\forall i = 1, 2, 3, 4$.

(D) Únicamente para $\lambda = 0$, no existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ que cumple $T(p_i) = q_i$, $\forall i = 1, 2, 3, 4$.

(E) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ que cumple $T(p_i) = q_i$, $\forall i = 1, 2, 3, 4$.

3. Sean $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ las rectas en $\mathbb{R}^3$ dadas por:

$\mathbf{r}_1$:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$\mathbf{r}_2$:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Entonces:

(A) Las rectas son paralelas.

(B) La distancia entre las rectas es 3.

(C) La distancia entre las rectas es 9.

(D) La distancia entre las rectas es $\sqrt{3}$.

(E) Las rectas se cortan.

4. Sean los planos de ecuaciones:

$$\pi_1) : (\alpha^2 + \beta^2 + 1)x + (\beta + 1)z = 2\beta + \alpha$$

$$\pi_2) : x + \alpha y = \alpha - \beta$$

$$\pi_3) : -x + (\beta + 1)z = \beta$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Indicar la opción correcta:

(A) Si $\alpha = 0$ y $\beta \neq -1$, la intersección de los tres planos es un punto.

(B) Si $\alpha = 0$, la intersección de los tres planos es diferente del conjunto vacío, cualquiera sea β.

(C) Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la intersección de los tres planos es un punto.

(D) Si $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ y $\beta \neq -1$, la intersección de los tres planos es una recta.

(E) Si $\beta = -1$, la intersección de los tres planos es el conjunto vacío.

5. Sea la transformación lineal $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathbb{R}_3[x]$ tal que:

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^3, T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x^3 + x^2, T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^3 + x^2 + x, T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^3 + x^2 + x + 1$$

Si $C_1 = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ y $C_2 = \{x^3, x^2, x, 1\}$, entonces el determinante de ${}_{C_2}(T)_{C_1}$ vale:

(A) 2.

(B) 1.

(C) -1.

(D) -2.

(E) 0.

6. Sean A y B dos matrices con coeficientes reales de tamaño 2×2, siendo A ortogonal ($AA^t = I$) con determinante no negativo. Si $\det((2AB)^3) = 1$, entonces el determinante de B vale:

(A) 4.

(B) -1.

(C) $\frac{1}{4}$.

(D) $\frac{1}{2}$.

(E) 1.

7. Sean las matrices $A, B, C \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ tales que $A^t = -A$, $B^{100} = 0$ y $C = I + B + \ldots + B^{99} = \sum_{i=0}^{99} B^i$. Indicar la opción correcta:

(A) Si n es impar, se cumple que $\det(A) = \det(B) = 0$ y $C = (I - B)^{-1}$.

(B) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\det(A) \neq 0$, $\det(B) = 0$, y $\det(C) \cdot \det(I - B) = 1$.

(C) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\det(A) = \det(B) = 0$ y $C = (I - B)^{-1}$.

(D) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\det(A) \neq 0$, $\det(B) \neq 0$, e $I - B$ no tiene inversa.

(E) Si n es par, se cumple que $\det(A) \neq 0$, $\det(B) \neq 0$, e $I - B$ no tiene inversa.

8. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal tal que $T(S) = S$, siendo $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0\}$ y $T(1, -1, -1, 0) = (1, 2, 1, 1)$. Indicar la opción correcta:

(A) T es biyectiva.

(B) $\dim(\ker(T)) = 2$.

(C) $\dim(\ker(T)) = 1$.

(D) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

(E) T es sobreyectiva pero no inyectiva.

10.2. Año 2010.

10.2.1. Examen: 10 Febrero 2010.

Múltiple opción.

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & -a \\ -1 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$. Entonces:

   (A) $\text{Rg}(A) = 2$ si y solo si $a = 0$.

   (B) $\text{Rg}(A) = 3$ para todo $a \neq 0, a \neq 4$.

   (C) $\dim(\ker(A)) = 1$ si y solo si $a = 2$.

   (D) $\text{Rg}(A) = 2$ si y solo si $a = 4$.

   (E) $\text{Rg}(A) = 2$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

2. Sea V un espacio vectorial con $\dim(V) = 3$, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V, $B_0 = \{v_1, v_1 - v_2, v_1 - v_2 + v_3\}$ otra base de V y $T : V \to V$ tal que $T(v_1) = v_2$, $T(v_2) = v_3$ y $T(v_3) = v_1$. Entonces, ${}_{B_0}(T)_{B_0}$ es:

   (A) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (D) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (E) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ y los siguientes conjuntos:
   (a) $\{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : a + 2b + 3c + 4d + 5 = 0\}$
   (b) $\{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p(-2) = 0 \text{ o } p(2) = 0\}$
   (c) $\{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : a^2 + b^2 = 0\}$

   Indique la afirmación correcta:

   (A) Solo (a) y (b) son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_3[x]$.

   (B) Solo uno de los conjuntos anteriores es un subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$.

   (C) Solo (b) y (c) son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_3[x]$.

(D) Los tres conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_3[x]$.

(E) Solo (a) y (c) son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_3[x]$.

4. Sea la transformación lineal $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que:

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x+1$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2x^2+2$$

$$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -2x^2+x-1$$

Indicar la opción correcta:

(A) $ker(T) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : a = 2c - b\right\}$

(B) $ker(T) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : a = c + b,\ d = 2c\right\}$

(C) $ker(T) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : a = 2c - b,\ d = c\right\}$

(D) $ker(T) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : a = c - b,\ d = 2c\right\}$

(E) $ker(T) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : b = d - c - a,\ d = -c\right\}$

5. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sea S el subespacio generado por las columnas de A. Entonces, la distancia de P a S vale:

(A) 0.

(B) $\sqrt{3}$.

(C) 5.

(D) Ninguna de las otras opciones es correcta.

(E) $\sqrt{5}$.

6. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_3[x]$ una transformación lineal tal que $\mathrm{Im}(T) = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(2) = p(1) = 0\}$. Entonces:

(A) Necesariamente $n \leq 2$.

(B) Si $n = 2$ entonces T es sobreyectiva.

(C) Si $n \geq 3$ entonces T no es inyectiva.

(D) Ninguna de las otras opciones es correcta.

(E) Necesariamente $n \geq 3$.

7. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a-b-c & b-a-c & c-a-b \\ d-e-f & e-d-f & f-d-e \\ g-h-i & h-g-i & i-g-h \end{pmatrix}$. Entonces, $\det(B)$ vale:

   (A) $-4\det(A)$.
   (B) $-\frac{1}{4}\det(A)$.
   (C) $-\det(A)$.
   (D) 0.
   (E) $\det(A)$.

8. Considere $(r) \begin{cases} \lambda = x \\ -2 + 2\lambda = y \\ 1 - \lambda = z \end{cases}$, $(s) = \begin{cases} y + z = 2 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$, y $(\pi) \begin{cases} 3x + y - z = 7 \end{cases}$, y las siguientes afirmaciones:

   (a) (r), (s) y (π) tienen un punto en común.
   (b) (s) y (π) son perpendiculares.
   (c) (r) y (s) se cruzan.

   Entonces:

   (A) Las afirmaciones (a) y (b) son verdaderas.
   (B) Sólo la afirmación (b) es verdadera.
   (C) Sólo la afirmación (a) es verdadera.
   (D) Sólo la afirmación (c) es verdadera.
   (E) Las afirmaciones (b) y (c) son verdaderas.

10.2.2. Examen: 10 Julio 2010.

Múltiple opción.

1. Sea $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ una matriz cualquiera que cumple: $2A^3 + 3A = A^2 + I$ con $\det(A^2 + I - 3A) = 54$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

   I $\mathrm{Rg}(A) = n$.
   II $\det(A) = 3$.
   III $A^2 + I$ es invertible.

   Indicar la opción correcta:

   (A) Solamente las afirmaciones I y II son correctas.
   (B) Solamente la afirmación I es correcta.
   (C) Las afirmaciones I, II y III son correctas.
   (D) Solamente las afirmaciones II y III son correctas.
   (E) Solamente la afirmación II es correcta.

2. Considere las rectas $r : (-1, 2, 7) + \alpha(1, -1, 1)$ y $s : (1, 2, 3) + \beta(0, 1, 0)$. La normal común a r y s es:

(A) $x - 3y = 6,\ z - y + 4 = 0,$
(B) $3x + y + 3z = 6,\ 3x + 3z = 0,$
(C) $x - 3y = -9,\ x + z - 4 = 0,$
(D) $x + z = 0,\ x + 2y + z - 5 = 0,$
(E) $x + z - 4 = 0,\ x + 2y + z - 10 = 0.$

3. Sea $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función que asigna a cada punto (x, y) de $\mathbb{R}^2$ el punto de corte de la recta por el origen de vector director $(3, -1)$ con la recta perpendicular a esta que contiene a (x, y). La matriz asociada a E en las bases canónicas es:

(A) $\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
(B) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$
(C) $\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
(D) $\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
(E) $\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

4. Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y ${}_B(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ siendo $A = \{(1, 0), (2, 1)\}$ y $B = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.
Indicar la opción correcta:

(A) $T(1, 0) = (1, -1, 4)$ y $T(1, 1) = (1, 1, -3)$.
(B) $T(1, 0) = (5, -1, 3)$ y $T(1, 1) = (-2, 1, -4)$.
(C) $T(1, 0) = (5, -1, 3)$ y $T(1, 1) = (1, 1, -3)$.
(D) $T(1, 0) = (5, -1, 3)$ y $T(1, 1) = (4, -2, 9)$.
(E) $T(1, 0) = (1, -1, 4)$ y $T(1, 1) = (-2, 1, -4)$.

5. Se considera el conjunto S de $\mathbb{R}_3[x]$ definido por:

$$S = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p = T(p)\}$$

donde $T : \mathbb{R}_3[x] \to P_3$ es una transformación lineal tal que:

$$T(x^3) = 2x^3 + 1$$
$$T(x^2) = -x^3 - x^2 + 1$$
$$T(x) = x^2 + x - 1$$
$$T(1) = 0$$

Entonces:

(A) S es un subespacio con $\dim(S) = 1$ y $\{x^3 + x^2 + 2x\}$ es base de S.
(B) S no es subespacio.
(C) S es un subespacio con $\dim(S) = 1$ y $\{x^3 + x^2 + x\}$ es base de S.
(D) S es un subespacio con $\dim(S) = 2$ y $\{x^3 + x^2, 2x\}$ es base de S.
(E) S es un subespacio con $\dim(S) = 2$ y $\{x^3, x^2 + x\}$ es base de S.

Desarrollo.

Ejercicio 1.
Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K.

1. Definir subespacio vectorial.
2. Probar que $S \subset V$ es un subespacio vectorial si y solo si S es no vacío y $av_1 + bv_2 \in S$ para todo $v_1, v_2 \in S$ y $a, b \in K$.
3. Sea V el espacio vectorial de sucesiones reales con la suma y el producto habituales. Decidir si los siguientes conjuntos son subespacios de V:
    a) $A_1 = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ con } \lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0\}$.
    b) $A_2 = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ con } \lim_{n\to+\infty} a_n \in \mathbb{R}\}$.

Ejercicio 2.

1. Considere V, W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Defina núcleo de T ($\ker(T)$) y pruebe que $\ker(T)$ es un subespacio vectorial.
2. Probar que T es inyectiva si y solo si $\ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$.
3. Sean S_1, S_2 subespacios vectoriales de un espacio vectorial V. Definir $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$.
4. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ y la función $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ con $T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a + b + c + d)x^3$.
    a) Probar que T es una transformación lineal.
    b) Hallar una base de $\ker(T)$.
    c) Probar que $\mathbb{R}_3[x] = \ker(T) \oplus S$ siendo $S = [x]$.

10.3. Año 2011.

10.3.1. Examen: 19 Julio 2011.

Ejercicio 1:

- Sea $P = (1, 2, 1)$, el plano π paralelo al plano $x + 2y - z = 1$ por el punto P es:

$$\pi) - - - - - - - - - - - - - - - - - -$$

- Una ecuación reducida de la recta r perpendicular a π por el punto $(1, 1, 0)$ es:

$$r - - - - - - - - - - - - - - - - - -$$

- Sea r':

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

  Entonces la distancia entre las rectas r y r' es:

$$- - - - - - -$$

  Y una ecuación paramétrica de la normal común a ambas rectas es:

$$n) - - - - - - - - - - - - - - - - - -$$

Ejercicio 2.

a) Sea $(V, K, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Definir subespacio vectorial.

b) Sea $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] / p(0) = p(2) = 0\}$. Probar que S_1 es un subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$ y hallar una base de S_1.

c) Sea $S \subset V$ un subespacio vectorial, definir generador de S y probar que si $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es un generador de S y $v_{i0} \in A$ es combinación lineal de $A' = A - \{v_{i0}\}$ entonces A' es también generador de S.

d) Sea $S_2 = [x^3 + x^2 + 1, 2x^2 + 2x + 1, x^3 + 5x^2 + 4x + 3]$. Hallar una base de S_2.

e) Hallar una base de $S_1 \cap S_2$.

Ejercicio 3.

Sea V un espacio de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal.

a) Probar que $\ker(T) = \ker(T^2)$ si y solo si $\ker(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{\vec{0}\}$.

b) Sea Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que ${}_A([T])_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ siendo A la base canónica y $B = \{(0, 1, 2), (0, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

   Calcular $T(x, y, z)$.

c) Hallar una base del núcleo y la imagen de T y determinar si T es inyectiva o sobreyectiva, justificando.

Solución ejercicio 1.

1. $x + 2y - z = 4$

2. $r) = \begin{cases} x + z = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$

3. $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$, la ecuación de la recta normal es: $n) = \begin{cases} x = \dfrac{9}{22} + \lambda \\ y = \dfrac{1}{11} + \lambda \\ z = \dfrac{-1}{2} + 3\lambda \end{cases}$

Solución ejercicio 2.

a) Ver teórico.

b) Sea $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = p(2) = 0\}$. Entonces es rutina verificar que , $S_1 \subseteq \mathbb{R}_3[x]$ es un subespacio vectorial.

$B = \{x - 4x, x - 2x\}$ es una base de S_1.

c) Ver teórico.

d)

$$S_2 = [x^3 + x^2 + 1, 2x^2 + 2x + 1, x^3 + 5x^2 + 4x + 3]$$

Se puede ver que:

$$x^3 + 5x^2 + 4x^2 + 3 = 1(x^3 + x^2 + 1) + 2(2x^2 + 2x + 1)$$

Utilizando la parte anterior, se obtiene que:

$$S_2 = [x^3 + x^2, +1, 2x^2 + 2x + 1]$$

Como $\{x^3 + x^2 + 1, 2x^2 + 2x + 1\}$ es un conjunto linealmente independiente, se tiene que:

$$B_2 = \{x^3 + x^2 + 1, 2x^2 + 2x + 1\}$$

e)

$$B = \{x^3 - x^2 - 2x\}$$

es base de la intersección.

Solución ejercicio 3.

a) Probar que $\ker(T) = \ker(T^2)$ si y solo si $\mathrm{Im}(T) \cap \ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Se cumple siempre que $\ker(T) \subseteq \ker(T^2)$
($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Ker}(T) \neq \{\mathbf{0}\}$, entonces existe $v \neq \mathbf{0} \in \ker(T)$ y $v \in \mathrm{Im}(T)$, con lo cual existe $w \in V$ tal que $T(w) = v$. Se tiene entonces que:

$$T^2(w) = T(T(w)) = T(v) = \mathbf{0},$$

y de este modo $w \in \ker(T^2)$; sin embargo, $T(w) = v \neq \mathbf{0}$, lo cual implica que $w \notin \ker(T)$. Entonces, se tiene que $\ker(T) \not\subseteq \mathrm{Ker}(T)$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, se cumple que si $\ker(T) = \ker(T^2)$, entonces $\mathrm{Im}(T) \cap \ker(T) = \{\mathbf{0}\}$

($\Leftarrow$) Queda a cargo del lector.

b)

$$T(x, y, z) = (\frac{-x + 2y + z}{2}, y, \frac{x + 2y - z}{2})$$

c) $A = \{(1, 01)\}$ es un generador de $\ker(T)$ y además una base. Por lo tanto, T no es inyectiva

$B = [(-1, 0, 1), (1, 1, 1)]$ es una base de $\mathrm{Im}(T)$. Por lo tanto, T no es sobreyectiva.

10.3.2. Examen: 09 Diciembre 2011.

Ejercicio 1.

Sea r la recta dada por

$$\begin{cases} x + y + z &= 3 \\ x - y - z &= 5 \end{cases}.$$

La ecuación implícita (o reducida) del plano π que pasa por el punto $(-1, 0, 1)$ y es perpendicular a r es:

$$r) - - - - - - - - - - - - - - - - - -$$

Ejercicio 2.

Sean $A = \{(2, 1, 0), (1, -2, 0), (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$, $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ la base canónica y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz asociada en las bases A y C es

$$_C(T)_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por $S(x, y, z) = (2x - y, x + y + z)$. Definimos $R = S \circ T$. Entonces

$$R(x, y, z) = - .$$

Ejercicio 3.

Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (3x - 2z, -x - y + z, 6x - 4z).$$

Hallar $B = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ tal que

- $0 \notin B$,
- $T(v_1) = 0$,
- $T(v_2) = -v_2$,
- $T(v_3) = v_2 - v_3$,

y probar que B es base de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 4.

Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio de los polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales. Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(1 + x) = (1, 2), \quad T(1 + x^2) = (2, 3), \quad T(1) = (5, 10).$$

Hallar el núcleo de T.

Ejercicio 5.

Sea V un espacio vectorial sobre $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Consideramos una transformación lineal $P : V \to V$ tal que $P \circ P = P$.

1. Probar que $\forall v \in V, v - P(v) \in \ker(P)$.
2. Probar que $V = \ker(P) \oplus \operatorname{Im}(P)$.

Ejercicio 6.

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y $T : V \to W$ una transformación lineal.

1. Probar que si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto generador de V, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es un generador de la imagen de T.
2. Probar que si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un subconjunto de V tal que $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es linealmente independiente, entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente.

10.4. Año 2012.

10.4.1. Examen: 31 Enero 2012.

1. Sea r la recta dada por
$$\begin{cases} 4x+3y=0 \\ z=0. \end{cases}$$
La ecuación implícita (o reducida) del plano π que pasa por el punto $P=(8,-1,5)$ y es paralelo a r es:
$$\pi : \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

2. Sea r la recta definida por
$$\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$$
Y r_0 la recta definida por:
$$\begin{cases} z-x-y=5 \\ 2z-y=5 \end{cases}$$
Entonces, el punto $P\in r$ más cercano a r_0 desde r es:
$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

3. Sabiendo que $\{u,v,w\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^3$, indicar cuál de los siguientes conjuntos es linealmente independiente (L.I.) o linealmente dependiente (L.D.) según corresponda:
   a) $\{u-v, v-w, w-2u\}$
   $$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
   b) $\{2u-v+2w, u-2v+3w, 3u-v+5w\}$
   $$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
   c) $\{u-w, v-w, u-v\}$
   $$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

4. a) Sea $(V,K,+,\cdot)$ un espacio vectorial. Si S_1 y S_2 son subespacios vectoriales, probar que $S_1\cap S_2$ es un subespacio vectorial.
   b) Sea $S_1=\{p\in\mathbb{R}_3[x] : p(0)=p'(1)=0\}$ y $S_2=\{p\in\mathbb{R}_3[x] : p''(0)=0\}$. Hallar un base de $S_1\cap S_2$ y otra de S_1+S_2. Justificar
   c) i) Definir $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_3[x]$ lineal tal que $\ker(T)=S_1\cap S_2$. ¿Se puede hacer que resulte invertible? Justificar la respuesta.
      ii) ¿Se puede definir T de modo que $\ker(T)=S_1$ e $\mathrm{Im}(T)=S_2$? Justificar la respuesta.

5. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ una transformación lineal tal que

$$T(x+1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T(x^2+1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T((x+1)^2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Hallar $T(ax^2+bx+c)$.

   b) Hallar la imagen de T y una base de la misma.

   c) Probar que T no es inyectiva.

6. Se considera $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineal tal que

$$T(1,0,0) = (1,1,0), \quad T(1,0,-1) = (1,0,1), \quad T(0,1,1) = (a,1,-a) \quad \text{con } a \in \mathbb{R}^3.$$

   a) Indicar y justificar si T está bien definida, es decir, si existe una única transformación lineal que cumpla las condiciones anteriores, discutiendo según los valores de $a \in \mathbb{R}^3$.

   b) De los valores de a para los cuales T está bien definida, indicar, justificando, para cuáles T es invertible.

   c) Para $a = 1$, calcular la matriz asociada en la base canónica a la inversa de T.

Solución.

1.
$$20x + 15y - 29z = 0$$

2.
$$P = (1,1,1)$$

3. Los conjuntos (en el orden de la letra del examen) son L.I., L.I. y L.D.

4. a) Ver Teórico

   b) Para encontrar una base de $S_1 \cap S_2$, primero observamos que $p \in S_1$ si y solo si $p(x) = ax^3 + bx^2 - (3a+2b)x$. Entonces, $S_1 = [x^3 - 3x, x^2 - 2x]$, y este generador es una base. Para la intersección vemos que $p \in S_1 \cap S_2$ si y oslo si $d = 0, b = 0$ y $c = -3a - 2b$, de donde $S_1 \cap S_2 = [x^3 - 3x]$.

   Por otro lado, $p \in S_2$ si y solo si $b = 0$. Así que $S_2 = [x^3, x, 1]$, y esta es su base.

   Para la suma $S_1 + S_2$, notamos que es igual a todo el espacio $\mathbb{R}_3[x]$.

   c) i) Se puede definir T de la siguiente forma: consideramos la base de P_3: $\{x^3 - 3x, x^2, x, 1\}$. Entonces, definimos $T(x^3-3x) = 0$, $T(x^2) = x^2$, $T(x) = x$, y $T(1) = 1$. Luego, por linealidad. Para esta transformación, $\ker(T) = S_1 \cap S_2$. No se puede definir una T que cumpla lo anterior y sea invertible, ya que no es inyectiva, puesto que $\ker(T) \neq \{0\}$.

   ii) No se puede definir una T que cumpla lo anterior debido al teorema de las dimensiones, ya que $\dim \mathbb{R}_3[x] = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))$. Sin embargo, $\dim S_1 + \dim S_2 = 5$, mientras que $\dim P_3 = 4$.

5. a) Escribimos el polinomio $ax^2 + bx + c$ como $\alpha(x+1) + \beta(x^2+1) + \gamma(x+1)^2$, de donde

$$\alpha = c - a, \quad \beta = \frac{a-b+c}{2}, \quad \gamma = \frac{a+b-c}{2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} T(ax^2+bx+c) &= (\alpha)T(x+1)+(\beta)T(x^2+1)+(\gamma)T((x+1)^2) \\ &= \begin{pmatrix} c-a \\ 0 \\ a+b-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{a-b+c}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \frac{a+b-c}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -b+3c & b \\ -b & -b+3c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) $\mathrm{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

c) De la definición de la transformación, tenemos que $\mathrm{Ker}(T) = [x^2]$, de donde concluimos que T no es inyectiva.

6. a) Está bien definida porque está definida en la base $B = \{(1,0,0),(1,0,-1),(0,1,1)\}$.

b) Sea C la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Tenemos que

$$_C(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix},$$

y haciendo el cambio de base

$$A =_C (T)_C = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A) = 2a-1$, tenemos que T es invertible si y solo si $a \neq \frac{1}{2}$.

c)

$$A^{-1} =_C (T^{-1})_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

10.4.2. Exámen: 16 Julio 2012.

Ejercicio 1.

1.1 Se consideran el punto $P = (0,1,0)$ y las rectas r y s definidas como:

$r) \begin{cases} x-y=-2 \\ x-z=1 \end{cases}$

$s) \begin{cases} 2x+y=5 \\ 2y+z=3 \end{cases}$

Hallar la recta t que pasa por el punto P, es perpendicular a la recta r, y corta a la recta s.

1.2 Probar que la distancia $d(P_0,\pi)$ del punto $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$ al plano π definido por $ax+by+cz+d=0$ es

$$d(P_0,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

1.3 Probar que la recta r definida por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

y la recta r_0 definida por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 3 \end{cases}$$

determinan un único plano y calcular la distancia del punto $P = (0, 1, 0)$ al plano determinado por r y r_0.

Ejercicio 2

2.1 Sea V un espacio vectorial y S_1 y S_2 subespacios de V.

a) Definir $V = S_1 + S_2$ y $V = S_1 \oplus S_2$.

b) Sea $B_1 = \{v_1, \ldots, v_k\}$ base de S_1 y $B_2 = \{w_1, \ldots, w_j\}$ base de S_2. Sea $V = S_1 + S_2$. Probar que $V = S_1 \oplus S_2$ si y solo si $B = \{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_j\}$ es base de V.

2.2 Sean los subespacios S_1 y S_2 tales que:
$S_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z - t = 0\}$
$S_2 = \{(1, 1, 2, 0), (-1, 1, 1, 1), (-1, 3, 4, 2)\}$

a) Hallar una base de S_1 y una base de S_2 e indicar la dimensión de cada uno.

b) Hallar una base de $S_1 \cap S_2$ e indicar la dimensión.

c) ¿Es $\mathbb{R}^4 = S_1 \oplus S_2$? Justificar la respuesta.

d) Hallar un subespacio W_2 tal que $\mathbb{R}^4 = S_1 \oplus W_2$.

Ejercicio 3

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.

a) Definir núcleo e imagen de T.

b) Probar que el núcleo de T es un subespacio vectorial.

c) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineal tal que $T(1, 1, 0) = (1, 1, 1)$, $T(1, -1, 0) = (-1, 2, 1)$, $T(0, 0, 1) = (8, -1, 2)$.

1) Hallar bases de $\ker(T)$ y de $Im(T)$.

2) Indicar, justificando, si T es invertible.

3.4 Sea $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_1[x]$ lineal, donde P_1 es el espacio de polinomios de grado menor o igual que 1, definida por $S(a, b, c) = (a + b)x + c$, para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Se considera la transformación lineal $S \circ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_1[x]$. Elegir dos bases A y B y hallar la matriz asociada ${}_B(S \circ T)_A$.

Solución.

Ejercicio 1.

1.1 Consideramos el plano π que pasa por P y es perpendicular a la recta r. Un vector normal al plano es el vector $(1,1,1)$, que se obtiene como $(1,1,1) = (1,-1,0) \times (1,0,-1)$ (es un vector director de r). La ecuación del plano π es $\pi : x + y + z - 1 = 0$.

La intersección de π con s es un punto $Q = (1,3,-3)$. La recta t es la recta que pasa por P y Q, y su ecuación paramétrica es:

$$t) \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$$

1.2 Ver Teórico.

1.3 Tenemos que $r \cap r_0 = \{(0,2,-1)\}$, como ambas rectas se cortan (y no coinciden) determinan un único plano π_0 de ecuación:

$$\pi_0 : -y + z + 3 = 0$$

y la distancia $d(P, \pi_0) = \sqrt{2}$.

Ejercicio 2.1.

a) $V = S_1 + S_2$ si, para cada $v \in V$, existen $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$ tales que $v = s_1 + s_2$.
$V = S_1 \oplus S_2$ si, para cada $v \in V$, existen únicos $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$ tales que $v = s_1 + s_2$.

b) Solución: $V = S_1 \oplus S_2$, entonces B es base de V:
Para cada $v \in V$, existen únicos $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$ tales que $v = s_1 + s_2$. Como $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$, tenemos que $s_1 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$ y $s_2 = \sum_{i=1}^{j} \beta_i w_i$, de donde $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{j} \beta_i w_i$ y B es un generador de V. Además, B es l.i.: sea $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{j} \beta_i w_i = \mathbf{0}$, y como V es suma directa, se escribe de manera única como $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$, con $\mathbf{0} \in S_1$, $\mathbf{0} \in S_2$. Entonces $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \mathbf{0}$, $\sum_{i=1}^{j} \beta_i = \mathbf{0}$, y como B_1 y B_2 son bases, se tiene que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$ y $\beta_1 = \ldots = \beta_j = 0$, de donde B es l.i.
$B = \{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_j\}$ es base de V, entonces $V = S_1 \oplus S_2$:
Como B es base, cada $v \in V$ existen únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_j$ tales que $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{j} \beta_i w_i$. Entonces $v = s_1 + s_2$, con $s_1 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \in S_1$, $s_2 = \sum_{i=1}^{j} \beta_i w_i \in S_2$, donde s_1 y s_2 son únicos, de donde $V = S_1 \oplus S_2$.

Ejercicio 2.2.

a) Una base de S_1 es $\{(1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,1)\}$ y su dimensión es 3. Una base de S_2 es $\{(1,1,2,0), (-1,1,1,1)\}$ y su dimensión es 2.

b) S_2 se puede expresar como $S_2 = \{(x,y,z,t) : -x + y - 2t = 0, -2x + z - 3t = 0\}$, y la intersección es $S_1 \cap S_2 = \{(x,y,z,t) : x + y + z - t = 0, -x + y - 2t = 0, -2x + z - 3t = 0\}$. Por lo tanto, $\{(-1,1,1,1)\}$ es una base de $S_1 \cap S_2$ y su dimensión es 1.

c) $\mathbb{R}^4 = S_1 + S_2$ pero la suma no es directa porque $S_1 \cap S_2 \neq \{\mathbf{0}\}$.

d) Sea $W_2 = [(0,0,0,1)]$. Como $\{(1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,1)\}$ es una base de S_1, basta probar que $\{(1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 3.

3.1 Ver Teórico.

3.2 Ver Teórico.

3.3 a) Sea $A = \{(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1)\}$. Como A es una base, entonces T está bien definida. Tomando C como la base canónica de $\mathbb{R}^3$, tenemos:

$$_C[T]_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Escalerizando se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $\text{coord}_A(\ker(T)) = [(-5,3,1)]$. Y como $-5(1,1,0)+3(1,-1,0)+1(0,0,1) = (-2,-8,1)$, se tiene que $\ker(T) = [(-2,-8,1)]$.
Por otra parte, como $_C[T]_A$ tiene un escalón en las columnas 1 y 2, se deduce que tiene rango 2 y que $Im(T) = [(1,1,1),(-1,2,1)]$.

b) T no es invertible, ya que su núcleo, como se probó en la parte anterior, es no trivial.

3.4 Sea C la canónica de $\mathbb{R}^3$ y $B = \{x, 1\}$ base de $\mathbb{R}_1[x]$. Entonces,

$$_B((S))_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que

$$_B(S \circ T)_A =_B (S)_{CC}(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

10.5. Año 2013.

10.5.1. Examen: 02 Febrero 2013.

Múltiple opción.

1. Sea el plano $\pi : \alpha x + 2y + \alpha z = 2$ y la recta r:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + \alpha y + z = 2 \end{cases}$$

Se desea que la intersección del plano con la recta sea un punto y que la distancia entre este y el punto $Q = (1, 1, -1)$ sea menor o igual que 4.

Teniendo en cuenta que el parámetro α debe ser mayor a 0, entonces la condición necesaria y suficiente que debe verificar α es:

(A) $\alpha \geq \sqrt{\frac{18}{7}}$.

(B) $0 \leq \alpha \leq \sqrt{\frac{18}{7}}$.

(C) $0 \leq \alpha \leq \sqrt{\frac{18}{7}}$ y $\alpha \neq 1$

(D) $\alpha \geq 0$ y $\alpha \neq 1$

(E) $\alpha > 1$

2. Sea α el ángulo entre los vectores u y v en $\mathbb{R}^3$ que cumplen: $||u|| = \sqrt{3}$, $||v|| = \sqrt{6}$, $||u + v|| = \sqrt{15}$.

Sea β el ángulo entre los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^3$ que cumplen: $|x \wedge y| = \sqrt{3}$, $\langle x, y \rangle = 3$.

Entonces:

(A) $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$

(B) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$

(C) $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$

(D) $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$

(E) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$

3. Sea A una matriz real 3×3 tal que $\det(A) = \frac{1}{2}$ y $\det((3A^2 + 3A + 3I)(2A - 2I)) = 432$. Entonces, $\det(A^{-1}(A^3 - I)^3 A^{-1})$ es:

(A) 32

(B) 2

(C) $4 \cdot 72^3$

(D) $4 \cdot 7^3$

(E) $-\frac{7}{2}$

4. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(p) = (p(1), p(0), p(\alpha))$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, siendo $\mathbb{R}_2[x]$ los polinomios reales de grado menor o igual que 2. Se consideran las afirmaciones:

   (I) T es sobreyectiva para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (II) Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$, entonces T es biyectiva.
   (III) Si $\alpha \neq 0$, T lleva conjuntos linealmente independientes en conjuntos linealmente independientes.
   (IV) Si $\alpha \neq 1$, T es sobreyectiva.

   Indicar la opción correcta:

   (A) Ninguna de las afirmaciones es correcta.
   (B) Solamente las afirmaciones (II), (III) y (IV) son correctas.
   (C) Solamente las afirmaciones (III) y (IV) son correctas.
   (D) Solamente la afirmación (II) es correcta.
   (E) Todas las afirmaciones son correctas.

5. Sea $A = \{(-1, 0, a), (2a, 1, 0), (-1, 1, -a)\}$ Indicar la opción correcta:

   (A) A es L.I. si y solo si $a \neq 0$ y $a \neq -1$.
   (B) A es L.D. cualquiera sea el valor de a real.
   (C) A es L.I si y solo si $a \neq 0$.
   (D) A es L.I cualquiera sea el valor de a real.
   (E) A es L.I si y solo si $a \neq -1$.

6. Se consideran el conjunto $A = \{u, v, u \wedge v\}$ (u y v no nulos en $\mathbb{R}^3$), los subespacios $S = [u, v]$, $P = [u \wedge v]$ y las siguientes afirmaciones:

   (I) u y v son no colineales si y solo si $S \oplus P = \mathbb{R}^3$.
   (II) Si P_0 es un subespacio tal que $S \oplus P_0 = \mathbb{R}^3$, entonces $P = P_0$.
   (III) Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal tal que $T(w) = \langle w, u \wedge v\rangle u \wedge v$, con u y v no colineales, entonces ${}_A(T)_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k\|u \wedge v\|^2 \end{pmatrix}$.

   Indicar la opción correcta:

   (A) Solo la afirmación (II) es verdadera.
   (B) Solo la afirmación (III) es verdadera.
   (C) Las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.
   (D) Las tres afirmaciones son falsas.
   (E) Las tres afirmaciones son verdaderas.

Desarrollo.

Ejercicio 1.

a) Probar que existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$T(1, -1, 1) = (3, -3, 12),$$

$$T(2,1,1) = (18,3,9),$$
$$T(1,2,1) = (21,6,3).$$

Enunciar los resultados teóricos que utilice.

b) Hallar el transformado de $(1,2,-2)$.

c) Calcular $T(x,y,z)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

d) Hallar el núcleo e imagen de T.

e) Determinar, justificando, si T es invertible. En caso de serlo, hallar la inversa.

Ejercicio 2.

a) Hallar la ecuación reducida de la recta r que pasa por el origen y tiene vector director $(-1,1,1)$.

b) Hallar la ecuación reducida del plano π que pasa por el origen y tiene vectores directores $(1,2,1)$ y $(0,1,0)$.

c) Probar que la recta r y el plano π son subespacios de $\mathbb{R}^3$.

d) Indicar si se cumple que $\mathbb{R}^3 = r \oplus \pi$. Justificar. En caso de que no se cumpla, indicar un subespacio S que cumpla que $\mathbb{R}^3 = r \oplus S$.

Solución.

1	2	3	4	5	6
A	B	A	D	A	C

Ejercicio 1.

1.1 Para probar la existencia de una única transformación lineal, basta con verificar que los valores en una base determinan completamente a la transformación. Si la transformación está definida en una base, por la linealidad, estará definida en todo el espacio vectorial.

1.2
$$T(1,2,-2) = (3,6,-15).$$

1.3
$$T(x,y,z) = (3x+6y+6z, 3y, 3x-3y+6z).$$

1.4 Núcleo de T ($\ker(T)$): $[(-2,0,1)]$
Imagen de T ($Im(T)$): $[(1,0,1),(2,1,-1)]$

1.5 T no es invertible porque $\ker(T) \neq \mathbf{0}$.

Ejercicio 2.

2.1
$$r) \begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \end{cases} .$$

2.2
$$\pi) -x+z=0.$$

2.3 Ver Teórico.

2.4 $r = [(-1,1,1)]$ y $\pi = [(0,1,0),(1,0,1)]$. Es fácil ver que todo vector en $\mathbb{R}^3$ es una combinación lineal de estos vectores, por lo tanto, $\mathbb{R}^3 = r + \pi$. Además, la intersección es el vector nulo, por lo que es suma directa.

10.5.2. Examen: 22 Julio 2013.

Múltiple opción.

1. Se consideran las siguientes afirmaciones:

   (I) El conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
   (II) El conjunto $L(U, V) = \{T : U \to V : T$ es una transformación lineal$\}$ es un subespacio vectorial de las funciones del espacio vectorial U en el espacio vectorial V.
   (III) La unión de dos subespacios vectoriales cualesquiera es un subespacio vectorial.

   Entonces:
   (A) Sólo (II) y (III) son verdaderas.
   (B) Sólo (I) y (II) son verdaderas.
   (C) Sólo (I) y (III) son verdaderas.
   (D) Sólo (II) es verdadera.
   (E) Sólo (III) es verdadera.

2. Se consideran los subespacios:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : a + b + c + d = 0 \right\}$$

   y

$$S_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

   Entonces:
   (A) $\dim(S_1 + S_2) = 3$
   (B) Si $M \in S_1 \cap S_2$, entonces las columnas de M forman un conjunto linealmente dependiente en $\mathbb{R}^2$.
   (C) $\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2)$.
   (D) Si $M \in S_1 \cap S_2$, entonces la suma de los elementos de la diagonal principal de M es 2.
   (E) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

3. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V tal que:

$${}_A(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Entonces:

   (A) $\ker(T) = [-4v_1 + 2v_2 + 4v_3]$.
   (B) $\ker(T) = [-2, 1, -2]$.
   (C) $\ker(T) = [-2v_1, v_2, 2v_3]$.
   (D) $\ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$.
   (E) $\ker(T) = [v_1 + v_2 - v_3, 2v_1 - 2v_3]$.

4. En $V = \mathbb{R}^4$, sean S_1 y S_2 definidos como:

$$S_1 = [(1,0,0,0),(1,1,1,1),(1,1,\alpha,\alpha)]$$

$$S_2 = \{(1,\beta,\gamma,2\gamma)\}$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Entonces:

(A) $V = S_1 \oplus S_2$ para todos los α, β, γ.
(B) $V = S_1 \oplus S_2$ si y solo si $\alpha \neq 1$.
(C) $V = S_1 \oplus S_2$ si y solo si $\beta = 0$.
(D) $V = S_1 \oplus S_2$ si y solo si $\beta \neq 1$ y $\alpha \neq 1$.
(E) $V = S_1 \oplus S_2$ si y solo si $\alpha \neq 1$ y $\gamma \neq 0$.

5. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal, A y B bases de $\mathbb{R}^n$ tales que ${}_B(T)_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$.

Entonces:

(A) Para todo par de bases de $\mathbb{R}^n$, C y D, se cumple que ${}_D(T)_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$.
(B) $\forall M \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ existen bases C y D tal que ${}_D(T)_C = M$.
(C) No existe T lineal que cumpla la letra del enunciado.
(D) Sea $M \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ tal que $M =_D (T)_C$ para algún par de bases de $\mathbb{R}^n$. Entonces M es invertible.
(E) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

6. Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ la transformación lineal definida por $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(2) & p(3) \end{pmatrix}$.

Entonces:

(A) $\dim \ker(T) = 1$ y $\dim Im(T) = 3$.
(B) $\ker(T) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}_3[x]}\}$ e $Im(T) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$.
(C) T es inyectiva pero no sobreyectiva.
(D) T es un isomorfismo.
(E) El polinomio $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x \in \ker(T)$.

7. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{4\times 4}$ tal que $\det(B^{-1}) = 3$.

Entonces, el determinante de $2AB^t$ es:

(A) 128.
(B) 16.
(C) 32.
(D) -16.
(E) -128.

8. Se consideran el plano $\pi : 2x + 2y + z + 1 = 0$, la recta r perpendicular a π que pasa por $P = (-1, 1, -1)$, y la recta t:

$$\begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 1, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$$

Entonces:

(A) El ángulo que forman las rectas r y t es $\frac{\pi}{4}$ y la recta d de ecuación

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

es ortogonal a r y a t.
(B) El ángulo que forman las rectas r y t es $\frac{\pi}{4}$ y la recta d de ecuación

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + z = -2 \end{cases}$$

es ortogonal a r y a t.
(C) El ángulo que forman las rectas r y t es $\frac{\pi}{3}$ y la recta d de ecuación

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

es ortogonal a r y a t.
(D) El ángulo que forman las rectas r y t es $\frac{\pi}{3}$ y la recta d de ecuación

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + z = -2 \end{cases}$$

es ortogonal a r y a t.
(E) Las rectas r y t no se intersectan.

9. Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces:

(A) $\mathrm{Rg}(A - 2B + C) = 2$ y $\mathrm{Rg}((A - B + 2C)B^t) = 2$.
(B) $\mathrm{Rg}(A - 2B + C) = 2$ y $\mathrm{Rg}((A - B + 2C)B^t) = 1$.
(C) $\mathrm{Rg}(A - 2B + C) = 1$ y $\mathrm{Rg}((A - B + 2C)B^t) = 2$.
(D) $\mathrm{Rg}(A - 2B + C) = 1$ y $\mathrm{Rg}((A - B + 2C)B^t) = 1$.
(E) $\mathrm{Rg}(A - 2B + C) = 3$ y $\mathrm{Rg}((A - B + 2C)B^t) = 2$.

10. Si u y v son vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $\|u\| = 4$, $\|v\| = 1$ y u y v son perpendiculares, entonces $\|u - 3v\|$ es igual a:
(A) 5.
(B) 12.
(C) $\sqrt{7}$.
(D) 25.
(E) 9.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	B	A	E	D	D	A	B	A	A

10.5.3. Examen: 11 Diciembre 2013.

Verdadero-falso.

1. Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es tal que $T(2,0) = T(1,1) = (2,1)$, entonces $(5,-5) \in \ker(T)$.
2. $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$. Los planos $\pi_1 : X = P_1 + \lambda v_1 + \mu v_2$ y $\pi_2 : X = P_2 + \lambda w_1 + \mu w_2$ son paralelos si y solo si v_1 es colineal con w_1 y v_2 es colineal con w_2.
3. El subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por las filas de A tiene dimensión 2, donde A es la matriz:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$
4. $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$. Si A y B son invertibles, entonces $A + B$ también es invertible.
5. Si una columna de $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ es igual a la suma de todas las demás, entonces $rango(A) < n$.
6. Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 4}$ sobreyectiva.
7. Si $U = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de un subespacio S y $w \notin S$, entonces $U \cup \{w\}$ es linealmente independiente.
8. $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Se cumple $u \cdot (v \wedge w) = -v \cdot (w \wedge u)$.

Múltiple opción.

1. Considere $T : V \to W$ una transformación lineal y los conjuntos $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ y $B = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\} \subset W$. Considere las afirmaciones:
   i) Si B es linealmente independiente, entonces A también lo es.
   ii) Si A genera V, entonces B genera $\mathrm{Im}(T)$.
   iii) Si A es linealmente independiente, entonces B también lo es.

   Entonces:

   (A) Sólo las afirmaciones ii) y iii) son verdaderas.
   (B) Sólo las afirmaciones i) y ii) son verdaderas.
   (C) Todas las afirmaciones son verdaderas.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde m es un parámetro real.

   Entonces:

   (A) $\text{rango}(A) < 3$ para todo $m \in \mathbb{R}$.
   (B) A es invertible si y solo si $m = 2$.
   (C) Existe un único valor de m para el cual $\text{rango}(A) = 1$ y existe un único valor de m para el cual $\text{rango}(A) = 2$.

3. Considere el conjunto $B = \{(1, 2, -2), (2, 1, -1), (3, 3, a^2)\}$, con $a \in \mathbb{R}$.

   Entonces:

   a) B no es una base de $\mathbb{R}^3$ para exactamente dos valores de a.
   b) B no es una base de $\mathbb{R}^3$ para exactamente un valor de a.
   c) B es una base de $\mathbb{R}^3$ para cualquier valor de a.

4. Considere $V = \mathbb{R}_3[x]$ y los subespacios $S1 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(-2) = 0\}$ y $S2 = [x^3 + 2, x^2 - 1, 2x + 1]$.

   Entonces:

   (A) $V = S_1 \oplus S_2$.
   (B) $V = S_1 + S_2$ y $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$.
   (C) $V = S_1 + S_2$ y $\dim(S_1 \cap S_2) = 2$.

5. Sea $S = [v_1, v_2, v_3, v_4] \subset \mathbb{R}^4$. Suponga que $\{v_1, v_2, v_4\}$ es un conjunto LI y que $v_3 = 2v_1 + v_2$.

   Entonces:

   (A) $\dim(S) = 2$ y $\{v_1, v_2\}$ es base de S.
   (B) $\dim(S) = 3$ y $\{v_2, v_3, v_4\}$ es base de S.
   (C) $\dim(S) = 3$ y $\{v_1, v_2, v_3\}$ es base de S.

6. Considere los siguientes subespacios de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times3}$: $S_1 = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times3} : A^t = A\}$ y $S_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & \alpha \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \right]$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Suponga que se cumple $S_1 \cap S_2 \neq \{0\}$.

Entonces:

(A) $\alpha = 1$.
(B) $\alpha = 2$.
(C) $\alpha = 0$.

7. Considere el sistema (S):

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ \lambda y + z = 2 \\ x + \lambda y + 2z = -1 \end{cases}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Entonces:

(A) (S) es compatible determinado si y solo si $\lambda = 2$.
(B) (S) es compatible determinado para todo λ.
(C) (S) es compatible indeterminado para $\lambda = 1$.

8. Considere la recta r que pasa por el punto (-1, 0, 1) y es perpendicular al plano $\pi : x+y+z = 0$. Considere además la recta s definida por las ecuaciones:

$$s : \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

Entonces:

(A) r y s no están contenidas en un mismo plano.
(B) El plano que contiene a r y s está definido por la ecuación: $-x + y = 1$.
(C) El plano que contiene a r y s está definido por la ecuación: $-y + z = 1$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8
V	F	V	F	V	F	V	F

1	2	3	4	5	6	7	8
B	C	C	C	B	A	C	A

10.6. Año 2014.

10.6.1. Examen: 1 Febrero 2014.

Verdadero-falso.

1. Si $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ es un generador de $\mathbb{R}^n$, entonces $\{w_1, w_2\}$ es linealmente independiente.
2. Sean A y B dos matrices $n \times n$. Si $A^2B = I$, entonces A es invertible.
3. Los únicos sistemas lineales con más ecuaciones que incógnitas que son compatibles son los sistemas homogéneos.
4. Existe $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineal tal que $\ker(T) = \operatorname{Im}(T)$.
5. Si A y B son dos matrices $n \times n$, entonces $\det(AB + A) = \det(BA + A)$.
6. Si A y B son dos matrices $n \times n$ invertibles, entonces $\operatorname{rango}(AB) = \operatorname{rango}(A)$.
7. Para todos $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple $\langle u \wedge \alpha v, w\rangle = \alpha\langle w, v \wedge u\rangle$.
8. Si A y B son dos bases de V, entonces existe una transformación lineal $T : V \to V$ tal que ${}_A(T)_B = I$.
9. Si A y B son dos matrices $n \times n$, entonces el conjunto $S = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = BX\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.
10. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ son dos conjuntos linealmente independientes en V, entonces $\{v_1+w_1, \ldots, v_n+w_n\}$ también es linealmente independiente.

Múltiple opción.

1. Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Se define el producto mixto como $[u, v, w] = u \cdot (v \wedge w)$. Considere las siguientes afirmaciones:
   i) $[u, v, w] = [v, w, u]$.
   ii) $[u, v, w] = -[v, u, w]$.
   iii) Si u, v, w son linealmente independientes, entonces $[u, v, w] = 0$.

   Entonces:

   (A) Las tres afirmaciones son verdaderas.
   (B) Sólo la afirmación ii) es verdadera.
   (C) Sólo las afirmaciones i) y iii) son verdaderas.
   (D) Sólo las afirmaciones i) y ii) son verdaderas.
   (E) Sólo la afirmación i) es verdadera.

2. Considere la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$$

Sea B la matriz que resulta de aplicar las siguientes transformaciones a la matriz A: primero se multiplica A por sí misma, luego se intercambia la segunda fila con la tercera y finalmente se multiplica la segunda columna por -2.

Entonces:

(A) $\det(B) = 24$.
(B) $\det(B) = 288$.
(C) $\det(B) = 0$.
(D) $\det(B) = -288$.
(E) $\det(B) = -24$.

3. Sea A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde a es un parámetro real.

Entonces:

(A) A es invertible salvo para dos valores de a.
(B) A es invertible salvo para un único valor de a.
(C) A no es invertible cualquiera sea el valor de a.
(D) A es invertible para todo valor de a.
(E) A es invertible salvo para tres valores de a.

4. Considere $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ definida por $T(p) = q$, con $q(t) = p(2t) + p(-2t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Entonces:

(A) T es un isomorfismo.
(B) T es sobreyectiva pero no inyectiva.
(C) $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 1$.
(D) $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 3$.
(E) $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 2$.

5. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & -1 & -10 & \alpha \end{pmatrix},$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Indique la opción correcta:

(A) $\operatorname{Rg}(A) = 3$ para infinitos valores de α.

(B) $\text{Rg}(A) = 4$ para un único valor de α.

(C) $\text{Rg}(A) = 4$ para todo valor de α.

(D) $\text{Rg}(A) = 3$ para todo valor de α.

(E) No corresponde el cálculo del rango porque A no es una matriz cuadrada.

6. Considere los planos $\pi_1 : x - 2y + 3z + 5 = 0$ y π_2:

$$\begin{cases} x = -2 + \lambda + 2\mu \\ y = -\lambda - 2\mu \\ z = -1 - \lambda + 3\mu \end{cases}$$

Entonces:

(A) π_1 y π_2 son perpendiculares.

(B) π_1 y π_2 son paralelos.

(C) $P = (-1, 2, 3) \in \pi_1 \cap \pi_2$.

(D) La recta r definida por

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$$

es la intersección de π_1 con π_2.

(E) Ninguna de las restantes afirmaciones es verdadera.

7. Considere los siguientes subespacios de $\mathbb{R}_2[x]$: $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(0) = 0\}$ y $S_2 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p'(0) + p(0) = 0\}$.

Entonces:

A) $\mathbb{R}_2[x] = S_1 \oplus S_2$.

B) $S_1 \cap S_2 = [t]$.

C) $S_1 \cap S_2 = S_2$.

D) $S_1 \cap S_2 = [t, t^2]$.

E) $\mathbb{R}_2[x] = S_1 + S_2$, pero la suma no es directa.

8. Considere una matriz $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$. También considere las siguientes afirmaciones:

i) A es invertible si y solo si A^2 también lo es.
ii) Las columnas de la matriz AA^t forman un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$.
iii) Si A es invertible, entonces $A - A^t$ también lo es.

Entonces:

(A) Todas las afirmaciones son verdaderas.

(B) Solo las afirmaciones i) y iii) son verdaderas.

(C) Solo las afirmaciones i) y ii) son verdaderas.

(D) Solo la afirmación i) es verdadera.

(E) Ninguna de las afirmaciones es verdadera.

9. Considere los subespacios $S_1 = [v_1, v_2]$ y $S_2 = [v_3 + v_4]$, donde $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$. Suponga que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es LI y que $\{v_1, v_2, v_4\}$ también es LI.

   Entonces:

   (A) $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

   (B) $\{v_1, v_2, v_3 + v_4\}$ es una base de $S_1 + S_2$.

   (C) $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $S_1 + S_2$.

   (D) $\{v_1, v_2\}$ es una base de $S_1 \cap S_2$.

   (E) Ninguna de las restantes afirmaciones es verdadera.

10. Considere $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times3} \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times3}$ definida por $T(A) = A + A^t$ para cada $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times3}$.

    Entonces:

    (A) $\dim(\ker(T)) = 0$.

    (B) $\dim(\ker(T)) = 4$.

    (C) $\dim(\ker(T)) = 2$.

    (D) $\dim(\ker(T)) = 3$.

    (E) $\dim(\ker(T)) = 1$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	V	F	V	V	V	F	V	V	F

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	B	A	E	C	D	E	D	E	D

10.6.2. Examen: 22 Julio 2014.

Verdadero-falso.

1. Si $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{4\times4}$ es una matriz tal que $\det(2A^2) = 0$, entonces el sistema $AX = 0$ es compatible determinado.

2. Sean $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ tales que $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(B) = n$. Entonces, $\mathrm{Rg}(AB) = n$.

3. Si $A, B, C \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ son matrices tales que $AB = AC$, entonces necesariamente $B = C$.

4. Sean $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times3}$ matrices tales que $\det(A) = \det(B) = 2$. Entonces, $\det(2A^tBA^{-1}) = 4$.

5. Sean $v, w \in \mathbb{R}^3$. Entonces, $v + w \perp v - w \Leftrightarrow ||v|| = ||w||$.

6. Si V es un espacio vectorial, B es una base de V, y S es un subespacio vectorial de V, entonces al intersectar B con S, se obtiene una base de S.

7. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, $A \subset V$ un conjunto linealmente independiente y $B \subset V$ un conjunto generador de V. Esto implica que $A \subseteq B$.

8. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y B una base de V. Sea $I : V \to V$ la transformación identidad. Entonces, la matriz ${}_B[I]_B$ asociada a I en la base B es la matriz identidad.

9. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y $A \subset V$ un generador finito de V. Entonces, existe una base B de V tal que $B \subset A$.

10. Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ son transformaciones lineales, no pueden ser isomorfismos, pero su composición $S \circ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sí puede serlo.

Múltiple opción.

11. Sean r:

$$\begin{cases} 3x - z = 0 \\ x - y = -3 \end{cases}$$

π:

$$\begin{cases} x = \mu \\ y = 3 - 3\lambda - \mu \\ z = \lambda \end{cases}$$

Indicar la opción correcta:

(A) La recta r está incluida en el plano π.

(B) La recta r es paralela al plano π.

(C) La recta r corta a π en un punto y el vector director de r es paralelo a $(1, -1, 0)$.

(D) La recta r es perpendicular al plano π.

(E) La recta r corta a π en un punto y el vector director de r es paralelo a $(1, 0, -1)$.

12. Sean u y v dos vectores en $\mathbb{R}^3$ tales que $u - v$ es perpendicular a u, $||v|| = 4$, y el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{6}$. Entonces, el área del paralelogramo formado por los vectores u y v es

(A) 2

(B) $2\sqrt{3}$

(C) $4\sqrt{3}$

(D) 12

(E) $\sqrt{3}$

(Se recuerda que el seno de $\frac{\pi}{6}$ es $\frac{1}{2}$.)

13. Se consideran los planos

$$\pi_1 : mx + y + 2z = 1 \quad \pi_2 : mx + my + 3z = 2 \quad \pi_3 : -mx - y + mz = m + 1$$

en donde $m \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Indicar la opción correcta:

(A) Para todo $m \in \mathbb{R}$, los tres planos tienen al menos un punto en común.
(B) Hay al menos dos valores de m para los cuales los tres planos no tienen puntos en común.
(C) Si los tres planos se intersecan entonces su intersección es una recta.
(D) Si los tres planos se intersecan entonces su intersección es un punto.
(E) Ninguna de las otras opciones es correcta.

14. Consideremos el espacio vectorial $V = \mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3. Sean $S_1 = \{p \in V : p(0) = p(1) = p(-1)\}$ y S_2 el subespacio de V generado por los polinomios $ax - x^2$ y $a^2 + ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Entonces:

(A) Para todo $a \in \mathbb{R}$, $\dim(S_2) = 2$ y $V = S_1 \oplus S_2$.
(B) Cuando $a \neq 0$, $\dim(S_2) = 2$ y $V = S_1 \oplus S_2$. Cuando $a = 0$, $\dim(S_2) = 1$ y $V = S_1 \oplus S_2$.
(C) Cuando $a = 0$, $V \neq S_1 \oplus S_2$.
(D) Cuando $a \neq 0$, $V = S_1 + S_2$ pero la suma no es directa. Cuando $a = 0$, $V \neq S_1 + S_2$.
(E) Para todo $a \in \mathbb{R}$, $V = S_1 + S_2$, pero la suma es directa solamente cuando $a = 0$.

15. Sea $V = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : A = A^t\}$. Entonces:

(A) $\dim(V) = 4$, y si $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base de V, entonces $\{v_1 - v_2, v_1 - v_3, v_1 - v_4, v_4\}$ también lo es.
(B) $\dim(V) = 4$, y si $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base de V, entonces $\{v_1 - v_2, v_1 - v_3, v_1 - v_4, v_3 - v_4\}$ también lo es.
(C) $\dim(V) = 3$, y si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de V, entonces $\{v_1 - v_2 + v_3, v_1, v_2 - v_3\}$ también lo es.
(D) $\dim(V) = 3$, y si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de V, entonces $\{v_1 - v_2 + v_3, v_1, v_2 + v_3, v_1 + v_2\}$ es un generador de V.
(E) $\dim(V) = 3$, y si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de V, entonces $\{v_1 - v_2 + v_3, v_1, v_2 + v_3\}$ es linealmente dependiente.

16. Sea $w \in \mathbb{R}^3$ un vector fijo no nulo, y consideremos $S = \{v \in \mathbb{R}^3 : v \wedge w = \mathbf{0}\}$ (donde $\wedge$ es el producto vectorial). Entonces:

(A) S no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
(B) S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 0.
(C) S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 1.
(D) S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2.
(E) S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, pero no es posible determinar su dimensión sin conocer w.

17. Sea $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tal que $T(M) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} M$.

Entonces:

(A) $\ker(T) = \{0\}$.

(B) $\dim(\ker(T)) = 1$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T)$.

(C) $\dim(\ker(T)) = 2$ y $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T)$.

(D) $\dim(\ker(T)) = 3$ y $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T)$.

(E) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \in \ker(T)$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T)$.

18. Considera $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathbb{R}_3[x]$ tal que:

$$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2x^3 + x^2 + 1,$$

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = x^3 + 2x^2,$$

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^3 + 1,$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Entonces:

(A) T es un isomorfismo.

(B) T es inyectiva pero no sobreyectiva.

(C) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$.

(D) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

(E) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \ker(T)$.

19. Sea V un espacio vectorial de dimensión 3 sobre $\mathbb{R}$. Consideremos $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V y $T : V \to V$ una transformación lineal que cumple:

$$2v_1 - v_2 \in \mathrm{N}(T)$$

$$T(v_1 + v_2 + v_3) = 2v_1 - 2v_3$$

$$T(-v_1 + v_2 + v_3) = 4v_2$$

Entonces, la matriz asociada a T en la base B es:

(A)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 6 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(B)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(C)
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

(D)
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -3 \\ \frac{-1}{2} & -1 & 6 \\ \frac{-1}{2} & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(E) No se puede calcular con la información dada.

20. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Consideremos las siguientes afirmaciones:
(I) Si $\ker(T) = 0$, entonces existe un subespacio W_0 de W tal que $T : V \to W_0$ es un isomorfismo.
(II) Si $\dim(W) > \dim(V)$, entonces T no puede ser sobreyectiva.
(III) Si $\dim(W) > \dim(V)$, entonces T no puede ser inyectiva.
(IV) Si $\dim(W) = \dim(V)$, entonces T es un isomorfismo.
Entonces:

(A) Solamente (I) y (II) son verdaderas.
(B) Solamente (I), (II) y (III) son verdaderas.
(C) Solamente (II) y (IV) son verdaderas.
(D) Solamente (I) y (III) son verdaderas.
(E) Solamente (III) y (IV) son verdaderas.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	V	F	F	V	F	F	V	V	V
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	C	E	C	D	C	C	C	A	A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	F	F	F	F	V	V	V	F	V
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	B	D	B	C	B	B	B	E	E

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	F	F	V	F	V	V	F	V	V
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	A	C	A	B	A	A	A	D	D

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	F	V	F	V	F	V	F	V	V
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	E	B	E	A	E	E	E	C	C

10.6.3. Examen: 11 Diciembre 2014.

Verdadero-falso.

1. Sean $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$. Si A^tB^2A tiene rango n, entonces A y B tienen rango n.

2. Sean V y W espacios vectoriales con $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$, y $T : V \to W$ una transformación lineal. Sean además A y B bases de V, y C una base de W. Entonces, existe una matriz $P \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ tal que ${}_C(T)_B = {}_C(T)_A P$ y ${}_C(T)_A = {}_C(T)_B P$.

3. Si $D : \mathbb{R}_{n+1}[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ es la transformación lineal definida por $D(p) = p'$ y $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n+1}[x]$ es la transformación definida por $T(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$, entonces $D \circ T = \text{id}$.

4. Si $u, v \in \mathbb{R}^3$ son dos vectores no nulos tales que $||u + v||^2 = 9||u||\,||v||$ y $||u - v||^2 = 7||u||\,||v||$, entonces u y v son ortogonales.

5. Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ con $\ker(T) = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(x) = -p(-x)\, \forall x \in \mathbb{R}\}$ e $Im(T) \subseteq \ker(T)$.

6. Existe $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ transformación lineal no nula tal que $T \circ T = 0$.

7. Si $\{u, v, w\} \subset V$ es linealmente independiente y $T : V \to V$ es una transformación lineal biyectiva, entonces $\{T(u) - T(v), T(v) - T(w), T(w) - T(u)\}$ es también linealmente independiente.

8. Sea V un espacio vectorial con $\dim(V) = 3$ y $T : V \to V$ una transformación lineal. Si existe $v \in V$ tal que $T(T(T(v))) = v$ y $\{v, T(v), T(T(v))\}$ es L.I., entonces T es biyectiva.

9. Si $T : V \to V$ es una transformación lineal inyectiva, entonces $S : V \to V \times V$ definida para todo $v \in V$ por $S(v) = (v, T(v))$ también es inyectiva.

Múltiple opción.

1. Dos matrices A y $B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ son semejantes cuando existe una matriz invertible $P \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ tal que $B = P^{-1}AP$. Supongamos que A y $B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ son semejantes y consideremos las siguientes afirmaciones:

   I) $\det(A) = \det(B)$.

   II) $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(B)$.

   III) $\text{traza}(A) = \text{traza}(B)$.

   Entonces:

(A) Sólo la afirmación I) es correcta.
(B) Sólo las afirmaciones II) y III) son correctas.
(C) Todas las afirmaciones I), II) y III) son correctas.

2. Sean las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2a-c & 2d-f & 2g-i \\ c & f & i \\ 3b & 3e & 3h \end{pmatrix}$$

Entonces:

(A) $\det(B) = 3\det(A)$.
(B) $\det(B) = 6\det(A)$.
(C) $\det(B) = -6\det(A)$.

3. Se considera la recta r definida por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = t+\alpha \\ z = \beta t + 3 \end{cases}$$

donde α y β son números reales. También se tiene el plano π definido por la ecuación $x+y+z=3$.

Indique para qué pares de valores de α y β se verifica que r es paralela a π pero no está contenida en ese plano:

(A) $\beta = -2$, α puede tomar cualquier valor real.
(B) $\beta = 2$, α no puede ser igual a -1.
(C) $\beta = -2$, α no puede ser igual a -1.

4. Sean V, W y U espacios vectoriales reales de dimensión finita, todos con la misma dimensión n. Consideremos dos transformaciones lineales $T : V \to W$ y $S : W \to U$. Indique la opción correcta:

(A) Si T es inyectiva y S es sobreyectiva, entonces la composición $S \circ T$ es biyectiva.
(B) Si T y S son inyectivas, entonces la composición $S \circ T$ es inyectiva pero no sobreyectiva.
(C) Si T y S son sobreyectivas, entonces la composición $S \circ T$ es sobreyectiva pero no inyectiva.

5. Sea V el espacio vectorial de todas las funciones de los números reales en los números reales. Sea V_p el subconjunto de V que contiene las funciones pares ($f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$), y sea V_i el subconjunto de V que contiene las funciones impares ($f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Entonces:

(A) V_p y V_i no son subespacios vectoriales de V.

(B) V_p y V_i son subespacios vectoriales de V con $V_p + V_i \neq V$ y $V_p \cap V_i = \{0\}$.
(C) V_p y V_i son subespacios vectoriales de V con $V_p \oplus V_i = V$.

6. Considere la recta s dada por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

y la recta r perpendicular al plano π definido por el sistema:

$$\begin{cases} x = 6 - 2\mu - 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2\mu \end{cases}$$

que pasa por el punto $P = (1,1,1)$. Entonces, ¿cuál es el ángulo que forman los vectores directores de s y r?

(A) $\frac{\pi}{4}$.
(B) $\frac{\pi}{2}$.
(C) 0.

7. Sean U, V, y W tres espacios vectoriales con bases respectivas $\{u_1, u_2\}$, $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, y $\{w_1, w_2, w_3\}$. Sean $T : U \to V$ y $S : V \to W$ dos transformaciones lineales tales que $\mathrm{Im}(T) \subset \ker(S)$. Suponga además que se cumple:
$S(v_1) = w_1$
$S(v_2) = w_1 + w_2$
$S(v_3) = w_1 - w_2$
$T(u_1) = v_4$
$T(u_2) = v_5$
Entonces:

(A) $\ker(S) = [2v_1 - v_2 - v_3, v_4, v_5]$.
(B) $\ker(S) = [-2v_1 + v_2 + v_3, v_4, v_5]$.
(C) $\ker(S) \supset [-2v_1 + v_2 + v_3, v_4, v_5]$, pero la inclusión es estricta.

8. Sean S_1 y S_2 los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_3[x]$ tales que: $S_1 = \left[x^3 + x, x - 1\right]$ y $S_2 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ \text{con } a = -d \text{ y } a = c\}$. Entonces:

(A) $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}_3[x]$.
(B) $S_1 \cap S_2 = \{0\}$, $S_1 + S_2 \neq \mathbb{R}_3[x]$.
(C) $S_1 \cap S_2 \neq \{0\}$, $S_1 + S_2 = \mathbb{R}_3[x]$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
V	F	V	F	F	V	F	V	V

1	2	3	4	5	6	7	8
C	C	C	A	C	B	B	A

10.7. Año 2015.

10.7.1. Examen: 31 Enero 2015.

Verdadero-falso.

1. Existen sistemas lineales de ecuaciones con más ecuaciones que incógnitas que son incompatibles.
2. Si $\{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^n$ es linealmente independiente, entonces también lo es $\{5u - v, 3w, w - v\}$.
3. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(ax^2 + bx + c) = (2a, b, 1)$. Entonces T es lineal.
4. Existe $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ sobreyectiva.
5. Los planos de ecuaciones $x + z = 1$ e $y + z = 1$ son perpendiculares.
6. Sean $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$. Si A y AB son invertibles, entonces B también es invertible.
7. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} d & e & 3f \\ 2a & 2b & 6c \\ g & h & 3i \end{pmatrix}$. Si $\det(A) = 5$, entonces $\det(B) = 30$.
8. Hay transformaciones lineales de $\mathbb{R}_3[x]$ en $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ que son inyectivas y otras que no lo son.
9. Sean V y W dos espacios vectoriales reales de dimensión finita, B una base de V y B_0 una base de W. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal invertible, entonces la matriz asociada a T en las bases B y B_0 es necesariamente una matriz invertible.

Múltiple opción.

1. Considere un espacio vectorial V con base $\{v_1, v_2, v_3\}$, y la transformación lineal $T : V \to V$ definida por:

$$T(v_1) = v_1 + v_2 - v_3, \quad T(v_2 + v_3) = -v_1 + 5v_2, \quad T(v_3) = v_1 + 2v_2 + 3v_3.$$

   Entonces:

   (A) $\dim(\mathrm{ket}(T)) = 2$.
   (B) $\dim(\mathrm{ket}(T)) = 1$.
   (C) $\dim(\mathrm{ket}(T)) = 0$.

2. Considere los siguientes subespacios, S_1 y S_2, de $\mathbb{R}_2[x]$:

$$S_1 = [x^2 + 1, 2x - 2, 3x^2 + x + 2], \quad S_2 = [2x^2 + x, 1].$$

   Indique la opción correcta:

   (A) $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.
   (B) $S_1 \cap S_2 = [2x^2 + x + 1]$.
   (C) $S_1 \cap S_2 = [x^2 + 2x - 1]$.

3. Una matriz cuadrada A se dice ortogonal si $A^t \cdot A = I$. Considere dos matrices cuadradas, A y B, del mismo tamaño, y considere las siguientes afirmaciones:
I) Si A y B son ortogonales, entonces $A + B$ es ortogonal.
II) Si A y B son ortogonales, entonces $A \cdot B$ es ortogonal.
III) Si A y $A \cdot B$ son ortogonales, entonces B es ortogonal.

   Entonces:

   (A) Sólo las afirmaciones I y II son correctas.
   (B) Sólo las afirmaciones II y III son correctas.
   (C) Sólo la afirmación III es correcta.

4. Considera $\mathbb{R}^4$ y los subespacios:
$T = [(0,0,1,1),(1,2,2,1)]$ y $S = [(1,1,0,1),(2,3,1,1)]$.
Entonces:

   (A) $S \oplus T = \mathbb{R}^4$.
   (B) $\dim(S+T) = 2$.
   (C) $\dim(S+T) = 3$.

5. Considere $T_i : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$, $i = 1,2$, dos transformaciones lineales definidas por:

$$T_1(p) = (p(0), p(1), 0) \text{ y } T_2(p) = (p(0), p(1), p(-1)),$$

   para cada $p \in \mathbb{R}_3[x]$.
   Indique la opción correcta:

   (A) $\ker(T_2) = [x^3 - x]$ y $\dim(\mathrm{Im}(T_1)) = 3$.
   (B) $\ker(T_2) = [x^3 - x]$, $\ker(T_1) = [x^3 - x, x^2 - x]$ y $\mathrm{Im}(T_1) \subset \mathrm{Im}(T_2)$.
   (C) $\ker(T_1) = [x^3 - x, x^2 - x]$ y $\dim(\ker(T_2)) = 2$.

6. Considere la recta r:

$$\begin{cases} y - az = 2 \\ ax + z = 1 \end{cases}$$

   donde $a \in \mathbb{R}$, y el plano π:

$$\begin{cases} x = 2 + 2\mu - \lambda \\ y = -1 + \mu \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

   Indique la opción correcta:

   (A) r es perpendicular a π exactamente para un valor de a.
   (B) r es perpendicular a π exactamente para dos valores de a.
   (C) r no es perpendicular a π para ningún valor de a.

7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal que satisface $T \circ T = I$. Considere las siguientes afirmaciones:
   I) T es biyectiva.
   II) $\ker(T + I) \oplus \ker(T - I) = V$.
   III) $\det(T) = 1$.

   Entonces:

   (A) Sólo las afirmaciones I y II son correctas.
   (B) Sólo la afirmación I es correcta.
   (C) Todas las afirmaciones son correctas.

8. Sean $B = \{1, 1 + x, 1 + x^2\}$ y $B_0 = \{(1, 0, 0), (1, 2, 0), (1, 2, 3)\}$ bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Considere la transformación lineal $T : P_2 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en las bases B y B_0 es

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Entonces:

   (A) $T(2 + x - x^2) = (-2, 2, 1)$.
   (B) $T(2 + x - x^2) = (0, 2, 2)$.
   (C) $T(2 + x - x^2) = (0, 2, -3)$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
V	V	F	F	F	V	F	V	V

1	2	3	4	5	6	7	8
C	B	B	C	B	C	A	C

10.7.2. Examen: 16 Julio 2015.

Verdadero-falso.

1. Sean π el plano de ecuación $x - y + z = 4$ y π_0 el plano de ecuación $(x, y, z) = (0, 0, 3) + \lambda(2, 0, -2) + \mu(1, 1, 0)$. Los planos π y π_0 son paralelos.

2. Sea r la recta de ecuación $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$. El punto de r más cercano al origen es (0, 0, 1).

3. Sean u y v vectores del espacio tales que:
   (i) El ángulo entre u y v es $\frac{\pi}{6}$.
   (ii) $v - u$ es perpendicular a u.
   (iii) $||v - u|| = 2$.
   Entonces $||v|| = 4$ y $||u|| = 2\sqrt{3}$.

4. Existe un sistema lineal homogéneo de 6 ecuaciones con 5 incógnitas que es incompatible.

5. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & 2a & a^2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 2 para exactamente dos valores de a en $\mathbb{R}$.

6. Sean A y B dos matrices de tamaño 3×3 con coeficientes reales, y B invertible. Si $\det(A) = 2$ y $\det(2A(B^{-1})) = 1$, entonces $\det(B) = 4$.

7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si $A \subset V$ es un conjunto linealmente independiente, entonces existe una base B de V que contiene a A.

8. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y S un subespacio vectorial de V. Si V y S tienen la misma dimensión, entonces $S = V$.

9. Sean V un espacio vectorial y S_1 y S_2 subespacios de V. Entonces $V = S_1 \oplus S_2$ si y solo si $V = S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$.

10. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo K. Sea $T : V \to W$ un isomorfismo. Entonces existen una base A de V y una base B de W de modo que la matriz asociada ${}_A[T]_B$ es la matriz identidad.

11. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que no es la transformación cero y que no es sobreyectiva. Entonces el núcleo de T tiene dimensión 2.

Múltiple opción.

1. Sean $Q = (1,1,0)$, $M = (1,1,1)$ y $L = (0,0,1)$ puntos en $\mathbb{R}^3$. Sea r la recta formada por los puntos P que cumplen que $d(P,Q) = d(P,M) = d(P,L)$. Entonces:

   (A) $d(M,r) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   (B) El vector $(1,1,0)$ es vector director de r.

   (C) $r : \begin{cases} x + y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$.

2. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con base $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal que:

$$ {}_B[T]_B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 2a & 0 & a+1 & a \end{pmatrix} $$

   con $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces:

   (A) Si $a, b > 0$, entonces T es un isomorfismo.

   (B) Si $a(b^2 - 1) = 0$, entonces $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$.

   (C) Si $b^2 - 1 = 0$ y $a < 0$, entonces $\dim \operatorname{Im}(T) = 3$.

3. Sea $B = \{(1, -1, a), (1, -a, 1), (a, 1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$, con $a \in \mathbb{R}$. Entonces:

   (A) B es una base de $\mathbb{R}^3$ para todo valor de a.

   (B) B es linealmente dependiente para exactamente tres valores de a.

   (C) B es generador de $\mathbb{R}^3$ para exactamente dos valores de a.

4. Sean $V_1 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) - p(1) = 0\}$ y $V_2 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = p(1) = p(-1) = 0\}$ dos subespacios de $\mathbb{R}_3[x]$. Entonces:

   (A) $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}_3[x]$.

   (B) $V_1 + V_2 = \mathbb{R}_3[x]$, pero la suma no es directa.

   (C) $V_1 + V_2$ no es directa y $\dim(V_1 + V_2) = 3$.

5. Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ la transformación lineal definida por:

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} a+c & b+3d \\ c & d \end{pmatrix}$$

   y sea $S : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ la transformación lineal definida por las condiciones:

$$S(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S(1+x) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S(x+x^2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S(x^2+x^3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Entonces:

   (A) $T + S$ es un isomorfismo.

   (B) T es un isomorfismo y S no lo es.

   (C) $\ker(T + S) = [1, x]$ e $Im(T + S) = [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}]$

6. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. Considere dos transformaciones lineales $T : V \times V \to V \times V$ y $S : V \times V \to V$. Indique la opción que necesariamente es verdadera.

   (A) $\dim(\ker(S \circ T)) \geq n$ y $\dim(\mathrm{Im}(T)) \geq n$.

   (B) $\dim(\ker(S \circ T)) \geq n$ y $\dim(N(S)) \geq n$.

   (C) $\dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(S)) = 2n$.

7. Consideremos los conjuntos $A = \{(2,1,0,0), (1,2,0,0), (0,0,2,1), (0,0,1,2)\} \subset \mathbb{R}^4$ y $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$. A es una base de $\mathbb{R}^4$ y B es una base de $\mathbb{R}^3$. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz asociada en las bases A y B es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

(A) $T(3,3,3,3) = (1,1,-1)$.
(B) $T(3,3,3,3) = (2,2,-1)$.
(C) $T(3,3,3,3) = (6,6,-3)$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
V	F	V	F	V	F	V	V	V	V	F

1	2	3	4	5	6	7
A	C	B	C	C	B	A

10.7.3. Examen: 11 Diciembre 2015.

Verdadero-falso.

1. Para todos los vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$:
$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \text{ si y solo si } u \cdot v = 0.$$

2. Para todas las matrices $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$:
$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B).$$

3. Para todos los subespacios $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}_4[x]]$ tales que $\dim(S_1) = 2$, $\dim(S_2) = 3$, y $S_1 + S_2 = \mathbb{R}_4[x]$, la suma $S_1 + S_2$ es directa.

4. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $L \subseteq V$ un conjunto linealmente independiente y $G \subseteq V$ un conjunto generador. Si $G \subseteq L$, entonces L y G son bases iguales.

5. Los planos $\pi : x + 2y + 3z = 5$ y $\pi_0 : (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(1,1,-1) + \mu(1,-1,2)$ son paralelos.

6. Sean $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{4\times 4}$. Si AB no es invertible, entonces A y B no son invertibles.

7. Si S_1 y $S_2 : V \to V$ son dos isomorfismos, entonces la transformación lineal $T : V \times V \to V \times V$ definida por $T(v_1, v_2) = (S_1(v_1), S_2(v_2))$ para todo $(v_1, v_2) \in V$ es un isomorfismo.

8. La distancia entre las dos rectas r y r_0 definidas por:
$$r : \begin{cases} x = z - 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad r_0 : (x,y,z) = (0,1,2) + \lambda(0,-1,2)$$
es $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

Múltiple opción

1. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión 4 con bases $A \subseteq V$ y $B \subseteq W$. Sea $T : V \to W$ la transformación lineal definida por la matriz ${}_B(T)_A$:

$$ {}_B(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} $$

Entonces:

(A) T no es ni inyectiva ni sobreyectiva.
(B) T es inyectiva pero no sobreyectiva.
(C) T es sobreyectiva pero no inyectiva.
(D) T es un isomorfismo.

2. Sean V y W dos espacios vectoriales, $T : V \to W$ una transformación lineal sobreyectiva. Dado un conjunto $A = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ cualquiera y escribiendo $B = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\} \subseteq W$, se consideran las cuatro afirmaciones siguientes:

I. Si A es L.I. entonces B es L.I.
II. Si B es L.I. entonces A es L.I.
III. Si A es generador entonces B es generador.
IV. Si B es generador entonces A es generador.

Entonces:

(A) I y III son verdaderas; II y IV son falsas.
(B) II y IV son verdaderas; I y III son falsas.
(C) I y IV son verdaderas; II y III son falsas.
(D) II y III son verdaderas; I y IV son falsas.

3. Sean dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$. Entonces:

(A) $(u + v) \wedge (u - v) = (u \wedge u) + (v \wedge v)$
(B) $(u + v) \wedge (u - v) = (u \wedge u) - (v \wedge v)$
(C) $(u + v) \wedge (u - v) = 2(u \wedge v)$
(D) $(u + v) \wedge (u - v) = -2(u \wedge v)$

4. Para todos los vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$:

(A) $(u \cdot v)^2 + ||u \wedge v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$
(B) $(u \cdot v)^2 + ||u \wedge v||^2 = ||u||^2 + 2(u \cdot v) + ||v||^2$
(C) $(u \cdot v)^2 + ||u \wedge v||^2 = ||u||^2||v||^2$
(D) $(u \cdot v)^2 + ||u \wedge v||^2 = 2||u||^2||v||^2$

5. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en las bases

$$A = \{(0,0,1,-1);(0,2,0,1);(1,0,0,0);(3,1,0,1)\}$$

y

$$B = \{(0,-3,1);(1,2,2);(0,1,0)\}$$

es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

(A) $T(2,-1,0,-1) = (5,26,3)$
(B) $T(2,-1,0,-1) = (-2,-2,1)$
(C) $T(2,-1,0,-1) = (5,14,9)$
(D) $T(2,-1,0,-1) = (-7,5,-5)$

6. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, consideramos la recta r definida como $(x,y,z) = (0,a,1) + \lambda(a,b,1)$ y el plano π definido por $x - y + z = 2$. Indicar para cuáles valores de $a, b \in \mathbb{R}$ la recta r es paralela a π pero no contenida en π.

(A) $b = a + 1,$ para cualquier a.
(B) $a \neq -1$ y $b = a + 1$.
(C) $a = 1$ y $b = -1$.
(D) $a \neq 1$ y $b = a + 1$.

7. Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(p) = (p(0), p(1), p(-1))$. Entonces:

(A) $\dim(\ker(T)) = 0$ y $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 4$.
(B) $\dim(\ker(T)) = 1$ y $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$.
(C) $\dim(\ker(T)) = 2$ y $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.
(D) $\dim(\ker(T)) = 3$ y $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$.

8. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz asociada en la base canónica C es

$${}_C(T)_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & k & -5 \\ k & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

Indicar para cuáles valores de $k \in \mathbb{R}$ se verifica simultáneamente $\ker(T) \neq \{0\}$ y $\ker(T) \subseteq Im(T)$:

(A) Para ningún valor de $k \in \mathbb{R}$.
(B) Solo para $k = 1$.
(C) Solo para $k = 3$.
(D) Para $k = 1$ o $k = 3$.

Desarrollo.

1. Sea V un espacio vectorial y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $T \circ T = T$. (Se dice que la transformación lineal T es una proyección.)

   (a) Demostrar que $v - T(v) \in \ker(T)$ para todo $v \in V$.

   (b) Demostrar que $\ker(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0_V\}$.

   (c) Deducir de (a) y (b) que $\ker(T) \oplus \mathrm{Im}(T) = V$.

2. Sea $n \geq 1$ fijado. Se escribe:

   $M_n^+ = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} : A^t = A\} \subseteq M_{n\times n}$ el subespacio de las matrices (cuadradas) simétricas.

   $M_n^- = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} : A^t = -A\} \subseteq \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ el subespacio de las matrices (cuadradas) antisimétricas.

   $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ la transformación lineal definida por $T(A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$ para todo $A \in M_{n\times n}$.

   (a) Demostrar que $T \circ T = T$.

   (b) Demostrar que $\ker(T) = M_n^-$.

   (c) Demostrar que $\mathrm{Im}(T) = M_n^+$.

   (d) Deducir que $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} = M_n^+ \oplus M_n^-$.

Solución.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8
V	F	V	V	F	F	V	F

1	2	3	4	5	6	7
D	D	D	C	C	B	B

Justificación.

Verdaero-falso.

1. Verdadero: Tenemos $\|u + v\|^2 = (u + v) \cdot (u + v) = \|u\|^2 + 2(u \cdot v) + \|v\|^2$, de modo que

$$ku + vk^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

   si y solo si $u \cdot v = 0$. (Observación: esta equivalencia es la formulación algebraica del teorema de Pitágoras.)

2. Falso: Solo tenemos $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

3. Verdadero: Por hipótesis, tenemos que $\dim(S_1 + S_2) = \dim(\mathbb{R}_4[x]) = 5$. Por otro lado,

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2) = 5 - \dim(S_1 \cap S_2)$$

   lo que implica que $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$. Luego, la suma $S_1 + S_2$ es directa.

4. Verdadero: Como L es linealmente independiente y G generador, tenemos $|L| \leq |G|$ y $|L| \leq \dim(V)$ (en particular, L es un conjunto finito). Pero como $G \subseteq L$, G también es finito y $|G| \leq |L|$, por lo que $|L| = |G|$ y finalmente $L = G$ (por inclusión, $G \subseteq L$). Luego, $L = G$ es una base.

5. Falso: El plano π tiene un vector normal $n = (1, 2, 3)$, mientras que el plano π_0 tiene un vector normal $n_0 = (1, 1, -1) \times (1, -1, 2) = (1, -3, -2)$. Los dos vectores n y n_0 no son colineales, por lo tanto, los planos π y π_0 no son paralelos.

6. Falso: Contraejemplo: $A = I$, $B = O$ ($AB = O$ no es invertible, pero A es invertible).

7. Verdadero: Demostremos que T es a la vez inyectiva y sobreyectiva:

   (Inyectividad) Sea un vector $(v_1, v_2) \in V \times V$ tal que $T(v_1, v_2) = (0_V, 0_V)$, es decir, tal que $(S_1(v_1), S_2(v_2)) = (0_V, 0_V)$ (por definición de T). Entonces, tenemos que $S_1(v_1) = 0_V$ y $S_2(v_2) = 0_V$. Y como las funciones S_1 y $S_2 : V \to V$ son inyectivas, tenemos que $v_1 = 0_V$ y $v_2 = 0_V$. Luego, $(v_1, v_2) = (0_V, 0_V) = 0_V \times V$.

   (Sobreyectividad) Sea un vector $(v_1, v_2) \in V \times V$. Como $S_1 : V \to V$ es sobreyectiva, existe $u_1 \in V$ tal que $S_1(u_1) = v_1$. Y como $S_2 : V \to V$ es sobreyectiva, existe $u_2 \in V$ tal que $S_2(u_2) = v_2$. Luego, tenemos que $T(u_1, u_2) = (S_1(u_1), S_2(u_2)) = (v_1, v_2)$.

8. Falso: Se verifica fácilmente que la recta r pasa por los puntos $A = (0, 0, 2)$ y $B = (1, 0, 3)$, de modo que tiene un vector director $v = (1, 0, 1)$. Además, la recta r_0 pasa por el punto $A_0 = (0, 1, 2)$ y tiene un vector director $v_0 = (0, -1, 2)$. Como los vectores directores v (de r) y v_0 (de r_0) no son colineales, la distancia entre las dos rectas está dada por:

$$d(r, r_0) = \frac{|\overrightarrow{AA_0} \cdot (v \times v_0)|}{\|v \times v_0\|} = \frac{|(0, 1, 0) \cdot (1, -2, -1)|}{\|(1, -2, -1)\|} = \frac{2}{\sqrt{6}} \neq \frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

Múltiple opción.

1. Opción D: Se verifica fácilmente (por escalonamiento) que la matriz ${}_B(T)_A$ tiene rango 4. Entonces, es invertible y el operador T es un isomorfismo.

2. Opción D: II y III son verdaderas, como resultado visto en el curso. I y IV son falsas: un contraejemplo que refuta ambas afirmaciones se obtiene tomando $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}$, $T(x, y, z) = x + y + z$ y $A = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0)\}$, de modo que $B = \{1, 1\}$. Es claro que A es linealmente independiente pero B no lo es. También es evidente que B genera $\mathbb{R}$, pero A no genera $\mathbb{R}^3$.

3. Opción D: En efecto, tenemos que

   $$(u+v)\wedge(u-v) = (u\wedge(u-v))+(v\wedge(u-v)) = (u\wedge u)-(u\wedge v)+(v\wedge u)-(v\wedge v) = -(u\wedge v)+(v\wedge u) = -2(u\wedge v)$$

   (Las tres otras opciones son falsas en general.)

4. Opción C: Sea θ el ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Tenemos que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cos(\theta)\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ y $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = |\sin(\theta)|\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$. Luego, tenemos que:

   $$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2 + \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 = \cos^2(\theta)\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 + \sin^2(\theta)\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 = (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2$$

5. Opción C: Sea $\mathbf{v} = (2, -1, 0, -1)$. Observamos que $\mathbf{v} = 5(1, 0, 0, 0) - (3, 1, 0, 1)$, lo que implica $\mathrm{coord}_A(\mathbf{v}) = (0, 0, 5, -1)$. Entonces, $\mathrm{coord}_B(T(\mathbf{v})) =_B (T)_A \cdot \mathrm{coord}_A(\mathbf{v}) = (-1, 5, 1)$. Luego:

   $$T(\mathbf{v}) = -(0, -3, 1) + 5(1, 2, 2) + (0, 1, 0) = (5, 14, 9).$$

6. Opción B: La recta r tiene vector director $\mathbf{v} = (a, b, 1)$ y el plano π tiene vector normal $n = (1, -1, 1)$. Entonces, la recta r es paralela al plano π cuando $v \cdot n = a - b + 1 = 0$, es decir, cuando $b = a + 1$. En el caso donde $b = a + 1$ (r es paralela a π), la recta r está contenida en π cuando $A = (0, a, 1) \in \pi$, es decir, cuando $-a + 1 = 2$, dicho de otra manera, cuando $a = -1$. Luego, la recta r es paralela a π y no contenida en π cuando $b = a + 1$ y $a \neq -1$.

7. Opción B: Para todo polinomio $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x]$ tenemos que $p(0) = a$, $p(1) = a+b+c+d$, y $p(-1) = a - b + c - d$. Entonces, tenemos las equivalencias:

$$T(p) = (p(0), p(1), p(-1)) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ a - b + c - d = 0 \end{cases}$$

Esto implica que:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -c \\ d = 0 \end{cases}$$

Así que $\ker(T) = \{cx - cx^2 : c \in \mathbb{R}\} = \{x - x^2\}$. Por lo tanto, tenemos que $\dim(\ker(T)) = 1$ y $\dim(Im(T)) = \dim(\mathbb{R}_3[x]) - \dim(\ker(T)) = 4 - 1 = 3$ (según el teorema de la dimensión).

8. Opción A: Determinemos el núcleo y la imagen de T. Para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tenemos que $T(x, y, z) = 0$ si y solo si:

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x + ky - 5z = 0 \\ kx + 2y - 8z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, llegamos a:

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + (k - 4)z = 0 \\ (-k^2 + 4k - 3)z = 0 \end{cases}$$

(por escalonamiento). Observando que $-k^2 + 4k - 3 = -(k - 1)(k - 3)$, se distinguen tres casos:

Caso donde $k \neq 1$ y $k \neq 3$. En este caso, el sistema anterior es compatible determinado (pues $-k^2+4k-3 \neq 0$), de tal modo que $\ker(T) = \{0\}$.

Caso $k = 1$. En este caso, el sistema anterior se reduce a las dos ecuaciones $x = 2z$ y $y = 3z$, de tal modo que $\ker(T) = \{(2z, 3z, z) : z \in \mathbb{R}\} = [(2, 3, 1)] \neq \{0\}$. Además, tenemos que $Im(T) = [(1, 1, 1), (0, 1, 2), (-2, -5, -8)] = [(1, 1, 1), (0, 1, 2)]$ (pues $(-2, -5, -8)$ es combinación de los otros dos). Se verifica fácilmente que $(2, 3, 1)$ no es combinación lineal de $(1, 1, 1), (0, 1, 2)$, de tal modo que $\ker(T) \nsubseteq Im(T)$.

Caso $k = 3$. En este caso, el sistema anterior se reduce a las dos ecuaciones $x = 2z$ y $y = z$, de tal modo que $\ker(T) = \{(2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = [(2, 1, 1)] \neq \{0\}$. Además, tenemos que $Im(T) = [(1, 1, 3), (0, 3, 2), (-2, -5, -8)] = [(1, 1, 3), (0, 3, 2)]$ (pues $(-2, -5, -8)$ es combinación de los otros dos). Se verifica fácilmente que $(2, 1, 1)$ no es combinación lineal de $(1, 1, 3), (0, 3, 2)$, de tal modo que $\ker(T) \nsubseteq Im(T)$.

Luego, en ningún caso tenemos $\ker(T) \neq \{0\}$ y $\ker(T) \subseteq Im(T)$.

Desarrollo.

1. a) Para todo $v \in V$, tenemos que $T(v - T(v)) = T(v) - T(T(v)) = T(v) - T(v) = \mathbf{0}$ (pues $T \circ T = T$ por hipótesis), entonces $v - T(v) \in \ker(T)$.

   b) Supongamos que $v \in \ker(T) \cap Im(T)$. Tenemos que $T(v) = \mathbf{0}$ (pues $v \in \ker(T)$) y $v = T(u)$ para algún $u \in V$ (pues $v \in Im(T)$). Como $T = T \circ T$, tenemos que $v = T(u) = T(T(u)) = T(v) = \mathbf{0}$. Luego, $\ker(T) \cap Im(T) = \{\mathbf{0}\}$.

   c) Para todo $v \in V$, tenemos la descomposición:

   $$v = (v - T(v)) + T(v) \in \ker(T) + Im(T),$$

   de tal modo que $V = \ker(T) + Im(T)$. Además, la suma es directa por b).

2. a) Para todo $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$, tenemos que $T(T(A)) = T\left(\frac{1}{2}(A + A^t)\right) = \frac{1}{2}T(A) + \frac{1}{2}T(A^t) = \frac{1}{4}(A + A^t) + \frac{1}{4}(A^t + A^{tt}) = \frac{1}{2}(A + A^t) = T(A)$ (pues $A^{tt} = A$). Luego, $T \circ T = T$.

   b) Para todo $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$, tenemos las equivalencias:

   $$A \in \ker(T) \Leftrightarrow T(A) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(A + A^t) = 0 \Leftrightarrow A^t = -A \Leftrightarrow A \in M_-^n.$$

   Luego, $\ker(T) = M_-^n$.

   c) ($\subset$): Sea $A = T(B) \in Im(T)$ (para algún $B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$). Tenemos $A^t = (T(B))^t = \frac{1}{2}(B^t + B^{tt}) = \frac{1}{2}(B^t + B) = T(B) = A$, luego $A \in M_+^n$.

   ($\supset$): Sea $A \in M_+^n$. Tenemos que $T(A) = \frac{1}{2}(A + A^t) = \frac{1}{2}(A + A) = \frac{1}{2} \cdot 2A = A$ (pues $A^t = A$). Esto implica que $A = T(A) \in Im(T)$.

   Luego, $Im(T) = M_+^n$.

   d) Según 1. c), tenemos $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} = \ker(T) \oplus Im(T) = M_-^n \oplus M_+^n$, por b) y c).

10.8. Año 2016.

10.8.1. Examen: Febrero 2016.

Verdadero-falso.

1. Sean A, B, $C \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$. Si $AB^tC^2 = \frac{1}{2}I$, entonces B es invertible.
2. Sean A, $B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$. Entonces el conjunto $S = \{X \in \mathbb{R}^n : A^2X = B^tX\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.
3. Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\ker(T) = \operatorname{Im}(T)$.
4. Sean u, $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $||u|| = 2\sqrt{3}$, $||v|| = 1$ y $||u + 2v|| = 4$. Entonces u es ortogonal a v.
5. Un sistema lineal homogéneo con m ecuaciones y n incógnitas tiene solución única si y solo si el rango de su matriz de coeficientes es igual a m.
6. Sean u, $v \in \mathbb{R}^3$. Si $||u|| = ||v|| = 2$, $u \cdot v \geq 0$ y $||u \times v|| = 2\sqrt{3}$, entonces $||u - v|| = 2$.
7. El conjunto $\{(0, k, -4), (-1, 1, k), (1, -2, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ es linealmente independiente si y solo si $k \neq 2$.
8. Toda matriz elemental tiene un determinante igual a 1.
9. La distancia del punto $(1, 0, 2)$ a la recta $r : \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y - z = -4 \end{cases}$ es $\sqrt{5}$.

Múltiple opción.

1. Sean las bases $A = \{(1, 0, 2), (0, 1, -2), (2, 3, -1)\}$ y $B = \{(2, -2, 1), (-2, 3, 2), (1, 0, 3)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por

$$ {}_B(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}. $$

   Si $v = (1, 0, 2)$, entonces:

   A) $T(v) = (0, 1, 3)$
   B) $T(v) = (1, 1, 0)$
   C) $T(v) = (-1, -9, 18)$
   D) $T(v) = (28, 39, -3)$
   E) $T(v) = (48, -19, 99)$

2. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita, $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V, y $T : V \to W$ una transformación lineal sobreyectiva. Se consideran los dos conjuntos:

$$ A = \{T(v_3), T(v_2) - 2T(v_1), T(v_2) + T(v_3)\} \subset W $$

$$ B = \{T(v_2), T(v_1) - T(v_3), T(v_3) + 3T(v_2), T(v_3) + T(v_2)\} \subset W. $$

   Entonces:

A) A es linealmente independiente y B es un generador de W.
B) A es una base de W y B es un generador de W.
C) A y B son generadores de W.
D) A y B son linealmente independientes.
E) Ninguna de las opciones anteriores se aplica.

3. Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^4$ la función definida por $T(p) = (p(0), p(1), p(2), p(3))$. Entonces:

(A) T es una transformación lineal inyectiva pero no sobreyectiva.
(B) T es una transformación lineal sobreyectiva pero no inyectiva.
(C) T es un isomorfismo.
(D) T es una transformación lineal ni inyectiva ni sobreyectiva.
(E) T no es una transformación lineal.

4. Sean $A, A_0 \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{m\times n}$ tales que A_0 es una forma escalerizada reducida de A. Se consideran las siguientes afirmaciones:
I. $\det(A) = \det(A_0)$
II. $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A_0)$
III. $\mathrm{traza}(A) = \mathrm{traza}(A_0)$
IV. $\ker(A) = \ker(A_0)$
Entonces:

(A) I, II, III y IV son verdaderas.
(B) II es verdadera; I, III y IV son falsas.
(C) I y II son verdaderas; III y IV son falsas.
(D) II y IV son verdaderas; I y III son falsas.
(E) IV es verdadera; I, II y III son falsas.

5. Dado un vector $w \in \mathbb{R}^3$ no nulo, se considera el conjunto $S = \{v \in \mathbb{R}^3 : v \cdot w = 0 \text{ y } v \times w = \mathbf{0}\}$. Entonces:

(A) S no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
(B) $S = \{\mathbf{0}\}$ (subespacio nulo de $\mathbb{R}^3$).
(C) S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 1.
(D) S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2.
(E) $S = \mathbb{R}^3$.

6. Sean la recta r:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

y el plano π:

$$\begin{cases} x = -\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = 1 - \mu \end{cases}$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Indicar la opción correcta:

(A) La recta r está incluida en el plano π.
(B) La recta r es paralela al plano π, y $d(r, \pi) = \sqrt{3}$.
(C) La recta r es paralela al plano π, y $d(r, \pi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
(D) La recta r corta al plano π en un punto, y es ortogonal a π.
(E) La recta r corta al plano π en un punto, pero no es ortogonal a π.

7. Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ la transformación lineal definida por $T(p) = p'$ para todo $p \in \mathbb{R}_3[x]$. Se consideran los dos subespacios S_1 y S_2 en $\mathbb{R}_3[x]$ definidos por $S_1 = \mathrm{Im}(T)$ y $S_2 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(0) = p'(0) = p''(0)\}$.

   Entonces:

   (A) $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}_3[x]$ (suma directa).
   (B) $S_1 + S_2 = \mathbb{R}_3[x]$, pero la suma no es directa.
   (C) La suma $S_1 + S_2$ es directa y $\dim(S_1 \oplus S_2) = 3$.
   (D) La suma $S_1 + S_2$ no es directa y $\dim(S_1 + S_2) = 3$.
   (E) La suma $S_1 + S_2$ no es directa y $\dim(S_1 + S_2) = 2$.

8. Dado $a, b \in \mathbb{R}$, se considera el sistema lineal S con 3 ecuaciones y 3 incógnitas dado por la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -a & a & b \end{array}\right)$$

   El conjunto solución del sistema S es una recta si y solo si:

   (A) $a^2 \neq 1$ (cualquier valor de b).
   (B) $a = 1$ o $a = -1$ (cualquier valor de b).
   (C) $a = 1$ y $b = 0$.
   (D) $a = -1$ (cualquier valor de b).
   (E) $a = -1$ y $b = 1$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
V	V	F	V	F	V	F	F	V

1	2	3	4	5	6	7	8
A	C	C	D	B	B	B	E

Justifiación.

Verdaero-falso.

1. Verdadero. En efecto, si $AB^tC^2 = \frac{1}{2}I$, entonces AB^tC^2 es invertible (pues $\frac{1}{2}I$ lo es), lo que implica que las tres matrices A, B y C son invertibles.

2. Verdadero. En efecto, tenemos que $S = \{X \in \mathbb{R}^n : (A^2 - B^t)X = 0\} = \text{Núcleo}(A^2 - B^t) \subseteq_{\text{esv}} \mathbb{R}^n$.

3. Falso. En efecto, si existiera tal transformación, tendríamos que $\dim(\ker(T)) = \dim(\text{Im}(T))$, de tal modo que $\dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = 2\dim(\ker(T)) = 3$ (teorema de las dimensiones). Esto es posible ya que 3 es impar.

4. Verdadero. Tenemos que $||u+2v||^2 = (u+2v)\cdot(u+2v) = ||u||^2+2(u\cdot 2v)+||2v||^2 = (2\sqrt{3})^2+(2)^2+4(u\cdot v) = 16+4(u\cdot v)$. Como $||u+2v||^2 = 4^2 = 16$, se deduce que $u\cdot v = 0$. Entonces u es ortogonal a v.

5. Falso. Sea $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo. Tal sistema tiene solución única si y solo si $\ker(A) = \{0\}$, es decir, si y solo si $\text{Rg}(A) = n$ (por el teorema de las dimensiones).

6. Verdadero. Sea $\alpha \in [0, \pi]$ el ángulo formado por los dos vectores u y v. Como $||u \wedge v|| = \sin\alpha\|u\|\|v\|$, tenemos que $\sin\alpha = \frac{||u\wedge v||}{\|u\|\|v\|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Por lo tanto, tenemos que $\alpha = \frac{\pi}{3}$ o $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Pero como $u\cdot v \geq 0$, tenemos que $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, entonces $\alpha = \frac{\pi}{3}$ $(= 60^\circ)$. Y como los vectores u y v tienen la misma norma $\|u\| = \|v\| = 2$, estos dos vectores forman un triángulo equilátero. Por lo tanto, el tercer lado del triángulo, representado por el vector $u - v$, tiene la misma norma: $\|u - v\| = 2$.

7. Falso. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ k & 1 & -2 \\ -4 & k & 0 \end{pmatrix}$ la matriz formada por los 3 vectores-columnas $(0, k, -4)$, $(-1, 1, k)$ y $(1, -2, 0)$. Como $\det(A) = k^2 - 4$, el conjunto $\{(0, k, -4), (-1, 1, k), (1, -2, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ es linealmente independiente si y solo si $k^2 - 4 \neq 0$, es decir: si y solo si $k \neq 2$ y $k \neq -2$.

8. Falso. Lo que es verdadero es que toda matriz elemental tiene determinante no nulo.

9. Verdadero. Se verifica fácilmente que la recta r pasa por el punto $A = (0, 3, 1)$ y está dirigida por el vector $u = (1, -1, 2)$. Tomando $P = (1, 0, 2)$, tenemos que $AP \wedge u = (1, -3, 1) \wedge (1, -1, 2) = (-5, -1, 2)$. Luego, la distancia de P a r es dada por:

$$d(P, r) = \frac{\|AP \wedge u\|}{\|u\|} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}.$$

Múltiple opción.

1. Opción A. Tenemos que $v = (1, 0, 2)$ (primer vector de la base A), de tal modo que $\text{coord}_A(v) = (1, 0, 0)$. Entonces: $\text{coord}_B(T(v)) =_B (T)_A \cdot \text{coord}_A(v) = (1, 1, 0)$. Luego: $T(v) = (2, -2, 1) + (-2, 3, 2) = (0, 1, 3)$.

2. Opción C. Como $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de V (es decir, $\dim(V) = 3$), se verifica fácilmente que:

   - $\{v_3, v_2 - 2v_1, v_2 + v_3\}$ es una base de V (es decir, es linealmente independiente y genera V).

   - $\{v_2, v_1 - v_3, v_3 + 3v_2, v_3 + v_2\}$ genera V, pero no es linealmente independiente.

   A través de la transformación lineal $T : V \to W$, se deduce que:

   - $A = \{T(v_3), T(v_2 - 2v_1), T(v_2 + v_3)\}$ es un generador de W (imagen de un generador por una transformación lineal sobreyectiva). En general, A no es linealmente independiente, pues T no es inyectiva.

- $B = \{T(v_2), T(v_1 - v_3), T(v_3 + 3v_2), T(v_3 + v_2)\}$ es un generador de W (misma razón que anteriormente).

Luego, A y B son generadores de W, y no se puede decir nada más.

3. Opción C. Sean $B = \{1, x, x^2, x^3\} \subset \mathbb{R}_3[x]$ y $C = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^4$ las bases canónicas de $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathbb{R}^4$, respectivamente. Tenemos:

$$T(1) = (1,1,1,1), \quad T(x) = (0,1,2,3), \quad T(x^2) = (0,1,4,9), \quad T(x^3) = (0,1,8,27).$$

De este modo, la matriz ${}_C(T)_B$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

Se verifica fácilmente (por escalerización) que la matriz ${}_C(T)_B$ tiene rango 4, por lo tanto, es invertible. Luego, la transformación lineal $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^4$ es un isomorfismo.

4. Opción D. El algoritmo de escalerización preserva el rango y el núcleo (el conjunto solución del sistema homogéneo asociado), pero en general, no preserva ni el determinante ni la traza (en el caso donde $n = m$).

5. Opción B. Para todo $v \in \mathbb{R}^3$, $v \cdot w = 0$ si y solo si v es ortogonal a w, mientras que $v \times w = \mathbf{0}$ si y solo si v es colineal a w. Como $w \neq \mathbf{0}$, el único vector que es ortogonal y colineal a w es el vector nulo $\mathbf{0}$. Por lo tanto, $S = \{\mathbf{0}\}$.

6. Opción B. Se verifica fácilmente que:

   - La recta r pasa por el punto $A = (1,0,3)$ y tiene el vector director $u = (1,-2,1)$. - El plano π pasa por el punto $B = (0,0,1)$ y tiene los vectores directores $u_1 = (-1,1,0)$ y $u_2 = (1,0,-1)$.

   Entonces, el vector normal del plano π es $n = u_2 \times u_1 = (1,1,1)$.

   Luego se observa que $u \times n = 0$: el vector director de la recta r es ortogonal al vector normal del plano π.

   Esto significa que r es paralela a π, posiblemente incluida en π. Por lo tanto, la distancia de r a π es dada por $d(r,\pi) = d(A,\pi) = |BA \cdot n|/\|n\|$. Calculando esto, obtenemos $d(r,\pi) = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

7. Opción B. Es claro que $S_1 = \mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}_2[x] \subset \mathbb{R}_3[x]$, ya que cualquier polinomio de grado igual o menor a 2 es la imagen de algún polinomio de grado igual o menor a 3 mediante el operador de derivación T. En particular, tenemos que $\dim(S_1) = 3$, y $\{1, x, x^2\}$ es una base de $(S_1$.

   Por otro lado, es obvio que $x^3 \in S_2$, por lo tanto, la suma $S_1 + S_2$ contiene los cuatro polinomios $1, x, x^2$ y x^3 (base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$), por lo que $S_1 + S_2 = \mathbb{R}_3[x]$. Sin embargo, la suma $S_1 + S_2$ no es directa, ya que el polinomio $p = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ (que no es nulo) pertenece tanto a S_1 (ya que es de grado ≤ 2) como a S_2 (ya que $p(0) = p'(0) = p''(0) = 1$).

8. Opción E. Por escalerización, obtenemos que:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -a & a & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & -a-1 & a+1 & b+1 \end{array}\right)$$

Se distinguen tres casos:

1. $a^2 \neq 1$ (es decir, $a \neq 1$ y $a \neq -1$). El sistema es compatible determinado y tiene una solución única.

2. $a = 1$. En este caso, el sistema tiene la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \end{array}\right)$$

Se distinguen dos subcasos: 2.1. $b \neq -1$. En este caso, el sistema es incompatible.

2.2. $b = -1$. En este caso, el sistema es compatible indeterminado y su conjunto solución es el plano $\pi : x + y - z = 1$.

3. $a = -1$. En este caso, el sistema tiene la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & b+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right)$$

De nuevo, se distinguen dos subcasos:

3.1. $b \neq 1$. En este caso, el sistema es incompatible.

3.2. $b = 1$. En este caso, el sistema es compatible indeterminado y su conjunto solución es la recta $r : x - y = 0, z = -1$.

Luego, el conjunto solución del sistema original es una recta solo en el último caso, donde $a = -1$ y $b = 1$.

10.9. Año 2017.

10.9.1. Examen: 04 Febrero 2017.

Múltiple opción.

1. Sean los planos π_1 y π_2, así como las rectas r, s, y t definidas de la siguiente manera:

   π_1:
$$\begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = -\lambda \\ z = -1 + \mu \end{cases}$$

   π_2:
$$2x - y + z = 1$$

   r:
$$\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -1 - 3\alpha \end{cases}$$

   s:
$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = -1 - \alpha \end{cases}$$

   t:
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y + z = 2 \end{cases}$$

   Entonces:

   (A) $\pi_1 \cap \pi_2 = r$.
   (B) $\pi_1 \cap \pi_2 = s$.
   (C) $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$.
   (D) π_1 coincide con π_2.
   (E) $\pi_1 \cap \pi_2 = t$.

2. Sean A y $B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ invertibles, tal que $B^2 = B$. Entonces, la matriz P definida como:

$$P = A^2(7B)^2A^{-1}$$

   cumple:

   (A) $\det(P) = 7$.
   (B) Puede ser $\det(P) = 7$ o $\det(P) = 0$, dependiendo de la matriz B.
   (C) $\det(P) = 7\det(A)$.

(D) $\det(P) = 7^2 \det(A)$.

(E) $\det(P) = 7^4 \det(A)$.

3. Sean A y $B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) $\text{traza}(AB) = \text{traza}(A) \cdot \text{traza}(B)$.

(II) A conmuta con todas las matrices 2×2 si y solo si A es múltiplo de la identidad.

(III) Si $\text{Rg}(A) = 2$, entonces existe $b \in \mathbb{R}^2$ tal que el sistema $A|b$ es compatible indeterminado.

Indicar la opción correcta:

A. Ninguna afirmación es verdadera.
B. Solamente (I) y (III) son verdaderas.
C. Solamente (II) es verdadera.
D. Solamente (I) y (II) son verdaderas.
E. Solamente (III) es verdadera.

4. Sean los subespacios vectoriales $W_1 = [(1,-3,2),(2,-4,1),(1,-5,5)] \subseteq \mathbb{R}^3$ y $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x + 2y + z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Indicar la opción correcta:

A. $B_1 = \{(1,-3,2),(2,-4,1),(1,-5,5)\}$ es una base de W_1 y $B_2 = \{(1,0,-4),(0,1,-2)\}$ es una base de W_2. Entonces no está definida la suma de $\text{coord}_{B_1}(w_1) + \text{coord}_{B_2}(w_2)$, $\forall w_1 \in W_1$ y $\forall w_2 \in W_2$.
B. $B_1 = \{(2,-8,7),(3,-7,3)\}$ es una base de W_1 y $B_2 = \{(1,1,-6),(1,-1,2)\}$ es una base de W_2. Entonces $\text{coord}_{B_1}(6,-16,9) + \text{coord}_{B_2}(0,1,-2) = \left(2, \frac{1}{2}\right)$.
C. Sean B_1 una base de W_1 y B_2 una base de W_2. Entonces no está definida la suma de $\text{coord}_{B_1}(w_1) + \text{coord}_{B_2}(w_2)$, $\forall w_1 \in W_1$ y $\forall w_2 \in W_2$, ya que W_1 y W_2 son dos subespacios vectoriales diferentes.
D. $B_1 = \{(2,-8,7),(2,-10,10)\}$ es una base de W_1 y $B_2 = \{(-1,1,2),(2,1,-10)\}$ es una base de W_2. Entonces $\text{coord}_{B_1}(6,-16,9) + \text{coord}_{B_2}(0,1,-2) = \left(-\frac{11}{3}, \frac{23}{3}\right)$.
E. $B_1 = \{(2,-6,4),(3,-13,12)\}$ es una base de W_1 y $B_2 = (1,0,-4),(3,3,-18)$ es una base de W_2. Entonces $\text{coord}_{B_1}(4,-12,8) + \text{coord}_{B_2}(0,1,-2) = \left(1, \frac{1}{3}\right)$.

5. Se consideran las siguientes afirmaciones:

a) Existen infinitas transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tales que $T(1,0,1) = (1,0,1)$, $T(1,1,1) = (1,1,1)$ y $T(0,2,0) = (0,2,0)$.

b) Si $n < m$ entonces no existe transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sobreyectiva.

c) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y bases A y B de $\mathbb{R}^2$ tales que

$$_A((T))_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

y

$$_B((T))_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Indicar la opción correcta:

A. Ninguna afirmación es verdadera.
B. Solamente I y III son verdaderas.
C. Solamente I es verdadera.
D. Solamente I y II son verdaderas.
E. Solamente III es verdadera.

Desarrollo.

1. Se consideran los vectores $u = (1, -1, 0)$, $v = (0, 1, -1)$ y $w = \alpha u - v$.
   a) Hallar el valor de α para que u y w sean ortogonales.
   b) Para $\alpha = 2$, hallar el ángulo que forman v y w.
2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A = (1, 1, 1)$, es paralela al plano $\pi : x - y + z = 3$, y corta a la recta s dada por:
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$
3. *a*) Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo k, con $\dim(V) = n$ y $T : V \to W$ una transformación lineal.
   1) Definir núcleo e imagen de T.
   2) En el caso que $\mathrm{N}(T) = \{0\}$, probar que $\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))$.

   b) Sean $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathbb{R}$ tal que $T(A) = \mathrm{traza}(A)$, y $S : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tal que
$${}_B(S)_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
   donde
$$B = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$
   y $A = \{x^2, x, 1 + x\}$.
   1) Hallar una base del núcleo y una base de la imagen de $T \circ S$.
   2) Mostrar que se cumple el teorema de las dimensiones para $T \circ S$.

Solución.

1	2	3	4	5
A	E	C	E	D

Ejercicio 1. u y w son ortogonales si y solo si $\langle w, u\rangle = 0$. Por lo tanto:
$$\langle w, u\rangle = \langle \alpha u - v, u\rangle = \alpha\langle u, u\rangle - \langle v, u\rangle = 0$$
Entonces, podemos resolver para α:
$$\alpha = \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle} = -\frac{1}{2}$$

Para $\alpha = 2$, resulta que $w = 2u - v = (2, -3, 1)$. Ahora, recordando que el ángulo entre dos vectores v y w está dado por la relación:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|} = -\frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{14}} = -\frac{2}{\sqrt{7}}$$

Por lo tanto, $\theta = 139°$.

Ejercicio 2 Como la recta r corta a s, entonces pasa por el punto $B = (1, 3, k)$.

Dado que pasa por $A = (1, 1, 1)$ y por $B = (1, 3, k)$, tiene como vector director $\overrightarrow{AB} = (0, 2, k - 1)$.

Al ser paralela al plano π, el vector $n = (1, -1, 1)$ es normal a π y ortogonal a $\overrightarrow{AB}$. Por lo tanto, tenemos $\overrightarrow{AB} \cdot n = 0$, de donde se deduce que $-2 + k - 1 = 0$, y por lo tanto $k = 3$ y $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 2)$.

Por lo tanto, r tiene como ecuación:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 3 (a.1) Ver teórico.

(a.2) En primer lugar, hallaremos la matriz asociada a la transformación T en las bases B y la base canónica de $\mathbb{R}$, la cual llamaremos C. De esta forma:

$${}_C(T)_B = (\text{traza}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{traza}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{traza}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{traza}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix})$$

Luego, podemos obtener la matriz asociada a la transformación $T \circ S : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ en las bases A y C como ${}_C(T \circ S)_A =_C (T)_B \cdot_B (S)_A$.

Así,

$${}_C(T \circ S)_A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b.1) **Núcleo:** Calculamos primero el núcleo de la matriz asociada:

$$3\alpha - \beta + 2\gamma = 0$$

$$\beta = 3\alpha + 2\gamma$$

Por lo tanto, una base del núcleo de la matriz asociada es:

$$\{(1, 3, 0), (0, 2, 1)\}$$

Recordando que estamos trabajando con la base A de $\mathbb{R}_2[x]$, para obtener una base del núcleo de la transformación, debemos aplicar la transformación coord_A^{-1}.

Finalmente, se obtiene $\{x^2 + 3x, 3x + 1\}$ como base del núcleo de la transformación $T \circ S$.

Imagen: A partir de la matriz asociada de $T \circ S$, vemos que el espacio generado por las columnas coincide con $\mathbb{R}$, por lo que claramente $Im(T \circ S) = \mathbb{R}$.

(b.2) A partir del teorema de las dimensiones y de los resultados anteriores, sabemos que:

$$\dim(\mathbb{R}_2[x]) = \dim(\ker(T \circ S)) + \dim(Im(T \circ S))$$

$$3 = 2 + 1.$$

10.9.2. Examen: 13 Julio 2017.

Múltiple opción.

1. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal sobreyectiva. Se consideran las siguientes afirmaciones:

   (I) $\dim(\ker)(T) = 0$

   (II) Existe una base B de V tal que $B((T))B$ no es invertible.

   (III) Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ también.

   Entonces:

   (A) Las tres afirmaciones son verdaderas.
   (B) Sólo las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.
   (C) Sólo la afirmación (III) es verdadera.
   (D) Sólo las afirmaciones (II) y (III) son verdaderas.
   (E) Sólo la afirmación (I) es verdadera.

2. Si

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -5,$$

   el valor del siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 3b & 6e & 9b + 3h \\ a & 2d & 3a + g \\ c & 2f & 3c + i \end{vmatrix}$$

   es:

   (A) 30
   (B) 90
   (C) -90
   (D) -30
   (E) 1

3. Sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

   (I) $\dim([v_1 + v_2, v_2]) = \dim([v_1, v_2])$.

   (II) $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente si y solo si $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_1 + v_3\}$ es linealmente independiente.

   (III) Si $v_1 = (\alpha, 1, 1)$, $v_2 = (2, 2\alpha, 2)$, $v_3 = (3, 3, 3\alpha)$, existe un único valor de α tal que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente.

   Entonces:

(A) Todas son verdaderas.
(B) Sólo (I) y (II) son verdaderas.
(C) Todas son falsas.
(D) Sólo (I) es verdadera.
(E) Sólo (I) y (III) son verdaderas.

4. Dados los siguientes conjuntos, con las respectivas operaciones habituales:
$S_1 = \{p \in \mathbb{R}_n[x] : p(x) = p(-x)\}$
$S_2 = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} : \det(A) \text{ es par}\}$
$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 0\}$
Entonces:

(A) Sólo S_1 es subespacio.
(B) Sólo S_1 y S_2 son subespacios.
(C) Sólo S_1 y S_3 son subespacios.
(D) Todos son subespacios.
(E) Sólo S_3 es subespacio.

5. Unas ecuaciones de la recta r que pasa por $P = (2, 0, -1)$, corta a la recta s definida por:

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

y cuya dirección es ortogonal a la dirección de la recta t definida por:

$$\begin{cases} x + y = -4 \\ y - z = -3 \end{cases}$$

son:

(A) $\begin{cases} x - y - z = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x + y = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x - y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

(E) $\begin{cases} x - z = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$

6. Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$, con matriz asociada:

$$_B((T))_A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Siendo $A = \{1, x, 1 + x^2\}$ y $B = \{(2, 1), (1, 3)\}$. Entonces se cumple:

(A) $T(ax^2 + bx + c) = (a + b, c)$
(B) $T(ax^2 + bx + c) = (a + 2b, -c)$
(C) $T(ax^2 + bx + c) = (a - 3b, 2c)$
(D) $T(ax^2 + bx + c) = (a - b, -c)$
(E) $T(ax^2 + bx + c) = (2a + b, 2c)$

Desarrollo.

7. *a*) Sean $T : V \to W$ y $S : V \to W$ dos transformaciones lineales que cumplen $S(v_i) = T(v_i)$ para todo $i = 1, \dots, n$, siendo $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Probar que $S(v) = T(v)$ para todo $v \in V$.

   b) Sean $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V, $w_1, \dots, w_n$ vectores arbitrarios en W. Probar que existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

   c) Se consideran los subespacios $S = [(1, 1, 1)] \subset \mathbb{R}^3$ y $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$. ¿Existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tal que $\ker(T) = S$ e $\mathrm{Im}(T) = U$? Justificar su respuesta.

8. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y S_1 y S_2 dos subespacios de V.

   a) Pruebe que $V = S_1 \oplus S_2$ si y solo si $V = S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

   b) En el espacio vectorial $V = \mathbb{R}_3[x]$, se consideran los subespacios $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(0) = p(1) = 0\}$ y $S_2 = \left[x^3 - x^2, x + 1\right]$. Halle $S_1 \cap S_2$. ¿Es $\mathbb{R}_3[x] = S_1 \oplus S_2$?

Solución.

1	2	3	4	5	6
B	A	B	C	D	A

1. Ejercicio 7

   a) Ver teórico.

   b) Ver teórico.

   c) Se consideran los subespacios $S = [(1, 1, 1)] \subseteq \mathbb{R}^3$ y $U = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$.

   ¿Existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}$ tal que $\ker(T) = S$ e $\mathrm{Im}(T) = U$? Justificar su respuesta.

   No. Si consideramos la base $A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y el conjunto de vectores

$$\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$

entonces:

Existe una transformación lineal $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tal que

$$T_1(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T_1(1,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T_1(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Existe una transformación lineal $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tal que

$$T_2(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T_2(1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, T_2(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se verifica que $\ker(T_1) = \ker(T_2) = S$ y $\mathrm{Im}(T_1) = \mathrm{Im}(T_2) = U$, pero sin embargo $T_1 \neq T_2$.

8 Parte a: Ver Teórico.

Parte b: En el espacio vectorial $V = \mathbb{R}_3[x]$, se consideran los subespacios $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(0) = p(1) = 0\}$ y $S_2 = [x^3 - x^2, x+1]$. Encuentre $S_1 \cap S_2$. ¿Es $\mathbb{R}_2[x] = S_1 \oplus S_2$?

Si $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in S_1$, entonces, al ser $p(0) = p(1) = 0$, se tiene:

$$d = 0$$

$$a + b + c + d = 0$$

Por lo cual, $c = -b - a$ y $d = 0$, y $p(x) = a(x^3 - x) + b(x^2 - x)$.

Si $p(x) \in S_2$, entonces existen α y β en $\mathbb{R}$ tales que $p(x) = \alpha(x^3 - x^2) + \beta(x+1)$. Por lo tanto, si $p(x) \in S_1 \cap S_2$, entonces existen a, b, α, y β en $\mathbb{R}$ tales que:

$$a(x^3 - x) + b(x^2 - x) = \alpha(x^3 - x^2) + \beta(x+1)$$

Recordando que dos polinomios son iguales si y solo si coinciden sus coeficientes, se deduce que necesariamente $\beta = 0$, y por lo tanto:

$$ax^3 + bx^2 + (-a-b)x = \alpha x^3 - \alpha x^2.$$

Usando nuevamente el mismo argumento, $a = -b = \alpha$. Por lo cual, $p(x) = a(x^3 - x^2)$ con $a \in \mathbb{R}$, y entonces $S_1 \cap S_2 = [x^3 - x^2]$.

$\mathbb{R}_3[x]$ no es la suma directa de $S_1 \oplus S_2$, ya que, como se mostró en la parte anterior, $S_1 \cap S_2 \neq \{0\}$.

10.9.3. Examen: 06 Diciembre 2017.

Múltiple opción.

1. Dados los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}_n[x]$:

   $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_n[x] : p(1) = p(2) = \ldots = p(n-1) = 0\}$

   $S_2 = \{p \in \mathbb{R}_n[x] : p_0(x) = 0\}$

   $S_3 = \{p \in \mathbb{R}_n[x] : p(x) = 0 \text{ para todo } x \text{ o } p \text{ tiene exactamente dos raíces reales distintas}\}$

   Indique la opción correcta:

   (A) Solo S_1 es un subespacio.
   (B) Solo S_2 es un subespacio.
   (C) Solo S_1 y S_2 son subespacios.
   (D) Todos son subespacios.
   (E) Solo S_2 y S_3 son subespacios.

2. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo K. Sean $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ y $D = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \subseteq W$. Considere las siguientes afirmaciones:

   (I) Si B es linealmente independiente, entonces existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

   (II) Si B genera V, entonces existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

   (III) Si B genera V y D genera W, entonces existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

   Indique la opción correcta:

   (A) Sólo la afirmación (I) es correcta.
   (B) Sólo la afirmación (III) es correcta.
   (C) Sólo las afirmaciones (I) y (III) son correctas.
   (D) Sólo las afirmaciones (II) y (III) son correctas.
   (E) Ninguna de las afirmaciones es correcta.

3. Sea S un subespacio de V y $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de S. Sean $C = \{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1\}$ y $B = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

   (I) C y B son bases de S.

   (II) C genera un subespacio de S de dimensión 2.

   (III) B es un conjunto linealmente dependiente.

   Indique la opción correcta:

   (A) Solamente (II) es verdadera.
   (B) Solamente (I) es verdadera.
   (C) Solamente (III) es verdadera.

(D) Solamente (II) y (III) son verdaderas.
(E) Ninguna de las tres opciones es verdadera.

4. Sea A una matriz con entradas reales de tamaño $n \times n$ tal que $\det(A) = 0$ y sea b un vector en $\mathbb{R}^n$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) Existen vectores b para los cuales el sistema $Ax = b$ es incompatible.

(II) Existen vectores b para los cuales el sistema $Ax = b$ es compatible determinado.

(III) Para $b = 0$, el sistema es compatible indeterminado.

Entonces:

(A) Sólo las afirmaciones (I) y (III) son correctas.
(B) Sólo la afirmación (III) es correcta.
(C) Sólo las afirmaciones (I) y (II) son correctas.
(D) Sólo las afirmaciones (II) y (III) son correctas.
(E) Todas son correctas.

5. Siendo $T : V \to W$ una transformación lineal. Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) Si $u, v, w \in V$ son tales que $T(w) = T(u) + T(v)$, entonces $w = u + v$.

(II) Si $u \in V$ es tal que $T(u) = 0$, entonces $u = 0$.

(III) Si $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 0 \Rightarrow T(v) = 0 \, \forall v \in V$.

Entonces:

(A) Sólo la afirmación (I) es verdadera.
(B) Sólo las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.
(C) Sólo las afirmaciones (II) y (III) son verdaderas.
(D) Sólo la afirmación (III) es verdadera.
(E) Son todas falsas.

6. Se considera el plano α de ecuación $\alpha : x + y + 2z = 1$ y el plano β que pasa por los puntos A = (1, 1, 3), B = (1, 0, 2), C = (0, -3, 0). Sea r = $\alpha \cap \beta$.

Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) La recta que pasa por (1, 1, 2) y es paralela a r es $t : (x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda(3, 1, -2)$.

(II) El ángulo entre r y $s : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \mu(0, 0, 1)$ es $\frac{\pi}{3}$.

(III) La distancia del punto $(1, 0, 1)$ a r es $\sqrt{\dfrac{13}{7}}$.

Elija la opción correcta:

(A) Sólo la afirmación (I) es verdadera.
(B) Sólo las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.
(C) Sólo (III) es verdadera.
(D) Sólo las afirmaciones (I) y (II) son verdaderas.
(E) Las tres afirmaciones son verdaderas.

Desarrollo.

Ejercicio 7

1. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Definir el núcleo de T y probar que es un subespacio vectorial.

2. Si $T : \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}^3$ está definida por $B_((T))_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, donde $A = \{x^2 + x, x - 1, 1\}$ y $B = \{(1,0,1),(1,1,1),(0,0,1)\}$.

a) Hallar la expresión de $T(p)$ para todo $p \in \mathbb{R}_2[x]$.

b) Hallar el núcleo de T.

Ejercicio 8. Dado V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. S_1 y S_2 son subespacios de V.

1. Definir $S_1 + S_2$ y definir cuándo la suma de S_1 y S_2 es directa.

2. Si $V = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$, $S_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$, $S_2 = \{\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}$,

a) Hallar bases y la dimensión de S_1 y S_2.

b) Investigar si $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} = S_1 \oplus S_2$.

Solución.

1	2	3	4	5	6
C	E	A	A	D	B

Ejercicio 7.1: Ver Téorico

Ejercicio 7.2.a: Sea $T(ax^2 + bx + c) = (2b + 2c, b + c, a + b + 2c)$.
Coordenadas en la base A de $ax^2 + bx + c$ son $(a, b - a, -a + b + c)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b - a \\ -a + b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + c \\ b + c \\ a - b \end{pmatrix}$$

y

$$(2b + 2c, b + c, a + b + 2c) = (c + b)(1,0,1) + (c + b)(1,1,1) + (a - b)(0,0,1).$$

Ejercicio 7.2.b: $\ker(T)$: $a = -c$, $b = -c$, por lo tanto $\ker(T) = \{-cx^2 - cx + c, c \in \mathbb{R}\} = [x^2 + x - 1]$.

Ejercicio 8.1: Ver teórico.

Ejercicio 8.2.a: Como el conjunto

$$\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$$

es linealmente independiente y además genera S_1, entonces es una base y $\dim(S_1) = 2$.

Por otro lado

$$\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y además

$$\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

son linealmente independientes, entonces una base de S_2 es el conjunto

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y su dimensión es 2.

Ejercicio 8.2.b: Es claro que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por tanto $S_1 \cap S_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ y entonces la suma no es directa. Otra forma es ver que $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \neq S_1 + S_2$, por ejemplo la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin S_1 + S_2.$$

10.10. Año 2018.

10.10.1. Examen: 03 Febrero 2018.

Múltiple opción.

1. Sean $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ y $T : V \to V$ una transformación lineal. Se consideran las afirmaciones:
   (I) $\ker(T) \subseteq \ker(T^2)$.
   (II) $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathrm{Im}(T^2)$.
   (III) ${}_A(T^2)_A = ({}_A(T)_A)^2$.

   Entonces:

   (A) Solo (I) es verdadera.
   (B) Solo (III) es verdadera.
   (C) Solo (I) y (III) son verdaderas.
   (D) Ninguna de las tres afirmaciones es verdadera.
   (E) Las tres afirmaciones son verdaderas.

2. Se consideran las rectas r:
$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$
   y s:
$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ -x + z - 1 = 0 \end{cases}$$
   Se consideran las siguientes afirmaciones:
   (I) Las rectas r y s son ortogonales.
   (II) La recta t:
$$\begin{cases} x = -1 + \beta \\ y = -1 \\ z = 1 - \beta \end{cases}$$
   es ortogonal a r y a s.
   (III) $t \cap r = \emptyset$ y $t \cap s \neq \emptyset$ siendo t la recta de la afirmación anterior.

   Entonces:

   (A) Ninguna afirmación es verdadera.
   (B) Solamente las afirmaciones (I) y (II) son verdaderas.
   (C) Solamente las afirmaciones (II) y (III) son verdaderas.
   (D) Solamente la afirmación (II) es verdadera.
   (E) Solamente la afirmación (III) es verdadera.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ \alpha & -1 & \alpha & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

   Entonces:

   (A) $\mathrm{Rg}(A) = 2$ solo para $\alpha = 1$.
   (B) $\mathrm{Rg}(A) = 2$ solo para $\alpha = -1$.
   (C) Existen infinitos valores de α para los cuales $\mathrm{Rg}(A) = 2$.
   (D) Las filas de A son linealmente dependientes para infinitos valores de α.
   (E) Las columnas de A son linealmente independientes para algún valor de α.

4. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2f+2d & f+1 \\ c & f \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ f & 1 \end{pmatrix}$. Se sabe que $\det(AC) = -40$ y que $d = 8 + 2c$. Entonces, $\det(B)$ es:

   (A) 32.
   (B) -32.
   (C) -4.
   (D) 4.
   (E) 8.

5. Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada es ${}_B(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, siendo $A = \{x^2, x, 1\}$ y $B = \{(1,1), (1,0)\}$. Entonces $T(x^2 + 2x + 3)$ es igual a:

   (A) $(0, 3)$.
   (B) $(6, 12)$.
   (C) $(1, 2)$.
   (D) $(3, 6)$.
   (E) $(3, 3)$.

6. Dados los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n[x]$:
   $S_1 = \{p \in \mathbb{R}^n[x] : p(1) + p(2) = 0\}$.
   $S_2 = \{p \in \mathbb{R}^n[x] : p(1) > p(2)\}$.
   $S_3 = \{p \in \mathbb{R}^n[x] : p(1)p(2) = 0\}$.
   Entonces,

   (A) Sólo S_2 es subespacio vectorial de $\mathbb{R}_n[x]$.
   (B) Sólo S_1 es subespacio vectorial de $\mathbb{R}_n[x]$.
   (C) Sólo S_1 y S_3 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_n[x]$.
   (D) Sólo S_2 y S_3 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_n[x]$.
   (E) Los tres conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_n[x]$.

Desarrollo.

Ejercicio 7

a) Sean V y W dos K-espacios vectoriales, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V, y $w_1, w_2, \ldots, w_n \in W$. Probar que existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. **(Aclaración:** Debe demostrarse la existencia, que T es una transformación lineal y la unicidad.)

b) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $T(1,1,0) = (2,0,1)$, $T(1,0,1) = (2,2,2)$ y $T(1,1,1) = (3,1,2)$.

1) Probar que existe una única T que satisface estas condiciones y encontrar $T(x,y,z)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
2) Encontrar $\ker(T)$, interpretar geométricamente y encontrar su ecuación paramétrica.
3) Encontrar $\mathrm{Im}(T)$, interpretar geométricamente y encontrar su ecuación paramétrica.

Ejercicio 8

a) Sean S_1 y $S_2 \subseteq \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tales que $S_1 = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : A \text{ es antisimétrica}\}$ y $S_2 = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} : \text{traza}(A) = 0\}$.

1) Encontrar una base y la dimensión de S_1 y S_2. Justificar.
2) Determinar si $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} = S_1 \oplus S_2$. Justificar.

Solución.

1	2	3	4	5	6
C	D	A	B	D	B

7.a Ver Teórico.

7.b.1 La transformación lineal T definida como $T(x,y,z) = (x+y+z, x-y+z, x+z)$.

7.b.2 El núcleo de T, es la recta de dirección $(1,0,-1)$ que pasa por el origen. Su ecuación paramétrica es entonces $(x,y,z) = \lambda(1,0,-1)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

7.b.3 Por el teorema de las dimensiones, el conjunto imagen de T, denotado como $Im(T)$, tiene dimensión y es un subespacio generado por los vectores $(2,0,1)$, $(2,2,2)$ y $(3,1,2)$. Como $(3,1,2) = (2,0,1) + \frac{1}{2}(2,2,2)$, se deduce que una base para $Im(T)$ es $\{(2,0,1),(2,2,2)\}$. Por lo tanto, $Im(T)$ es el plano que pasa por el origen y tiene vectores de dirección $(2,0,1)$ y $(2,2,2)$. Su ecuación paramétrica es $(x,y,z) = \mu(2,0,1) + \nu(2,2,2)$ con $\mu, \nu \in \mathbb{R}$.

8.1 Podemos reescribir los subespacios S_1 y S_2 de la siguiente manera:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} b & c \\ d & -b \end{pmatrix} : b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Luego, la dimensión de S_1 es 1, con una base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, y la dimensión de S_2 es 3, con una base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

8.2 Finalmente, como S_1 es un subconjunto de S_2, tenemos que $S_1 \cap S_2 = S_1$. Por lo tanto, $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ no es la suma directa de S_1 y S_2.

10.10.2. Examen: 5 Diciembre 2018.

Múltiple opción.

1. Sea $A = \{(1,1,1),(1,2,3),(0,2,4),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

   Entonces:

   (A) Existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1,1) = (2,3)$, $T(1,2,3) = (1,0)$, $T(0,2,4) = (1,0)$, $T(0,0,1) = (1,1)$.

   (B) Existen infinitas transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tales que $T(1,1,1) = (2,3)$, $T(1,2,3) = (1,0)$, $T(0,2,4) = (-2,-6)$.

   (C) Existen infinitas transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tales que $T(1,1,1) = (0,3)$, $T(1,2,3) = (1,0)$, $T(0,2,4) = (-2,-6)$, $T(0,0,1) = (1,2)$.

   (D) Existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1,1) = (0,3)$, $T(1,2,3) = (1,0)$, $T(0,2,4) = (2,-6)$, $T(0,0,1) = (1,2)$, y cumple $T(2,3,0) = (0,1)$.

   (E) No existe ninguna transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1,1) = (2,3)$, $T(1,2,3) = (1,0)$, $T(0,2,4) = (-2,-6)$.

2. Sean $V = \mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3 y el subespacio vectorial S definido como $S = [x^3 + 2x + 1, x^3 + x^2, 3x^2 - 1]$. Entonces $ax^3 + bx^2 + cx + d \in S$ si y solo si:

   (A) $2a + b + c + d = 0$

   (B) $b = c = 0$

   (C) $-2a + b - c + d = 0$

   (D) $b = d = 0$

   (E) $-a + b - c + 3d = 0$

3. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(ax^2 + bx + c) = (\lambda a, a + \lambda b + c, a + b + \lambda c)$$

   siendo λ un número real. Entonces:

   (A) T nunca es invertible.

   (B) T es invertible $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

   (C) T es invertible $\Leftrightarrow \lambda \neq 0$.

   (D) T es invertible $\Leftrightarrow \lambda \neq 1$.

   (E) T es invertible $\Leftrightarrow \lambda \notin \{-1,0,1\}$.

4. Sean V un espacio vectorial y $T, S : V \to V$ dos transformaciones lineales. Se consideran las afirmaciones:

   (I) $\mathrm{Im}(T \circ T) \subset \mathrm{Im}(T)$.

   (II) $\ker(T) \cap \ker(S) \subset \ker(T + S)$.

(III) $\ker(T) \cap \ker(S) = \ker(T+S)$.

Entonces:

(A) Solamente (I) es verdadera.
(B) Solamente (II) es verdadera.
(C) Solamente (I) y (II) son verdaderas.
(D) Solamente (II) y (III) son verdaderas.
(E) Las 3 afirmaciones son verdaderas.

5. Sea π el plano de ecuación reducida $\pi : x + 2y + 2z = 3$. Considera la familia de rectas r_α de ecuación paramétrica:

$$r_\alpha = \begin{cases} x &= 1 + \lambda\alpha^2 \\ y &= 0 + \lambda(\alpha + 1) \\ z &= 1 + \lambda(2) \end{cases}$$

Entonces:

(A) r_α es paralela a π para todo α.
(B) $r_\alpha \subseteq \pi$ si y solo si $\alpha = 2$.
(C) $r_\alpha \subseteq \pi$ si y solo si $\alpha \neq 0$.
(D) r_α es perpendicular a π para $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$.
(E) r_α es perpendicular a π si y solo si $\alpha = 1$.

6. Sea la matriz M dada por:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

y sabemos que $\det(M) = 2$. Ahora consideremos la matriz N:

$$N = \begin{pmatrix} a + 2g & c + 2i & 2b + 4h \\ 3d & 3f & 6e \\ g & i & 2h \end{pmatrix}$$

Entonces, ¿cuál es el determinante de la matriz N?

(A) 4
(B) -6.
(C) 6
(D) -12.
(E) 12.

7. Sean $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{7\times 7}$. Consideremos las siguientes afirmaciones:

   (I) Se cumple necesariamente que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

   (II) Si AB es invertible, entonces necesariamente A y B son invertibles.

   (III) Si A es invertible, entonces cualquier vector $v \in \mathbb{R}^7$ se puede escribir como combinación lineal de las filas de A.

   Entonces,

   (A) Solamente (III) es correcta
   (B) Solamente (II) y (III) son correctas.
   (C) Solamente (I) es correcta.
   (D) Las tres son correctas.
   (E) Solamente (I) y (II) son correctas.

8. Dentro de todos los planos que pasan por $(2, 1, 1)$, sea π el que está más lejos del origen. Sea r la recta cuya ecuación paramétrica es: $(1, 1, 1) + \lambda(2, 2, -2)$. Entonces,

   (A) $r \cap \pi = (2, 2, 0)$.
   (B) $r \cap \pi = (3, 3, -1)$.
   (C) $r \cap \pi = (5, 5, -3)$.
   (D) $r \cap \pi = \emptyset$.
   (E) $r \subseteq \pi$.

9. Sea un sistema de ecuaciones escrito en la forma matricial:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   y cuya solución general es de la forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Entonces, la tercera columna de A es:

   (A) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

   (B) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (C) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

(E) $\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$

10. Dadas dos matrices A y B fijas de dimensiones $n \times n$, se consideran los conjuntos:
$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = Bx\}$, $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : A^2x = B^2x\}$, y $S_3 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = Bx - x\}$.
Entonces,

(A) Solamente S_1 y S_2 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$.
(B) Solamente S_1 es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.
(C) Solamente S_1 y S_3 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$.
(D) Los tres son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$.
(E) Ninguno de los tres es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	E	E	C	E	D	B	A	E	D

10.11. Año 2019.

10.11.1. Examen: 02 Febrero 2019.

Múltiple opción.

1. Se consideran los planos π_1, π_2 y la recta r definidas por:

$$\begin{aligned} \pi_1 &: (x,y,z) = (1,0,0) + \lambda(-1,1,0) + \mu(1,2,2) \\ \pi_2 &: 2x + y - z = 1 \\ r &: (1,1,1) + t(-1,2,0). \end{aligned}$$

   Entonces,

   (A) $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$.
   (B) $\pi_1 = \pi_2$.
   (C) $\pi_1 \cap \pi_2$ es una recta paralela a r.
   (D) $\pi_1 \cap \pi_2$ es una recta que corta a r en un solo punto.
   (E) $\pi_1 \cap \pi_2$ es una recta que se cruza con r.

2. Sea A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 1 \\ 2 & 2b & a & 0 \\ 2 & 2 & a & 0 \\ 0 & 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

   con $a, b \in \mathbb{R}$.

   Entonces:

   (A) $\text{Rg}(A) = 2$ para algún valor de a y algún valor de b.
   (B) $\text{Rg}(A) = 4$ para todos los valores de a y b.
   (C) $\text{Rg}(A) = 3$ si y solo si $a = 0$ o $b = 1$.
   (D) Si $b = 1$, para algún valor de a el rango de A es 4.
   (E) Si $a = 0$, para algún valor de b el rango de A es 4.

3. Se consideran las matrices $n \times n$ A invertible, $B = A^{-1}$ y $C = A \cdot A^t$.

   Entonces:

   (A) C es invertible, $\det(C) = 1$ y $C^{-1} = B \cdot B^t$.
   (B) C es invertible, $\det(C) = \det(A^2)$ y $C^{-1} = B \cdot B^t$.
   (C) C es invertible, $\det(C) = \det(A^2)$ y $C^{-1} = B^t \cdot B$.
   (D) C puede ser no invertible.
   (E) C es invertible, $\det(C) = 1$ y $C^{-1} = B^t \cdot B$.

4. Si B es una matriz 3×3 con entradas reales que cumple $\det(B) = 2$ y

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Entonces, $\det(AB^{-1}) = 2$ cuando:

(A) $\gamma = 1$.
(B) $\gamma = 2$.
(C) $\gamma = 3$.
(D) $\gamma = 4$.
(E) $\gamma = -1$.

5. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que cumple las tres igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} T(x^2 + x + 1) &= (2, 0, 1), \\ T(x^2 + 3x - 2) &= (1, 1, 0), \\ T(x^2 + 5x - 5) &= (0, 2, 0). \end{aligned}$$

Entonces,

(A) Existen infinitas transformaciones T que verifican las tres igualdades.
(B) No existe ninguna transformación T que verifique a la vez las tres igualdades.
(C) Existe una única transformación T que verifica las tres igualdades y además cumple $T(2x^2+4x-1) = (3, 1, 1)$.
(D) Existe una única transformación T que verifica las tres igualdades y además cumple $T(2x^2+6x-4) = (2, 2, 0)$.
(E) Existe una única transformación T que verifica las tres igualdades y además cumple $T(2x^2+8x-7) = (1, 0, 0)$.

6. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y los subespacios S y R definidos como:

$$S = \{(x, y, z, t) : z = t, 2x - y = t\},$$

$$R = [(1, 2, -1, 0), (1, 1, 2, 2), (-1, -2, 0, 0)].$$

Entonces,

(A) $S \subset R$ y $\dim(R + S) = \dim(R) = 2$.
(B) $S \subset R$ y $\dim(R + S) = \dim(R) = 3$.
(C) $\dim(R \cap S) = 1$ y $\dim(R + S) = 3$.

(D) $\dim(R \cap S) = 1$ y $R + S = \mathbb{R}^4$.
(E) $R \cap S = \{0\}$ y $R \oplus S = \mathbb{R}^4$.

7. Sean U y W subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ tales que $\dim(U) = 2$ y $\dim(W) = 3$. Entonces, la dimensión de $U \cap W$ puede tomar los valores:

(A) Necesariamente es 1.
(B) Necesariamente es 2.
(C) Únicamente puede tomar los valores 1 o 2.
(D) Únicamente puede tomar los valores 0, 1 o 2.
(E) Únicamente puede tomar los valores 1, 2 o 3.

8. Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como

$$T(x, y, z) = (x - y, x - y, z).$$

Entonces:

(A) $\ker(T)$ es un plano, $\operatorname{Im}(T)$ es una recta y la distancia entre ambos es 1.
(B) $\ker(T)$ es una recta, $\operatorname{Im}(T)$ es un plano y la distancia entre ambos es 1.
(C) $\ker(T)$ es un plano, $\operatorname{Im}(T)$ es una recta y la distancia entre ambos es 0.
(D) $\ker(T)$ es una recta, $\operatorname{Im}(T)$ es un plano y la distancia entre ambos es 0.
(E) $\ker(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$ son ambos planos paralelos y la distancia entre ambos es 1.

9. Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ definida como

$$T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a + b, a + c, b + d)$$

y las bases $B = \{x^3, x^2 + x, x - 1, 1\}$ y $C = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Entonces ${}_C(T)_B$ es igual a:

(A)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(B)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(C)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(D)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(E)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Se consideran tres vectores u, v, y w no nulos de $\mathbb{R}^3$ tales que $(u+v) \wedge w = 0$ y $(u-v) \wedge w = 0$. Se consideran las afirmaciones:

(I) u y v son colineales.
(II) u y v son ortogonales.
(III) $\langle u \wedge v, w \rangle \geq 0$.

Entonces:

(A) Solamente (I) es verdadera.

(B) Solamente (I) y (II) son verdaderas.

(C) Solamente (I) y (III) son verdaderas.

(D) Ninguna de las tres afirmaciones es verdadera.

(E) Solamente (III) es verdadera.

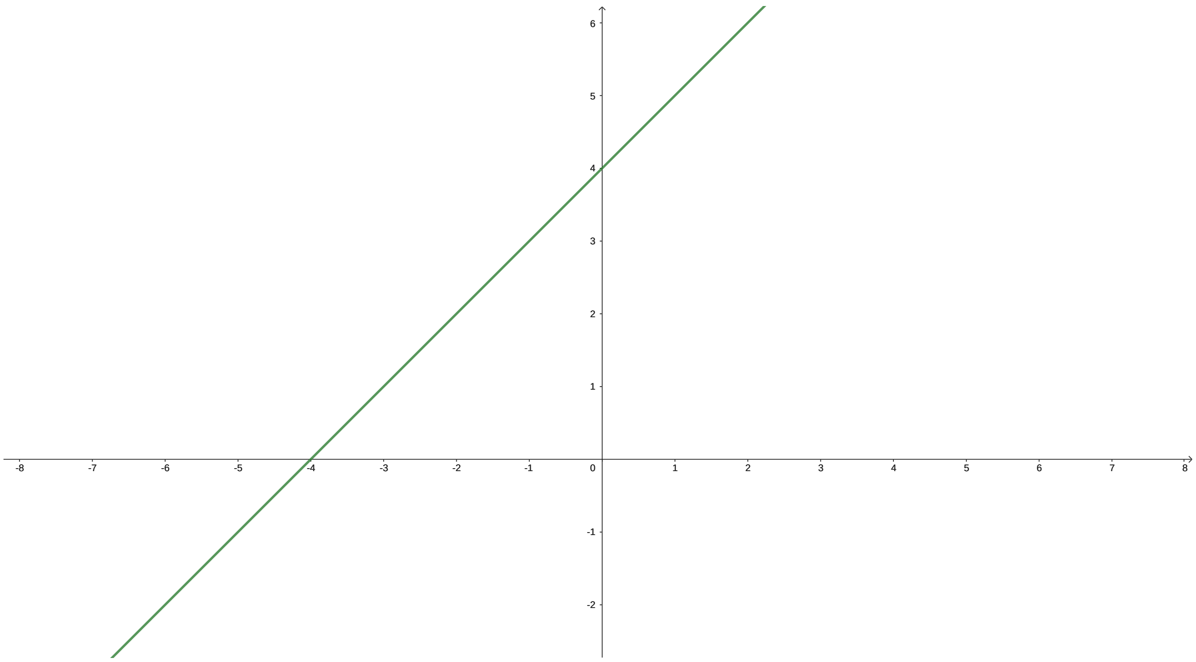
Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	C	C	C	B	D	C	D	A	C

10.11.2. Examen. 11 Julio 2019.

Verdadero-falso.

1. Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\ker(T) = r$, donde r es la recta representada en la siguiente figura:



2. Sean $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{6\times 6}$ tales que A^2B^3 es no invertible. Entonces, ni A, ni B son invertibles.
3. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \subset \mathbb{R}^4$. Entonces, el conjunto B es linealmente dependiente .
4. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal biyectiva, y si $\dim(V) < \infty$, entonces tenemos que $\dim(V) = \dim(W)$.
5. Un sistema lineal de 5 ecuaciones y 7 incógnitas nunca es compatible determinado.

Múltiple opción.

1. El determinante de la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

El valor del determinante de A es:

(A) 0
(B) 16
(C) -16

(D) 4

2. Dado un par de vectores no nulos p y $q \in \mathbb{R}^3$, consideremos los conjuntos A_p y B_q definidos en $\mathbb{R}^3$ de la siguiente manera:

   $A_p = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, p\rangle = 0\}$

   $B_q = \{v \in \mathbb{R}^3 : v \times q = \mathbf{0}\}$

   Entonces, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

   (A) $\dim(B_q) = 1$ y $A_p + B_q = \mathbb{R}^3$.
   (B) $\dim(B_q) = 1$ y existen $p, q \in \mathbb{R}^3$ tales que $A_p + B_q \neq \mathbb{R}^3$.
   (C) $\dim(B_q) = 2$ y $A_p + B_q = \mathbb{R}^3$.
   (D) B_q no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y $A_p + [B_q] = \mathbb{R}^3$.

3. Sean r y s las rectas dadas por

$$r : (0, 1, -1) + \lambda(1, 0, 2) \quad \text{y} \quad s : \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -2x + 2y + z = 6 \end{cases}$$

   La distancia entre r y s es:

   (A) $\sqrt{30}$
   (B) 6
   (C) $\sqrt{35}$
   (D) 5.

4. Sean u y v dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$. Si $\|u\| = 1$, si el ángulo entre u y v es $\frac{\pi}{4}$ y si $2u - v$ es perpendicular a v, entonces:

   (A) $\|v\| = \sqrt{2}$ o $\|v\| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, y ambas opciones son posibles.
   (B) $\|v\| = \sqrt{2}$ o $\|v\| = -\sqrt{2}$, y ambas opciones son posibles.
   (C) $\|v\| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
   (D) $\|v\| = \sqrt{2}$.

5. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que cumple las tres igualdades siguientes:

   $T(x^2 + x + 1) = (1, 2, 3)$
   $T(3x^2 - 2x + 1) = (2, 3, 4)$
   $T(5x^2 - 5x + 1) = (4, 5, 6)$

   (A) Existen infinitas transformaciones lineales T que verifican las tres igualdades.
   (B) No existe ninguna transformación lineal T que verifique a la vez las tres igualdades.
   (C) Existe una única transformación lineal T que verifica las tres igualdades y además cumple

$$T(4x^2 - x + 2) = (3, 5, 7).$$

(D) Existe una única transformación lineal T que verifica las tres igualdades y además cumple

$$T(6x^2 - 4x + 2) = (5, 7, 9).$$

6. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en las bases $A = \{(0,0,1,-1); (0,2,0,1); (1,0,0,0); (3,1,0,1)\}$ y $B = \{(0,-3,1); (1,2,2); (0,1,0)\}$ es:

$$_B(T)_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

(A) $T(1,-1,-1,1) = (-1,5,-4)$.

(B) $T(1,-1,-1,1) = (0,-2,-2)$.

(C) $T(1,-1,-1,1) = (-1,-6,-2)$.

(D) $T(1,-1,-1,1) = (-2,-1,1)$.

7. Sea $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ el espacio vectorial definido por

$$L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) = \{T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ transformación lineal}\}$$

con las operaciones $(T + S)(v) = T(v) + S(v)$ y $(\lambda T)(v) = \lambda(T(v))$. Dada la transformación lineal $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ definida por $F(x,y,z) = (x,0,0)$, se consideran los subespacios

$$V_1 = \{T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) : T \circ F = 0\}$$

y

$$V_2 = \{T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) : F \circ T = 0\}$$

Entonces:

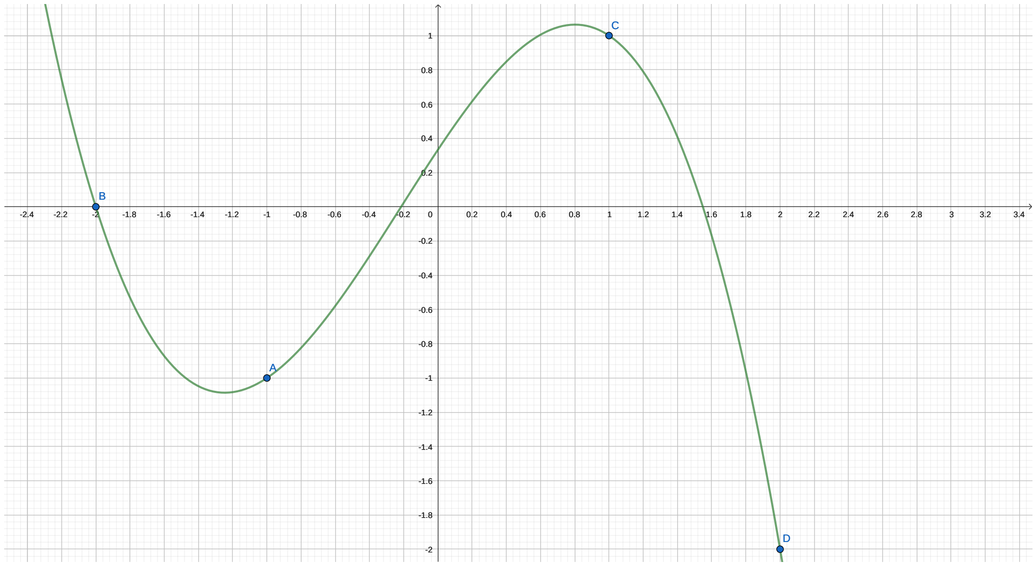
(A) $\dim(V_1) = \dim(V_2) = 1$.

(B) $\dim(V_1) = 3$ y $\dim(V_2) \neq 3$.

(C) $\dim(V_1) = 6$ y $V_1 + V_2 = L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

(D) $\dim(V_1) = 6$ y $V_1 + V_2 \neq L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

8. La gráfica del polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ está dada por



Después de haber determinado los coeficientes a, b, c, y d, indica la opción correcta: (A) $a+b-c-d=\frac{8}{3}$.

(B) $a+b-c-d=-\frac{8}{3}$.

(C) $a+b-c-d=\frac{4}{3}$.

(D) $a+b-c-d=-\frac{4}{3}$.

9. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz asociada en la base canónica C es

$$_C(T)_C=\begin{pmatrix} k & 5 & 1 \\ -2 & -8 & -k \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Para cuáles valores de $k\in\mathbb{R}$ se verifica simultáneamente $ker(T)\neq\{0\}$ y $ker(T)\subseteq Im(T)$?

(A) Para ningún valor de $k\in\mathbb{R}$.

(B) Solo para $k=1$.

(C) Solo para $k=3$.

(D) Para $k=1$ o $k=3$.

10. Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & \lambda & -10 \end{pmatrix}$$

donde $\lambda\in\mathbb{R}$. Indicar la opción correcta:

(A) $Rg(A)=3$ para infinitos valores de λ.

(B) $Rg(A) = 4$ para un único valor de λ.

(C) $Rg(A) = 4$ para todo valor de λ.

(D) $Rg(A) = 3$ para todo valor de λ.

10.11.3. Examen: 10 Diciembre 2019.

Verdadero- falso.

1. Para todos los vectores $v, w \in \mathbb{R}^3$ tales que $v \wedge w \neq 0$, el conjunto $\{v, w\}$ es linealmente independiente.

2. El conjunto $W = \{P \in \mathbb{R}[x] : P(1) = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}[x]$.

3. La función $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3} \to \mathbb{R}$ definida por $T(A) = \det(A)$ para toda matriz $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ es una transformación lineal.

4. El conjunto
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ \pi & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \log(2) & e \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
es una base de $M_{2\times 2}$.

5. Sean $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{5\times 5}$. Si AB es invertible, entonces A es invertible.

Múltiple opción.

1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones con parámetro $k \in \mathbb{R}$:
$$(S) : \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + 2y + kz = 9 \\ 4x + ky + 10z = 6 \end{cases}$$
(A) El sistema (S) es compatible para todo k.
(B) El sistema (S) es incompatible para todo k.
(C) Existe exactamente un valor de k para el cual (S) es compatible indeterminado.
(D) Existen exactamente dos valores de k para los cuales (S) es incompatible.

2. El determinante de la matriz A es:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(A) 4
(B) -8
(C) -12
(D) -4

3. Sean r_1, r_2 y s_a las tres rectas dadas por:

$$r_1 : (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(-1, 1, 0)$$
$$r_2 : (x, y, z) = (1, 2, 0) + \mu(1, 0, 0)$$
$$sa : (x, y, z) = (1, 2, 4) + t(4, a, a)$$

donde a es un parámetro real. Se escribe P al punto de intersección de las rectas r_1 y r_2 (es decir: $r_1 \cap r_2 = \{P\}$). El valor de a que verifica la igualdad $d(P, (1, 2, 4)) = d(s_a, P)$ es:
(A) 1

(B) -3

(C) 0

(D) 4

4. Sea $A = (a_{i,j})$ una matriz de tamaño 5×5 tal que $a_{i,j} = 0$ si $i > j$ (es decir, A es triangular superior). Se supone que A es invertible y se escribe $B = (b_{i,j})$ a su inversa. Entonces:

(A) Tenemos que $b_{i,i} = 1/a_{i,i}$ para todos los índices i. Además, si $a_{i,j} \geq 0$ para todos los índices i y j, entonces $b_{i,j} \geq 0$ para todos los índices i y j.

(B) Tenemos que $b_{i,i} = -a_{i,i}$ para todos los índices i. Además, si $a_{i,j} \geq 0$ para todos los índices i y j, entonces $b_{i,j} \leq 0$ para todos los índices i y j.

(C) Tenemos que $b_{i,i} = 1/a_{i,i}$ para todos los índices i. Además, existen ejemplos donde $a_{i,j} \geq 0$ para todos los índices i y j, mientras $b_{i,j} < 0$ para algunos índices i y j.

(D) Tenemos que $b_{i,i} = -a_{i,i}$ para todos los índices i. Además, existen ejemplos donde $a_{i,j} \geq 0$ para todos los índices i y j, mientras $b_{i,j} > 0$ para algunos índices i y j.

5.

6. Dada una transformación lineal $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^4$, se consideran las siguientes igualdades: I. $T(x^2 + 2) = (1, 1, 2, 0)$

II. $T(x^3 + X^2 + X + 1) = (3, 2, 1, 0)$

III. $T(x^3 - X + 1) = (1, 1, 2, 0)$

IV. $T(x^3) = (3, 2, 1, 0)$

Indicar la opción correcta:

(A) Existe una única transformación lineal que cumple a la vez I, II, III y IV.

(B) No existe ninguna transformación lineal que cumple a la vez I, II, III y IV.

(C) Existen infinitas transformaciones lineales que cumplen a la vez I, II y III, y todas estas transformaciones lineales también cumplen IV.

(D) Existen infinitas transformaciones lineales que cumplen a la vez I, II y III; algunas de ellas cumplen IV y otras no.

7. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en las bases

$$A = \{(1, 1, 2, 0), (1, 0, 0, -1), (-2, -2, 3, 1), (0, 0, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^4$$

y

$$B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$$

es:

$$_B(T)_A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $v = (1, 1, -3, -1)$, entonces:

(A) $T(v) = (4, -2, 5)$.

(B) $T(v) = (7, -2, -3)$.

(C) $T(v) = (1, 2, 0)$.

(D) $T(v) = (-2, 2, 3)$.

8. 8. Sea $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3} \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ la transformación lineal definida por $T(A) = A + A^t$ para toda matriz $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$. Entonces:

   (A) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 5$.

   (B) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 6$.

   (C) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 7$.

   (D) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 8$.

   9. Se consideran los polinomios: $P_1 = x^3 - 2x^2 + 1$, $P_2 = 2x^2 + x + 3$, $P_3 = x^3 + 4x$, $P_4 = 3x - 4$ y $P_5 = x$.

   Entonces, en el espacio vectorial $\mathbb{R}[x]$:

   (A) $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ es LI y $P_5 \in [\{P_1, P_2, P_3, P_4\}]$.

   (B) $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ es LI y $P_5 \notin [\{P_1, P_2, P_3, P_4\}]$.

   (C) $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ es LD y $P_5 \in [\{P_1, P_2, P_3, P_4\}]$.

   (D) $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ es LD y $P_5 \notin [\{P_1, P_2, P_3, P_4\}]$.

Solución.

1	2	3	4	5
V	V	F	F	V

1	2	3	4	5	6	7	8	9
D	B	B	C	A	B	C	B	D

10.12. Año 2020.

10.12.1. Examen: 08 Febrero 2020.

Verdadero-falso.

1. El conjunto $V = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{7\times 7} : \mathrm{tr}(A) = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{7\times 7}$.
2. Sea $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{6\times 6}$. Si $\det(A) \neq 0$, entonces A es invertible y $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
3. Todo sistema lineal con 15 incógnitas y 10 ecuaciones es compatible indeterminado.
4. Si u y v son vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$, entonces $||u \wedge v|| \leq \|u\|\|v\|$.
5. La función $f : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$ definida por $f(P) = P(0) + P(1)$ para todo $P \in \mathbb{R}_n[x]$ es una transformación lineal.

Múltiple opción

1. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en las bases $A = \{(2,0,1,1),(0,3,1,3),(1,0,2,0),(1,1,2,1)\}$ y $B = \{(1,0,1),(0,1,0),(1,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ es:

$$_B(T)_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

   Si $v = (3,-1,3,0)$, entonces:

   (A) $T(v) = (15,10,5)$.

   (B) $T(v) = (3,-4,5)$.

   (C) $T(v) = (5,0,10)$.

   (D) $T(v) = (8,1,3)$.

2. Sea $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ el polinomio de grado 3 tal que $p(2) = 1, p(1) = -1, p(-1) = 1, p(-2) = 1$.

   Después de haber determinado los coeficientes a, b, c, y d, indicar la opción correcta:

   (A) $a + b - c - d = -5/3$

   (B) $a + b - c - d = 7/3$

   (C) $a + b - c - d = -2$

   (D) $a + b - c - d = 1$

3. El determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

es:

(A) 0

(B) 24

(C) 2

(D) -2

4. Sean $A = (a_{i,j})$ y $B = (b_{i,j})$ las matrices de tamaño 4×4 definidas por

$$a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

y

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 3 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

La suma de las entradas de la tercera fila de la matriz AB es:

(A) 7

(B) 6

(C) 12

(D) 0

5. Sean U, V, y W tres espacios vectoriales, dados con una transformación lineal inyectiva $T : U \to V$ y una transformación lineal sobreyectiva $S : V \to W$, tales que $\mathrm{Im}(T) = \ker(S)$. Entonces:

(A) $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$

(B) $\dim(V) \leq \dim(U) + \dim(W)$, y hay ejemplos donde la desigualdad es estricta.

(C) $\dim(V) \geq \dim(U) + \dim(W)$, y hay ejemplos donde la desigualdad es estricta.

(D) Hay ejemplos donde $\dim(V)$ es igual a la suma de $\dim(U) + \dim(W)$, otros donde es menor y otros donde es mayor que dicha suma.

6. Dado un parámetro $a \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto

$$B_a = \{(a+1, -1, 3), (2, 1, -2), (-2, 1, a-4)\}.$$

El conjunto B_a es una base de $\mathbb{R}^3$...

(A) ...para todo valor de $a \in \mathbb{R}$.

(B) ...para todo valor de $a \in \mathbb{R}$, salvo uno.

(C) ...para todo valor de $a \in \mathbb{R}$, salvo dos.

(D) ...para todo valor de $a \in \mathbb{R}$, salvo tres.

7. Fijado $n \geq 3$, se escriben

- $S_1 = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} : A^t = A\}$, el subespacio de las matrices simétricas.
- $S_2 = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} : A^t = -A\}$, el subespacio de las matrices antisimétricas.

Entonces:

(A) La suma $S_1 + S_2$ no es directa, y $S_1 + S_2 = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$.

(B) La suma $S_1 \oplus S_2$ es directa, y $S_1 \oplus S_2 = \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$.

(C) La suma $S_1 + S_2$ no es directa, y $S_1 + S_2 \neq \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$.

(D) La suma $S_1 \oplus S_2$ es directa, y $S_1 \oplus S_2 \neq \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$.

8. Un tetraedro es un poliedro de 4 caras, 6 aristas y 4 vértices. Cada cara del tetraedro está incluida en un plano, por lo que un tetraedro lleno se puede dar como la intersección de 4 regiones del tipo $ax+by+cz \geq d$ (o $\leq$). La altura respecto a una cara está dada como la distancia entre el plano en que está contenida y el vértice opuesto.

   Sea T el tetraedro lleno dado por

$$\begin{cases} x + 2y + 2z \geq 0 \\ x + 3y - 2z \leq 3 \\ x + y + 2z \leq 5 \\ 3x - 4y + z \leq 3 \end{cases}$$

   La altura respecto a la cara contenida en el plano $x + 2y + 2z = 0$ es:

   (A) $\frac{2}{3}$

   (B) 6

   (C) 0

   (D) 2

9. En $\mathbb{R}^4$, se consideran los cinco vectores $v_1 = (1,0,2,3)$, $v_2 = (0,1,3,2)$, $v_3 = (1,2,4,1)$, $v_4 = (1,0,0,0)$ y $v_5 = (0,1,0,0)$. Indicar la opción correcta:

   (A) $v_4 \in [\{v_1, v_2, v_3\}]$ y $v_5 \in [\{v_1, v_2, v_3\}]$.

   (B) $v_4 \in [\{v_1, v_2, v_3\}]$ y $v_5 \notin [\{v_1, v_2, v_3\}]$.

   (C) $v_4 \notin [\{v_1, v_2, v_3\}]$ y $v_5 \in [\{v_1, v_2, v_3\}]$.

   (D) $v_4 \notin [\{v_1, v_2, v_3\}]$ y $v_5 \notin [\{v_1, v_2, v_3\}]$.

Desarrollo.

Sea V un espacio vectorial y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $T \circ T = T$.(Se dice que la transformación lineal T es una proyección.)

(a) Demostrar que $v - T(v) \in \ker(T)$ para todo $v \in V$.

(b) Demostrar que $\ker(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0_V\}$.

(c) Deducir de (a) y (b) que: $\ker(T) \oplus \mathrm{Im}(T) = V$.

10.12.2. Examen: Agosto 2020.

Turno matutino.

Verdadero falso.

1. $T : V \to V$ es una transformación lineal y existe $v \in V$ no nulo tal que $T^3(v) = 0$, entonces T no es invertible.

2. Sean $T, S : V \to W$ transformaciones lineales tales que $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(S)$, entonces existe $v \in V$ no nulo tal que $T(v) = S(v)$.

3. Si $V = S_1 \oplus S_2$ y $S \subset V$ es un subespacio, entonces $S \subset S_1$ o bien $S \subset S_2$.

4. Sean A, B bases de V, un espacio vectorial de dimensión n, y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que ${}_B(T)_A = \mathrm{Id}_n$. Entonces $A = B$.

Múltiple opción.

1. Sea r la recta intersección de los planos π_1 y π_2 de ecuaciones $x + y - z = 0$ y $3x - z = 0$ respectivamente. Sea s la recta que pasa por $(1, 1, 2)$ y tiene vector director $(1, 0, 3)$. Considere el plano π que contiene a s y es paralelo a r. Determinar cuál de los siguientes puntos está en π.

   (A) $(0, 0, 0)$.

   (B) $(2, 0, 6)$.

   (C) $(6, 0, -2)$.

   (D) $(3, 3, 8)$.

   (E) $(5, 2, 0)$.

2. Sea $w \in \mathbb{R}^3$ tal que $w \neq (0, 0, 0)$ y considere $T_w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

   $$T_w(v) = (\langle v, 2w \rangle), \langle v, -w \rangle.$$

   Entonces:

   (A) $\dim(\ker(T_w)) = 2$ y $\mathrm{Im}(T_w) = [(1, -2)]$.

   (B) $\dim(\ker(T_w)) = 2$ y $\mathrm{Im}(T_w) = [(-2, 1), (1, -2)]$.

   (C) $\dim(\ker(T_w)) = 1$ y $\mathrm{Im}(T_w) = [(-2, 1), (1, -2)]$.

   (D) Existen $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ no nulos tales que $\dim(\ker(T_{w_1})) \neq \dim(\ker(T_{w_2}))$.

   (E) $\dim(\ker(T_w)) = 2$ y $\mathrm{Im}(T_w) = [(-2, 1)]$.

3. Sean $P = (2, 1, 1)$ y π un plano que pasa por el punto $(2, 2, -4)$ y tiene como vectores directores a $(1, -1, 0)$ y $(1, 0, 1)$. Considere el punto Q tal que $\mathrm{dist}(Q, \pi) = \mathrm{dist}(P, \pi)$, $\mathrm{dist}(P, Q) = 2\mathrm{dist}(P, \pi)$, y además, la recta que pasa por P y Q es normal a π. Entonces,

   (A) La suma de las entradas de Q es -6.

   (B) La suma de las entradas de Q es 8.

   (C) La suma de las entradas de Q es -8.

   (D) La suma de las entradas de Q es 6.

   (E) La suma de las entradas de Q es 0.

4. Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que cumple las condiciones:

   $$T(1, 8, -2) = (-3, 1, 1, 4), T(2, 1, 5) = (0, -1, 2, 5), T(1, -2, 4) = (1, -1, 1, 2).$$

   Indicar la opción correcta:

(A) Existe una única transformación lineal T que cumple las condiciones, y dicha transformación lineal cumple la condición $T(2,0,3)=(0,-2,0,5)$.

(B) Existe una única transformación lineal T que cumple las condiciones, y dicha transformación lineal cumple la condición $T(2,0,3)=(1,0,-2,3)$.

(C) Existen infinitas transformaciones lineales T que cumplen las condiciones, pero solo una de ellas cumple la condición $T(2,0,3)=(-3,2,0,1)$.

(D) Existen infinitas transformaciones lineales T que cumplen las condiciones, y todas ellas cumplen la condición $T(2,0,3)=(-3,2,0,1)$.

(E) No existe ninguna transformación lineal T que cumple las condiciones.

5. Sean los subespacios $S_1=\{p\in\mathbb{R}_3[x]: p(0)+p'(0)+p''(0)=0\}$, $S_2=\{p\in\mathbb{R}_3[x]: p(0)+p'(0)=0\}$, y $S_3=\{p\in\mathbb{R}_3[x]: p''(0)=0\}$. Entonces:

(A) $S_1=S_2+S_3$ pero la suma no es directa.

(B) $S_1=S_2\oplus S_3$.

(C) $\mathbb{R}_3[x]=S_1\oplus[x^3]$.

(D) $\mathbb{R}_3[x]=S_1\oplus[x^3+1]$.

(E) $\mathbb{R}_3[x]=S_2\oplus[x^3]$.

6. Sean $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^4$ y $S:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ transformaciones lineales definidas por:

$$_B(T)_C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&2\\-1&3&-2\\3&4&7\end{pmatrix},$$

siendo $B=\{(1,0,1,0),(0,1,1,0),(0,0,-1,1),(0,0,0,-1)\}$ y $C=\{1,x,x^2\}$,

y

$S(1,0,1,0)=(1,2,3,-1)$, $S(0,1,1,0)=(1,3,2,0)$, $S(0,0,-1,1)=(0,-1,-1,2)$, $S(0,0,0,-1)=(0,0,-1,-2)$.

Sea $p\in\mathbb{R}_2[x]$ tal que $S\circ T(p)=(5,11,3,-12)$. Entonces:

(A) $p(1)=-2$.

(B) $p(1)=1$.

(C) $p(1)=0$.

(D) $p(1)=-1$.

(E) $p(1)=2$.

7. Sea $\alpha\in\mathbb{R}$ y $T_\alpha:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ una transformación lineal cuya matriz asociada en la base canónica C es:

$$_C(T_\alpha)_C=\begin{pmatrix}1&1&\alpha+2&-2\\1&\alpha+3&4&-2\alpha\\-2&-2&\alpha-4&3\\-2&\alpha&-2&\alpha+3\end{pmatrix}.$$

(A) Si T_α no es sobreyectiva entonces $\dim(Im(T))=3$.

(B) Si T_α no es sobreyectiva entonces $\dim(Im(T))=2$.

(C) T_α es sobreyectiva para todo $\alpha\in\mathbb{R}$.

(D) Si T_α no es sobreyectiva entonces hay valores de α para los que $\dim(Im(T)) = 3$ y otros valores para los que $\dim(Im(T)) = 2$.

(E) Si T_α no es sobreyectiva entonces $\dim(Im(T)) = 1$.

Turno Vespertino.

Verdadero-falso.

1. Se considera $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ triangular inferior. Entonces, A no es invertible si y solo si algún elemento de su diagonal es nulo.

2. No existe $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ invertible tal que

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} A.$$

3. Si $V = S_1 \oplus S_2$ y B es una base de V, entonces el conjunto $B_1 = B \cap S_1$ es una base de S_1.

4. Si A y B son matrices $n \times n$, entonces el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : A^2x = Bx\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Múltiple opción.

1. Sean $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^3$ y $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ transformaciones lineales dadas por:

$$T(1) = (2, 1, -1), T(t) = (-1, -1, 0), T(t^2) = (1, 0, 0),$$

$$S(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z, x + z, x + 3y + z).$$

y sea $p \in \ker(S \circ T)$ tal que $p(1) = -2$. Entonces:

(a) $p(0) = 2$.
(b) $p(0) = 0$.
(c) $p(0) = -1$.
(d) $p(0) = 1$.
(e) $p(0) = -2$.

2. Sean r y s dos rectas de $\mathbb{R}^3$ con intersección no vacía. Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

(A) Existe un único plano π tal que $r \subset \pi$ y $s \subset \pi$.

(B) Existen infinitos planos π tales que $r \subset \pi$ y $s \subset \pi$.

(C) Si $r = s$, entonces existe un único plano que verifica $r \subset \pi$ y $s \subset \pi$. Si $r \neq s$, entonces ningún plano verifica que $r \subset \pi$ y $s \subset \pi$.

(D) Si $r \neq s$, entonces ningún plano π verifica que $r \subset \pi$ y $s \subset \pi$. Si $r = s$, entonces existe un único plano π tal que $r \subset \pi$ y $s \subset \pi$.

(E) Si $r \neq s$, existe un único plano π que verifica $r \subset \pi$ y $s \subset \pi$. Si $r = s$, existen infinitos planos π que cumplen $r \subset \pi$ y $s \subset \pi$.

3. Sean $P = (1, 1, 3)$ y r la recta dada por:

$$r : \begin{cases} 2x - y & = 1, \\ z & = 8. \end{cases}$$

Sea Q el punto tal que $dist(Q, r) = dist(P, r)$, $dist(P, Q) = 2 \cdot dist(P, r)$, y además, la recta que pasa por P y Q es perpendicular a r. Entonces, si d^2 es el cuadrado de la distancia de Q al origen, se tiene:

(A) $d^2 = 171$.
(B) $d^2 = 145$.
(C) $d^2 = 122$.
(D) $d^2 = 104$.
(E) $d^2 = 115$.

4. Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que cumple las condiciones:

$$T(1, 8, -2) = (-3, 1, 1, 4), T(2, 1, 4) = (0, -1, -2, 5), T(3, -1, 6) = (1, 0, -1, 2).$$

Indicar la opción correcta:

(A) Existe una única transformación lineal T que cumple las condiciones, y dicha transformación lineal cumple la condición $T(0, 5, -4) = (1, -2, 0, -5)$.
(B) Existe una única transformación lineal T que cumple las condiciones, y dicha transformación lineal cumple la condición $T(0, 5, -4) = (-2, 3, 4, -4)$.
(C) Existen infinitas transformaciones lineales T que cumplen las condiciones, pero solo una de ellas cumple la condición $T(0, 5, -4) = (1, -2, 0, -5)$.
(D) Existen infinitas transformaciones lineales T que cumplen las condiciones, y todas ellas cumplen la condición $T(0, 5, -4) = (-2, 3, 4, -4)$.
(E) No existe ninguna transformación lineal T que cumple las condiciones.

5. Sean los subespacios de $\mathbb{R}^4$ dados por $S_1 = [(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1)]$ y $S_2 = [(1, 1, -1, -1)]$. Entonces:

(A) $\mathbb{R}^4 = S_1 + S_2$ pero la suma no es directa.
(B) $\mathbb{R}^4 = S_1 \oplus S_2$.
(C) $\mathbb{R}^4 = S_1 \oplus [(1, 1, 1, 1)]$.
(D) $\mathbb{R}^4 = S_1 + [(1, 1, 0, 2)]$ pero la suma no es directa.
(E) $S_2 \subset S_1$.

6. Sean $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ transformaciones lineales tales que $T \circ S = \mathrm{Id}_m$. Indicar la opción correcta:

(A) Entonces $n = m$ y $S = T = \mathrm{Id}_m$.
(B) Entonces $n = m$ y T es biyectiva. Además, hay ejemplos donde $S \neq \mathrm{Id}_m$.
(C) Entonces $n \geq m$ y T es biyectiva. Además, hay ejemplos donde $n > m$.
(D) Entonces $n \geq m$. Además, hay ejemplos donde $n > m$ y donde T no es biyectiva.

(E) Entonces $n \geq m$. Además, hay ejemplos donde T no es sobreyectiva.

7. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $T_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal cuya matriz asociada en las bases canónicas está dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ -1 & \alpha^2 & \alpha+1 \\ 0 & \alpha^2+\alpha & \alpha^2+2 \\ 1 & \alpha^2+2\alpha & \alpha^2+3 \end{pmatrix}$$

Indicar la opción correcta:

(A) Si T_α no es inyectiva, entonces $\dim(\ker(T_\alpha)) = 2$.

(B) T_α es inyectiva para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

(C) T_α es inyectiva para una cantidad finita de valores de α.

(D) Si T_α no es inyectiva, entonces en algunos casos $\dim(\ker(T_\alpha)) = 1$ y en otros $\dim(\ker(T_\alpha)) = 2$.

(E) Si T_α no es inyectiva, entonces $\dim(\ker(T_\alpha)) = 1$.

10.13. Año 2021.

10.14. Año 2022.

10.14.1. 09 Diciembre 2022.

Múltiple opción.

1. Sea $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ $(n \geq 3)$ la matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Entonces, $|A|$ (el determinante de A) es igual a:

   (A) -2
   (B) $(-2)^n$
   (C) -2^n
   (D) 0
   (E) 2^n
   (F) 2

2. Sea S_λ el sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ x + \lambda y + z = 4 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

   Entonces:

   (A) S_λ es compatible para todo λ.
   (B) S_{-1} es incompatible.
   (C) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que S_λ es compatible indeterminado.
   (D) No existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que S_λ es incompatible.
   (E) S_2 es compatible determinado.
   (F) S_λ es compatible determinado si y solo si $\lambda \neq \pm 1$.

3. Considere las rectas r y s en $\mathbb{R}^3$ dadas por

$$r : \begin{cases} x + y + z = a \\ x - y - z = b \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x + y + z = -a \\ x - y - z = -b \end{cases}$$

   donde $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces:

(A) Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que r y s se intersectan solamente en un punto.

(B) Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, la intersección entre r y s es vacía.

(C) Si $a = 1$ y $b = 0$, entonces r representa un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(D) Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que r y el plano $y - z = 1$ se intersectan en un solo punto.

(E) Si $a = 1$ y $b = 1$, entonces la distancia entre r y s es estrictamente mayor que 2.

(F) Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que r y s están contenidas en el plano $y - z = 1$.

4. Sea V un espacio vectorial real de dimensión $n \geq 1$ y sea $B = \{v_1, \ldots, v_m\}$ un subconjunto finito de V con $m \geq 1$. Considere la función $f : \mathbb{R}^m \to V$ dada por

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$$

para todo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$. Entonces:

(A) Si f es inyectiva, entonces $m \leq n$.

(B) Si $m > n$, entonces f es inyectiva.

(C) Si $m \geq n$, entonces f es sobreyectiva.

(D) Si f es inyectiva, entonces B es una base de V.

(E) Si f es sobreyectiva, entonces B es una base de V.

(F) Si $m < n$, entonces f es sobreyectiva.

Desarrollo.

1. Considere el espacio vectorial real $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ de matrices cuadradas $n \times n$ con entradas reales. Indique si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ o no. En caso afirmativo, dé una demostración. En caso negativo, indique por qué y ofrezca un contraejemplo.

(i) $S_1 = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} \mid A \text{ es invertible}\}$.

(ii) $S_2 = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} \mid A^2 = A\}$.

(iii) $S_3 = \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} \mid A = A^t \text{ y } \mathrm{tr}(A) = 0\}$.

2. Sean U, V, W tres puntos no colineales en $\mathbb{R}^3$ y distintos del origen O. Consideramos el conjunto de vectores $\{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^3$ dado por

$$u = \overrightarrow{OU}, \quad v = \overrightarrow{OV}, \quad w = \overrightarrow{OW}.$$

Es decir, $u = \overrightarrow{OU}$ es el vector con punto inicial en O y punto final en U (v y w se definen de la misma manera). Demuestre o dé contraejemplos para las siguientes afirmaciones:

(i) El subespacio $[u, u - v, u + v + w]$ tiene dimensión 2.

(ii) Si $\{u, v, w\}$ no genera $\mathbb{R}^3$, entonces $[u \wedge v, u \wedge w, v \wedge w]$ es un subespacio de dimensión 1.

(iii) Si $a \neq 0$ o $b \neq 0$, entonces el subespacio $[u, u + av, u - bw]$ tiene dimensión 1.

Solución.

1	2	3	4
C	E	D	A

1. i) S_1 no es un subespacio vectorial de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ ya que la matriz nula no pertenece a S_1. La matriz nula no es invertible y todo subespacio de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ debe contener al vector nulo de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$.

   ii) S_2 no es un subespacio vectorial de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ ya que S_2 no está cerrado bajo multiplicación por escalares. Por ejemplo, consideremos la matriz identidad I de tamaño 2×2 (tomando $n=2$ para un contraejemplo), la cual pertenece claramente a S_2. Ahora, observa que $2I$ no está en S_2:

$$2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(2I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I.$$

   Por lo tanto, $2I \notin S_2$.

   iii) S_3 es un subespacio de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$.

   - La matriz nula 0 está en $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$ ya que $0 = 0^t$ y $\mathrm{tr}(0) = 0$, claramente. Por lo tanto, S_3 no está vacío.
   - Sean A y B en S_3. Entonces, $A = A^t$, $B = B^t$, y $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) = 0$. Luego,

$$A + B = A^t + B^t = (A+B)^t$$

     y

$$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = 0 + 0 = 0.$$

     Por lo tanto, $A + B \in S_3$.
   - Sea A en S_3 y α en $\mathbb{R}$. Entonces, $A = A^t$ y $\mathrm{tr}(A) = 0$. Luego,

$$\alpha A = \alpha A^t = (\alpha A)^t$$

     y

$$\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

     Por lo tanto, $\alpha A \in S_3$.

   Concluimos que S_3 es un subespacio de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}$.

2. i) El subespacio $[u, u-v, u+v+w]$ tiene dimensión 2.

   Falso. En fecto, para los puntos $U = (1,0,0)$, $V = (0,1,0)$ y $W = (0,0,1)$, se tiene que $u = (1,0,0)$, $u - v = (1,-1,0)$ y $u + v + w = (1,1,1)$. Así,

$$[u, u-v, u+v+w] = [(1,0,0), (1,-1,0), (1,1,1)]$$

   es un subespacio de dimensión 3.

ii Si $\{u, v, w\}$ no genera $\mathbb{R}^3$, entonces $[u \wedge v, u \wedge w, v \wedge w]$ es un subespacio de dimensión 1.

Verdadero. En efecto, i $\{u, v, w\}$ no genera $\mathbb{R}^3$, como los puntos U, V y W no son colineales, y además son distintos del origen, el subespacio $[u, v, w]$ tiene dimensión 2, es decir, es un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen. Por otro lado, los vectores $u \wedge v$, $u \wedge w$ y $v \wedge w$ son ortogonales al plano $[u, v, w]$, y por lo tanto son colineales. Además, al menos uno de estos vectores es diferente de cero, pues los vectores u, v, w no pueden ser los tres colineales porque los puntos U, V, W no son colineales. Por lo tanto, al ser $u \wedge v$, $u \wedge w$, y $v \wedge w$ vectores colineales y no todos nulos, se tiene que $[u \wedge v, u \wedge w, v \wedge w]$ tiene dimensión 1.

iii) Si $a \neq 0$ o $b \neq 0$, entonces el subespacio $[u, u + av, u - bw]$ tiene dimensión 1.

Falso. En efecto, considera $u = (1, 0, 0)$, $v = (0, 1, 0)$ y $w = (0, 0, 1)$. Entonces,

$$[u, u + av, u - bw] = [(1, 0, 0), (1, a, 0), (1, 0, -b)].$$

La dimensión de este subespacio es justamente el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Como $a \neq 0$ o $b \neq 0$, se tiene que $\operatorname{rg}(A) \geq 2$. Por lo tanto, $\dim([u, u + av, u - bw]) \geq 2$ para nuestra elección de u, v, y w.

10.15. Año 2023.

10.15.1. Examen: 06 Febrero 2023.

Múltiple opción.

1. Sea $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{8\times 8}$ la matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Entonces $|A|$ (el determinante de A) es igual a:

   (A) 2^7
   (B) -2^7
   (C) 0
   (D) $(-1)^7$
   (E) 1
   (F) 8

2. Sea S_λ el sistema de ecuaciones lineales dado por

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 0 \\ y + z = 4 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases},$$

   donde λ es un parámetro real ($\lambda \in \mathbb{R}$). Entonces:

   (A) S_1 es compatible determinado.
   (B) S_λ es compatible determinado si y solo si $\lambda \neq 1$.
   (C) S_2 es compatible determinado y la suma de las coordenadas de su solución es 6.
   (D) S_{-1} es incompatible.
   (E) S_0 tiene infinitas soluciones.
   (F) No existe λ tal que S_λ sea compatible indeterminado.

3. Dado $a \in \mathbb{R}$, considere r y s las rectas de $\mathbb{R}^3$ cuyas ecuaciones paramétricas están dadas por

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 - a\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

y

$$s : \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + \lambda \\ z = 2 + a\lambda_0 \end{cases} ,$$

con $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}$. Entonces:

(A) Para todo $a \in \mathbb{R}$, hay solamente un punto en r con norma igual a 5.

(B) Los vectores directores de r y s forman un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radianes (30 grados sexagesimales).

(C) Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que ambas rectas están contenidas en el mismo plano.

(D) Existen valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que la distancia entre r y s es estrictamente mayor que 1.

(E) r, para todo $a \in \mathbb{R}$, no tiene puntos de norma menor a 5.

(F) Existen infinitos valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que la distancia entre r y s es 1.

4. Sea $V := \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3} \mid A = A^t \text{ y } \operatorname{tr}(A) = 0\}$. Se consideran los conjuntos $L \subseteq G \subseteq V$:

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},$$

y

$$G := L \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces:

(A) Existe una única base B de V tal que $L \subseteq B \subseteq G$.

(B) Existen bases B de V tales que $B \subseteq G$ pero ninguna contiene a L.

(C) Existen bases B de V tales que $L \subseteq B$ pero ninguna está contenida en G.

(D) Si $B \subseteq G$, entonces B no es base de V.

(E) Existen al menos dos bases B_1 y B_2 de V tal que $L \subseteq B_1 \subseteq G$ y $L \subseteq B_2 \subseteq G$.

(F) Si $L \subseteq B$, entonces B no es base de V.

Desarrollo.

1. Se consideran los siguientes conjuntos de los respectivos espacios vectoriales con las operaciones habituales:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{p \in \mathbb{R}_7[x] \mid p(x) + p(-x) = 0\} \subseteq \mathbb{R}_7[x], \\ S_2 &= \{A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n} \mid \det(A) \leq 0\} \subseteq \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{n\times n}, \\ S_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

a) Considerando S_1, S_2 y S_3, y las inclusiones definidas arriba, decir cuáles son subespacios vectoriales y cuáles no.

b) Para aquél o aquellos casos en que S_i sea subespacio vectorial, demostrarlo. Además,

1) Hallar una base,

2) Determinar la dimensión del subespacio.

en cada caso.

c) En aquél o aquellos casos que S_i no sea subespacio, mostrar, vía contraejemplo(s), por qué no es (son) subespacio(s).

2. Sea $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ una matriz antisimétrica, tal que $a_{13} = 1$ y $a_{21} = 0$. Consideramos la matriz $X \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 6}$, tal que $X = (A|A^t)$, es decir, X es la matriz que tiene a A como submatriz en las tres primeras columnas, y a A^t como submatriz en las últimas tres columnas. Calcular el rango de X.

Solución.

1	2	3	4
B	F	F	A

10.15.2. Examen: Julio 2023.

Verdadero-falso.

Se consideran las siguientes afirmaciones para matrices $A, B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ y $C \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 2}$. Determine cuáles son verdaderas y cuáles falsas.

1. $(A \cdot B \cdot C)^2$ es un producto válido entre matrices.

2. $(A \cdot B)^2 = A^2 \cdot B^2$.

3. Si $A \cdot C = O_{3\times 2}$, entonces $A = O_{3\times 3}$ o $C = O_{3\times 2}$.

4. Si existe un entero positivo k tal que $A^k = O_{3\times 3}$, entonces $\det(A) = 0$.

5. $A \cdot B$ es invertible si, y solamente si, A es invertible y B es invertible.

6. Si $E_1, \dots, E_k \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ es una sucesión de matrices elementales tales que $E_k \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = B$, entonces $\det(A) = \det(B)$.

7. Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, entonces $\det\left(\begin{pmatrix} -e & -f & -d \\ -h & -i & -g \\ -b & -c & -a \end{pmatrix}\right) = -\det(A)$.

Múltiple opción.

1. Sea P una partícula en $\mathbb{R}^3$ que se mueve según $(t-3, 2t-2, 3t-1)$. Fijado el punto $A = (1, 2, 3)$, se considera la recta r_t en $\mathbb{R}^3$ que pasa por A y por la posición de P en el instante t (es decir, el punto $(t-3, 2t-2, 3t-1)$). Entonces, el instante t en el cual la recta r_t es ortogonal al plano $\pi : 2x - y + 3z = 1$ es:

   (A) $t = -4/3$.
   (B) $t = 16/9$.
   (C) $t = 12/5$.
   (D) No existe tal t.

Sugerencia: Puede ser útil recordar que una recta r y un plano π son ortogonales si, y solamente si, $\vec{d}$ y $\vec{n}$ son colineales (es decir, $\vec{d} \wedge \vec{n} = \vec{0}$), para cualquier dirección $\vec{d}$ de r y cualquier normal $\vec{n}$ del plano.

2. Si $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -2$, entonces $\det \begin{pmatrix} a & b & c+a & 0 & 0 & 0 \\ d & e & f+d & 0 & 0 & 0 \\ g & h & i+g & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & g & h & i \\ 4 & 1/2 & 1 & a & b & -c \\ 3 & 0 & -2 & d & e & -f \end{pmatrix}$ es igual a:

   (A) -4.
   (B) -2.
   (C) 0.
   (D) 2.

3. Se consideran los subespacios W_1 y W_2 de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ definidos a continuación:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \mid a + d = 0 \right\},$$
$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \mid x + y = 0 \text{ y } z + w = 0 \right\}.$$

   Entonces:

   (A) $\dim(W_1 + W_2) = 2$.
   (B) $\dim(W_1 + W_2) = 4$.
   (C) $\dim(W_1 + W_2) = 3$.
   (D) $\dim(W_1 + W_2) = 1$.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ la transformación lineal dada por

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y & y \\ y & y - z \end{pmatrix}.$$

   Por otro lado, se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ de polinomios de grado menor o igual a 3 y coeficientes reales, junto con la transformación lineal $S : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathbb{R}_3[x]$ donde, para cada $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{2\times 2}$, $S(A)$ es el polinomio dado por

$$S(A)(t) = \frac{1}{t} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

   Entonces, $\dim(\ker(S)) \cdot \dim(\operatorname{Im}(T))$ es igual a:

   (A) 0.
   (B) 4.
   (C) 3.
   (D) 2.

5. Sea $A = \{u, v\} \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto linealmente independiente. Para $B = \{u + w, v + w\}$ con $w \in \mathbb{R}^3$ y $w \neq \mathbf{0}$, se tiene que:

(A) El conjunto B es linealmente independiente para todo $w \in \mathbb{R}^3$.

(B) Si $w \in [u, v]$ entonces B es linealmente dependiente.

(C) B es linealmente dependiente si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $w = \lambda(u - v) - v$.

(D) Si $w \neq -u$ y $w \neq -v$ entonces B es linealmente independiente.

6. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ una función que cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} T(2t^2 - 2t + 1) &= (1, 2, 3), \\ T(t^2 + 3) &= (1, 0, 1), \\ T(3t^2 - 4t - 1) &= (1, 4, 5), \\ T(2t + 1) &= (1, 0, 0). \end{aligned}$$

Entonces:

(A) Existen infinitas transformaciones lineales que cumplen las condiciones.

(B) No existe T que cumpla todas las condiciones anteriores y que además sea una transformación lineal.

(C) Existe una única transformación lineal T que cumple las condiciones anteriores y que además $T(2t^2 + 4t - 4) = (3, -4, 5)$.

(D) Existe una única transformación lineal T que cumple las condiciones anteriores y que además $T(2t^2 + 4t - 4) = (4, 6, 5)$.

Sugerencia: Puede ayudar saber de antemano que $\{3t^2 - 4t - 1, t^2 + 3, 2t + 1\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Solución.

1	2	3	4	5	6	7
F	F	F	V	V	F	V

1	2	3	4	5	6
D	A	B	C	C	D

10.15.3. Examen: 09 Diciembre 2023.

1. Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

(A) Sean A y B matrices de $n \times n$ $(n \geq 2)$. Si $\det(AB) = 0$, entonces $\det(A) = 0$ o $\det(B) = 0$.

(B) Sea A una matriz de $n \times n$ $(n \geq 2)$. Si traza$(A) = 0$, entonces rango$(A) \neq n$.

(C) Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente de un espacio vectorial real V de dimensión finita igual a n $(n \geq 2)$, entonces $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V.

(D) Si $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ es un subconjunto de polinomios no nulos de $R_3[x]$ tal que el grado de pi es igual a i para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, entonces $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $R_3[x]$.

(E) Sea V un espacio vectorial real tal que $\dim(V) = 2n$ $(n \geq 2)$. Sean S_1 y S_2 subespacios de V tal que $\dim(S_1) = \dim(S_2) = n$. Si $S_1 \cap S_2 = \{0\}$, entonces $V = S_1 \oplus S_2$.

2. Sea la matriz A dependiendo de los parámetros reales s y t, definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & t+s \end{pmatrix}$$

Indicar la opción verdadera:

(A) El rango de A es 3 para todo s y t reales.
(B) El rango de A solo toma valores en el conjunto $\{0, 1, 2\}$ para todo s y t reales.
(C) Si $t = -2$, el rango de A es 2 y la tercera fila de A es combinación lineal de las otras.
(D) Si $s = 1$, el rango de A es 2 y la primera fila de A es combinación lineal de las otras.
(E) Si $t = 1$, el rango de A es 1 y la tercera fila de A es combinación lineal de las otras.

3. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$T(ax^2 + bx + c) = (a+b)x^2 + (2b+2c)x + a - b - 2c.$$

Una base del núcleo de T es:

(A) $\{x - 1\}$.
(B) $\{x + 1, x^2 - 1\}$.
(C) $\{1, x - 1, x^2 + 1\}$.
(D) $\{x^2 - x + 1\}$.
(E) $\{x + 1, x^2 - x\}$.

4. Sea el plano π:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha + \beta \\ y = 1 + 2\beta \\ z = 1 + \alpha - \beta \end{cases}$$

y la recta r:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

Entonces, $\pi \cap r$ es igual a:

(A) $\{(1, 2, 3)\}$.
(B) r.
(C) $\emptyset$.
(D) $\{(0, 2, -2)\}$.
(E) $\{(1, 1, 1)\}$.

5. Considere el sistema S dependiente de los parámetros reales m y n:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ n \end{pmatrix}$$

Indicar la opción verdadera:

(A) S es compatible determinado para todo valor real de m y n.
(B) Si $m = -n$, entonces S es compatible indeterminado.
(C) Si $m = 0$ y $n = -2$, entonces S es compatible indeterminado.
(D) Si $m = 1$ y $n = 1$, entonces S es compatible determinado.
(E) Si $m = n$, entonces S es compatible indeterminado.

6. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & -1 & 0 \\ 5 & -8 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es:

(A) -2.
(B) -1.
(C) 1.
(D) 2.
(E) 0.

7. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & -1 & 0 \\ 5 & -8 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Indicar la opción verdadera:

(A) $A - A^{-1} = I$.
(B) $A^2 = 0$.
(C) $A + A^{-1} = 0$.
(D) $A + A^{-1} = 2A$.
(E) $A^2 = 2I$.

8. En el espacio vectorial $R_3[x]$ considere los subespacios

$$S_1 = \{p \in R_3[x] : p(1) = p'(1)\},$$

$$S_2 = \{p \in R_3[x] : p(-1) = 0\}.$$

Una base de S_1 es:

(A) $\{x^3+2, x^2+1, 2x^3-x^2+3\}$.
(B) $\{x^3+2, x^2+1, 1\}$.
(C) $\{x^3-2x+2, x^3+x, x\}$.
(D) $\{x^3-2x+2, x^3+2, x\}$.
(E) $\{x^3+2, x^2+1, x\}$.

9. En el espacio vectorial $R_3[x]$ considere los subespacios

$$S_1 = \{p \in R_3[x] : p(1) = p'(1)\},$$
$$S_2 = \{p \in R_3[x] : p(-1) = 0\}.$$

Indicar la opción verdadera:

(A) $x \notin S_1 + S_2$.
(B) $x^2 \notin S_1 + S_2$.
(C) $S_1 \cap S_2 = [x]$.
(D) $S_1 \cap S_2 = [x^2]$.
(E) $S_1 + S_2 = R_3[x]$.

10. Indicar la opción verdadera:

(A) Existe una única transformación lineal $T : S_2 \to R_3[x]$ tal que:
$$T(x^3+1) = x+1, \quad T(x^2-1) = x-4, \quad T(x+1) = x^2+x,$$
$$T(x^3+2x+3) = 2x^2+3x+1$$
(B) Existen infinitas transformaciones lineales $T : S_2 \to R_3[x]$ tal que:
$$T(x^3+1) = x+1, \quad T(x^2-1) = x-4, \quad T(x+1) = x^2+x,$$
$$T(x^3+2x+3) = 2x^2+2x+1$$
(C) Existen infinitas transformaciones lineales $T : S_2 \to R_3[x]$ tal que:
$$T(x^3+1) = x+1, \quad T(x^2-1) = x-4, \quad T(x+1) = x^2+x,$$
$$T(x^3+2x+3) = 2x^2+3x+1$$
(D) Existe una única transformación lineal $T : S_2 \to R_3[x]$ tal que:
$$T(x^3+1) = x+1, \quad T(x^2-1) = x-4, \quad T(x+1) = x^2+x,$$
$$T(x^3+2x+3) = 2x^2+2x+1$$
(E) No existen transformaciones lineales $T : S_2 \to R_3[x]$ tal que:
$$T(x^3+1) = x+1, \quad T(x^2-1) = x-4, \quad T(x+1) = x^2+x,$$
$$T(x^3+2x+3) = 2x^2+3x+1$$

Solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	D	C	B	C	D	E	E	A

10.16. Año 2024.

10.16.1. Examen: 02 Febrero 2024.

Verdadero-falso.

Sean V y W dos espacios vectoriales reales de dimensión finita, y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces:

1. Para $v \in V$, $T(v) = 0_W$ si, y solamente si, $v = 0_V$.
2. T es inyectiva si, y solamente si, $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(T))$.
3. T es sobreyectiva si, y solamente si, $\dim(V) \geq \dim(W)$.
4. Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces el conjunto $T(B) = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es un conjunto linealmente independiente en W.
5. Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V y T es sobreyectiva, entonces el conjunto $T(B) = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ genera a W.

Múltiple opción.

1. Considere el sistema de ecuaciones lineales con tres ecuaciones y tres incógnitas x, y, z dado por:

$$(S) = \begin{cases} x + y + z = k \\ kx + y + 2z = 2 \\ x + ky + z = 4 \end{cases}$$

   donde $k \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Entonces:

   (A) (S) es incompatible para infinitos valores de k.
   (B) (S) es compatible indeterminado únicamente para un valor de k.
   (C) (S) es compatible determinado únicamente para un valor de k.
   (D) (S) es compatible indeterminado para todo $k \in \mathbb{R}$.
   (E) (S) es compatible determinado para todo $k \in \mathbb{R}$.
   (F) (S) es compatible indeterminado para infinitos valores de k.

2. Sea $A = ((a_{ij})) \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 4}$ la matriz con coeficientes dados por $a_{ij} = i - j$ con $i \in \{1, 2, 3\}$ y $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Si $B = ((b_{ij})) \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ es la matriz con coeficientes dados por

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq j, \\ 0 & \text{si } i > j, \end{cases}$$

   con $i, j \in \{1, 2, 3\}$, entonces la tercera fila de la matriz $A^t \cdot B$ es igual a:

   (A) $(2, 1, -3)$.
   (B) $(-2, 1, -3)$.

(C) $(-2, 3, 3)$.
(D) $(2, -3, -3)$.
(E) $(-2, -1, -3)$.
(F) $(-2, -3, -3)$.

3. El determinante de la matriz $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{6\times 6}$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 13 & -7 & 1 & 2 & -5 \\ -4 & 0 & 10 & 0 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

es igual a:

(A) 240.
(B) 80.
(C) -300.
(D) 300.
(E) -240.
(F) -80.

4. Sea π el plano en $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación reducida viene dada por $3x + 2y + z = 6$. Por otro lado, considere las rectas r_1 y r_2 en $\mathbb{R}^3$, donde r_1 está definida por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + 6\lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, mientras que r_2 viene dada por la ecuación reducida:

$$\frac{x-1}{9} = \frac{y+3}{6} = \frac{z-9}{3}$$

Si P es el punto de intersección entre r_1 y π, entonces la distancia de P a r_2 es igual a:

(A) 4.
(B) $2\sqrt{7}$.
(C) 20.
(D) 5.
(E) $4\sqrt{5}$.
(F) $8\sqrt{2}$.

5. Considere el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$S = \{(t,1,1),(1,0,1),(1,1,3t)\}, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Se sabe que existe un único valor de t para el cual S es linealmente dependiente. Entonces, para dicho t, el subespacio generado por S es:

(A) $\mathbb{R}^3$.

(B) La recta que pasa por los puntos $(0,0,0)$ y $(1,0,1)$.

(C) La recta que pasa por los puntos $(0,0,0)$ y $(2,2,1)$.

(D) El plano que pasa por $(0,0,0)$ y con vector normal $(-2,-1,2)$.

(E) El plano que pasa por $(0,0,0)$ y con vector normal $(2,2,1)$.

(F) El plano que pasa por $(0,0,0)$ y con vector normal $(2,1,2)$.

6. Dentro del espacio vectorial real $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ se consideran los siguientes subespacios:

$$L = \{A = ((a_{ij})) \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3} \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i < j\},$$

$$U = \{B = ((b_{ij})) \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3} \mid b_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}.$$

Es decir, L es el subespacio formado por las matrices triangulares inferiores, y U el subespacio formado por las matrices triangulares superiores. Entonces:

(A) $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3} = L \oplus U$.

(B) $\dim(L \cap U) > 3$.

(C) $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3} = L + U$ y $L \cap U \neq \{0_{3\times 3}\}$.

(D) $\dim(L \cap U) < 3$.

(E) $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3} \neq L + U$ y $L \cap U \neq \{0_{3\times 3}\}$.

(F) $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 3} \neq L + U$ y $L \cap U = \{0_{3\times 3}\}$.

7. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal y la recta r dada por la intersección de los planos:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Si $r \subseteq \operatorname{Ker}(T)$ y $T(0,0,1) = (a,b)$, entonces:

(A) $\ker(T) = \mathbb{R}^3$ si y solamente si $(a,b) = (0,0)$.

(B) $\dim(\ker(T)) = 1$ si $(a,b) \neq (0,0)$.

(C) $\dim(\ker(T)) \leq 2$ para todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

(D) $\dim(\ker(T)) \leq 1$ para todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

(E) $\dim(\ker(T)) = 2$ si $(a,b) = (0,0)$.

(F) $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 2$ si $(a,b) \neq (0,0)$.

Nota Importante: Para la siguiente pregunta, se da por hecho un resultado teórico que afirma que para cada transformación lineal $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{4\times 1} \to \mathbb{R}$ existe una única matriz fila $\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{1\times 4}$ tal que

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = ax + by + cz + dt,$$

para todo $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{4\times 1}$. Es decir, toda transformación lineal de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{4\times 1}$ a $\mathbb{R}$ está unívocamente representada por una matriz fila en $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{1\times 4}$.

8. Considere el subconjunto de $\mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{4\times 1}$ dado por:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

y sea $T : \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{4\times 1} \to \mathbb{R}$ una función que toma los siguientes valores en S:

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0, T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 4, T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 8, T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 24.$$

Entonces:

(A) Existe una única transformación lineal T que cumple lo anterior, y para su correspondiente $\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$ se tiene $a + b + c + d = 4$.

(B) Existe una única transformación lineal T que cumple lo anterior, y para su correspondiente $\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$ se tiene $a + b + c + d = 2$.

(C) Existen infinitas transformaciones lineales T que cumplen con las condiciones anteriores.

(D) Existe una única transformación lineal T que cumple lo anterior, y para su correspondiente $\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$ se tiene $a + b + c + d = 8$.

(E) Existe una única transformación lineal T que cumple lo anterior, y para su correspondiente $\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$ se tiene $a + b + c + d = 6$.

(F) No existe ninguna transformación lineal T que cumpla con las condiciones anteriores.

Solución.

1	2	3	4	5
F	V	F	F	V

1	2	3	4	5	6	7	8
B	F	A	E	D	C	A	F

10.16.2. Examen: 22 Julio 2024.

Verdadero-falso.

Ejercicio 1

Sea la matriz $A \in \mathbf{Mat}(\mathbb{R})_{4\times 4}$ dependiendo de los parámetros reales a y b, definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 2 & 2a & b & 1 \\ 2 & 3 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indicar la opción verdadera:

(D) Para $b = 0$ el rango de A es 3 para todo $a \in \mathbb{R}$.

Resolución: Para $b = 0$ realizamos la siguiente sucesión de transformaciones elementales:

1. $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$
2. $F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1$
3. $F_4 \leftarrow F_4 - F_2$
4. $F_3 \leftarrow F_3 - (3 - 2a)F_4$
5. $F_2 \leftrightarrow F_3$
6. $F_2 \leftrightarrow F_4$

y obtenemos una matriz $E = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Observamos que la matriz E está escalerizada y tiene 3 escalones para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$. Luego, el rango de A es 3 para todo $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2

Sea $S = \{(x, y, z) : x = -t, y = t, z = 2t, t \in \mathbb{R}\}$ subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y $W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] : c = a + b\}$ subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$. Indicar la opción verdadera:

(A) Existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que: $N(T) = S$, $Im(T) = W$, $T(0, -1, 3) = x^2 + x + 2$ y $T(1, 1, 1) = x^2 + 1$.

Resolución: Primero observamos que un vector de S es de la forma $(-t, t, 2t)$ con $t \in \mathbb{R}$. En particular el vector $(-1, 1, 2)$ es base de S. Luego si queremos que $N(T) = S$, es imposible que $T(-1, 1, 2) = x^2 + 1$ pues $T(-1, 1, 2) = 0$. Eso descarta las opciones **(B)** y **(D)**. Segundo, observamos que el conjunto de vectores $\{(-1, 1, 2), (0, -1, 3), (1, 1, 1)\}$ es linealmente independiente, luego resulta una base de $\mathbb{R}^3$ (por tener 3 vectores LI en un espacio de dimensión 3). Sabemos que una transformación lineal T queda únicamente determinada por los transformados (imagenes) de la base, lo que descarta la opción **(C)**. Nos quedan dos opciones: **(A)** y **(E)**. Finalmente observamos que tanto $x^2 + x + 2$ como $x^2 + 1$ pertenecen a W, por lo que no hay ninguna contradicción en pedir que $Im(T) = W$. Concluimos que la opción correcta es la **(A)**.

Ejercicio 3

Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (x - z, y, y + z).$$

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

(B) T es un isomorfismo y $T^{-1}(1, 2, 3) = (2, 2, 1)$.

Resolución: Como T está definida en espacios de la misma dimensión, basta que T sea inyectiva para que sea un isomorfismo. Para chequear inyectividad basta con ver que $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$. Luego, $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$ si y sólo si $(x - z, y, y + z) = (0, 0, 0)$. De aquí es fácil ver que $x = y = z = 0$ y concluimos que T es un isomorfismo. Finalmente aplicamos T al vector $(2, 2, 1)$ y obtenemos $T(2, 2, 1) = (1, 2, 3)$ o equivalentemente $T^{-1}(1, 2, 3) = (2, 2, 1)$.

Ejercicio 4

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3 y $\mathcal{A} = \big\{u_1, u_2, u_3\big\}$ una base de V. Considerar el conjunto $\mathcal{B} = \big\{v_1, v_2, v_3\big\}$ donde $v_1 = u_1 - u_2$, $v_2 = u_1 + u_3$ y $v_3 = u_1 + u_2 - u_3$ y un vector $v \in V$ tal que $\operatorname{coord}_{\mathcal{A}}(v) = (3, 3, 0)$. Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

(A) $\mathcal{B}$ es base de V y $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (-1, 2, 2)$.

Resolución: Primero verificamos si el conjunto $\mathcal{B}$ es LI o LD. Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ si y sólo si $\alpha(u_1 - u_2) + \beta(u_1 + u_3) + \gamma(u_1 + u_2 - u_3) = 0$ si y sólo si $(\alpha + \beta + \gamma)u_1 + (-\alpha + \gamma)u_2 + (\beta - \gamma)u_3 = 0$. Como $\mathcal{A}$ es LI, tenemos que $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $-\alpha + \gamma = 0$ y $\beta - \gamma = 0$. De aquí tenemos que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ y $\mathcal{B}$ es LI, y por ende una base de V (tres vectores LI en un espacio de dimensión 3 forman una base).

Sea $v \in V$ tal que $coord_{\mathcal{A}}(v) = (3, 3, 0)$, entonces $v = 3u_1 + 3u_2$. Luego, $(\alpha, \beta, \gamma) = coord_{\mathcal{B}}(v)$ si y sólo si $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = v$ si y sólo si $\alpha(u_1 - u_2) + \beta(u_1 + u_3) + \gamma(u_1 + u_2 - u_3) = 3u_1 + 3u_2$ si sólo si $(\alpha + \beta + \gamma - 3)u_1 + (-\alpha + \gamma - 3)u_2 + (\beta - \gamma)u_3 = 0$. Como $\mathcal{A}$ es LI (base), tenemos que $\alpha + \beta + \gamma - 3 = 0$, $-\alpha + \gamma - 3 = 0$ y $\beta - \gamma = 0$. Resolviendo este sistema nos da $\alpha = -1$, $\beta = 2$ y $\gamma = 2$.

Ejercicio 5

Sea V un espacio vectorial de dimensión $n \geq 4$. Sean U y W subespacios **distintos** de V tales que $\dim(U) = \dim(W) = n - 1$. Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

(A) $\dim(U \cap W) = n - 2$.

Resolución: Primero hagamos algunas observaciones. Tenemos que $\dim(U) = \dim(W) = n - 1$, luego $\dim(U \cap W) = n - 1$ si y sólo si $U = W$. Esto descarta la opción **(B)**. Además $\dim(U \cap W) \leq \dim(U) = n - 1$ lo que descarta la opción **(E)**. Si $\dim(U \cap W) = 0$ entonces $U \cap W = \{0\}$, por lo que su suma es directa. Luego $n = \dim(V) \geq \dim(U) + \dim(W) = 2n - 2$ que es absurdo porque $n \geq 4$, lo que descarta la opción **(D)**.

Para hallar la verdadera dimensión hacemos lo siguiente. Definimos la transformación lineal $T : U \times W \to V$ dada por $T(u, v) = u - v$. Es claro que T está bien definida y es lineal. Primero observamos que $\dim(U \times W) = 2(n - 1) = 2n - 2$. Por otro lado, es claro que T es sobreyectiva: sea $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ una base de U. Es claro que $T(u_j, 0) = u_j$, por lo que $Im(T)$ contiene un conjunto LI con $n - 1$ elementos. Como $U \neq W$, existe un vector $w \in W \setminus U$. Luego, $T(0, w) = w$ y obtenemos que $Im(T)$ contiene un conjunto LI con n elementos, por lo que T es sobreyectiva. Por último hallamos el núcleo de T. Tenemos que $(u,w) \in N(T)$ si y sólo si $T(u,w) = u - w = 0$ si y sólo si $u = w$. Luego, $N(T) = \{u \in U, w \in W : u = w\}$ de donde deducimos que $\dim(N(T)) = \dim(U \cap W)$. Por el teorema de las dimensiones obtenemos que:

$$2n - 2 = \dim(U \cap W) + n \Leftrightarrow \dim(U \cap W) = n - 2$$

Ejercicio 6

En $\mathbb{R}^4$ consideremos los subespacios:

$$S_1 = [\{(a,1,-1,2),(1,b,0,3)\}]$$

$$S_2 = [\{(1,-1,1,-2),(-2,0,0,-6)\}]$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Indicar la opción verdadera:

(E) Existe un único valor de a y un único valor de b para los cuales $S_1 = S_2$.

Resolución: Primero observamos que $dim(S_1) = 2$ para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$ y cualquier valor $b \in \mathbb{R}$. Es claro que $dim(S_2) = 2$. Luego tenemos que $S_1 = S_2$ si y sólo si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2. O equivalentemente si las dos matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

tienen rango 2. Comenzamos escalerizando la matriz A_2, por ejemplo realizando la siguiente sucesión de transformaciones elementales:

1. $F_2 \leftarrow F_2 + F_1$
2. $F_3 \leftarrow F_3 - F_1$
3. $F_4 \leftarrow F_4 + 2F_1$
4. $F_3 \leftarrow F_3 + F_2$
5. $F_4 \leftarrow F_4 - 5F_2$
6. $F_3 \leftrightarrow F_4$

y obtenemos la matriz escalerizada $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & -2 & a+1 \\ 0 & 0 & -3(a+1) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ que tiene rango 2 si y sólo si $a = -1$.

Del mismo modo escalerizamos la matriz A_2 mediante la siguiente sucesión de transformaciones elementales:

1. $F_1 \leftarrow F_1 - F_3$
2. $F_2 \leftarrow F_2 + F_3$
3. $F_4 \leftarrow F_4 + 2F_3$
4. $F_4 \leftarrow F_4 - 3F_1$
5. $F_1 \leftrightarrow F_3$
6. $F_2 \leftrightarrow F_3$

y obtenemos la matriz escalerizada $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ que tiene rango 2 si y sólo si $b = 0$.

Ejercicio 7

Sea $S_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio de las matrices simétricas 2 por 2. Considerar la transformación lineal $T : S_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ dada por:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = (a - 2b - c) + (-a + b + c)x + (b - 3c)x^2$$

y las bases $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $S_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Entonces la matriz ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$ es igual a:

(A) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Resolución: Hallamos la matriz asociada de la manera usual.

Primero calculamos $T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1-0-1)+(-1+0+1)x+(0-3)x^2 = -3x^2$ y tenemos que $coord_{\mathcal{B}}(-3x^2) = (0, 0, -3)$ que es la primer columna de la matriz.

Segundo calculamos $T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0-2-0)+(-0+1+0)x+(1-0)x^2 = -2+x+x^2$ y $coord_{\mathcal{B}}(-2+x+x^2) = (-2, 1, 1)$ que es la segunda columna de la matriz.

Por último calculamos $T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0-0-1)+(-0+0+1)x+(0-3)x^2 = -1+x-3x^2$ y $coord_{\mathcal{B}}(-1+x-3x^2) = (-1, 1, -3)$ que es la tercer columna de la matriz.

Ejercicio 8

Sea $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ matrices dadas por

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b & a+3c & a-b \\ e & d+3f & d-e \\ h & g+3i & g-h \end{pmatrix}.$$

Si el determinante de A es k, entonces el determinante de B es igual a:

(C) 3k.

Resolución: usando la linealidad del determinante por columnas obtenemos que:

$$|B| = \begin{vmatrix} b & a & a \\ e & d & d \\ h & g & g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & a & b \\ e & d & e \\ h & g & h \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} b & c & b \\ e & f & e \\ h & i & h \end{vmatrix}.$$

La primera, segunda y cuarta matriz tienen determinante 0 por tener dos columnas iguales. La tercer matriz es igual a la matriz A realizando dos intercambios de columnas (dos intercambios de columnas no cambian el signo del determinante). Luego $|B| = 3|A| = 3k$.

Ejercicio 9

Sean las rectas

$$r = \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda. \end{cases} \quad , \quad s = \begin{cases} \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} \\ \\ \frac{y-1}{2} = z + 2. \end{cases}$$

Indicar la opción verdadera:

(B) Las rectas no son paralelas pero la intersección es el conjunto vacío.

Resolución: primero hallamos la intersección de las rectas. Para esto sustituimos los valores de x, y, z que dependen de λ (puntos en la recta r) en las ecuación reducida de s, y obtenemos un sistema de 3 ecuaciones y 1 incógnita dado por:

$$\begin{cases} \frac{(3-2\lambda)+1}{3} = \frac{(1+\lambda)-1}{2} \\ \\ \frac{(1+\lambda)-1}{2} = (-1 + \lambda) + 2. \end{cases}$$

La primer ecuación tiene como solución $\lambda = 7/8$ y la segunda ecuación tiene como solución $\lambda = -2$ por lo que el sistema es incompatible, y las rectas no se intersectan (o se intersectan en el vacío).

Veamos ahora que las rectas no son paralelas. Un posible vector director de r es $(-2, 1, 1)$. Ahora tenemos que hallar los vectores directores de s. Para esto, tenemos que pasar de la forma reducida de s a la paramétrica. Despejamos los valores de x y z en función de los valores de y y obtenemos $s = \{(\frac{3y-5}{2}, y, \frac{y-5}{2}) : y \in \mathbb{R}\}$. Ahora podemos tomar como vector director de s a $(3, 2, 1)$, que no es colineal a $(-2, 1, 1)$ por lo que r y s no son paralelas.

Ejercicio 10

Se consideran los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (1, 2, 3)$ y $D = (-1, 0, 1)$ en $\mathbb{R}^3$. Sea Π el plano determinado por los puntos A, B y C. Indicar la opción verdadera:

(B) $dist(D, \Pi) = 2$.

Resolución: Primero vamos a hallar una ecuación paramétrica del plano Π. Para esto tomamos como punto base a $A = (1, 1, 1)$, y como vectores directores a $u = B - A = (1, 1, 0) - (1, 1, 1) = (0, 0, -1)$ y $v = C - A = (1, 2, 3) - (1, 1, 1) = (0, 1, 2)$. Luego tenemos la ecuación paramétrica de Π:

$$\Pi = \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases}$$

Para hallar la distancia de D a Π, vamos a hallar la recta r que es perpendicular a Π y pasa por D, luego hallamos $P = r \cap \Pi$, y deducimos que $dist(D, \Pi) = dist(D, P) = ||D - P||$. Los vectores directores de dicha recta, son perpendiculares al plano Π, luego el vector $n = u \times v = (1, 0, 0)$ es el vector buscado. Luego la recta r tiene ecuación paramétrica:

$$r = \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ahora hallamos $r \cap \Pi$ resolviendo el sistema

$$S = \begin{cases} -1 + t = 1 \\ 0 = 1 + \lambda \\ 1 = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases}$$

que tiene solución $t = 2$, $\lambda = -1$ y $\mu = -2$. Concluimos que $P = (1, 0, 1)$. Finalmente $P - D = (1, 0, 1) - (-1, 0, 1) = (2, 0, 0)$ y $||(2, 0, 0)|| = 2$.

CAPÍTULO 11

RESPONSABLES-COORDINADORES DEL CURSO.

Año	Semestre	Responsable	Coordinador
2024	II	Ana González	Federico Carrasco
2024	I	Aldo Portela	Luis Pedro Pineyrua
2023	II	Aldo Portela	Javier Cópoola
2023	I	Marco Pérez	Rafael Parra
2022	II	Marcelo Lanzilotta	Marco Pérez
2022	I	Responsable	Coordinador
2021	II	Responsable	Coordinador
2021	I	Responsable	Coordinador
2020	II	Responsable	Coordinador
2020	I	Responsable	Coordinador

BIBLIOGRAFÍA

[1] V. Costa, R. Rossiognoli, C. Sorichetti, V. Vampa Álgebra Lineal con Aplicaciones. *Editorial de la Universidad de la Plata*, Primera edición, 2018.

[2] K. Hoffman, R. Kunze. Álgebra Lineal. *Prentice- Hall Hispanoamericana*, Primera edición, 1973.

[3] S. Lang. Introducción al álgebra lineal. *Addison-Wesley Iberoamericana*, Segunda edición, 1986.

[4] R. Larson, D. Falvo. Elementary Linear Algebra. *Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company*, Sixth edition, 2009.

[5] C. Pita Ruiz. Álgebra Lineal. *McGraw-Hill Interamericana de México*, Primera edición, 1991.