Def (Estabilidad Absoluta)

Dado un método con paso $h>0$, miramos el mismo aplicado a (Ej $y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k)$)

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & \lambda < 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Si $y_k \to 0$ con $k \to \infty$, es abs. estable.

Ej: $y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k) \xrightarrow{f = \lambda y} y_{k+1} = y_k + h\lambda y_k. \Rightarrow y_{k+1} = (1+h\lambda) y_k.$

$\Rightarrow y_k = (1+h\lambda)^k \underbrace{y_0}_{=1} \to 0$? si $|1+h\lambda| < 1$.

$\to h < \frac{2}{|\lambda|}$.

$y_{k+1} = (1+h\lambda) y_k$
$= (1+h\lambda)^2 y_{k-1}$
$= \vdots$
$= (1+h\lambda)^{k+1} \underbrace{y_0}_{=1} = (1+h\lambda)^{k+1}$

$\to$ Es abs. est. si $h < \frac{2}{|\lambda|}$.

Si es abs. est. $\forall h \Rightarrow$ es incondicionalmente abs. est.

Obs: Ningún método explícito es

Runge-Kutta

$$y_{k+1} = y_k + h_k \sum_{i=1}^{s} b_i k_i \; ; \qquad k_i = f\Big(\underbrace{t_k + c_i h_k, \; y_k + h_k \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j}_{\text{puntos intermedios.}}\Big).$$

s ← etapas.

Si alguno es no nulo, queda implícito.

Ej:
- $s=1$, $c_1 = 0$, $a_{11} = 0$, $b_1 = 1 \to$ FE. (Ver pag 191).
  para ej 11.

- $s=2$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $a_{11} = a_{12} = 0$, $a_{21} = a_{22} = 1/2$, $b_1 = b_2 = 1/2$

$\to y_{k+1} = y_k + h\left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2\right).$ $\qquad k_1 = f\left(t_k + 0h, y_k + h \sum^{s} 0 \cdot k_j\right) = f(t_k, y_k)$

$k_2 = f\left(t_k + h, y_k + h\left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2\right)\right) = f(t_{k+1}, y_{k+1}).$

Falta mirar backwards Euler.

Ejercicio 10 (Del examen de diciembre de 2023)**.** Sea $f\colon [t_0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tan regular como sea necesario. Para resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = f(\cancel{t}, y(t)), & \lambda y \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

fijamos un valor $\theta\in[0,1]$ y consideramos el método con paso $h>0$ constante

$$y_{k+1} = y_k + h\left[\theta f(t_k,y_k) + (1-\theta) f(t_{k+1},y_{k+1})\right].$$

En todos los pasos se utiliza el mismo valor de θ para computar la solución numérica.

a) ¿Para cuál o cuáles valores de θ el método es implícito?

b) ¿Para cuál o cuáles valores de θ el método es incondicionalmente absolutamente estable?

c) Discutir el orden del método según el valor de θ. $\quad y_{k+1} - u(t_{k+1}) = e_k$ con $u \,/ \begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_k) = y_k \end{cases}$

[Puede ser útil identificar métodos conocidos para ciertos valores de θ, como $\theta=0$, $\theta=1/2$, o $\theta=1$.]

Ejercicio 12 (Del examen de febrero de 2024)**.** Sea $f\colon [t_0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tan regular como sea necesario. Para resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

consideramos el siguiente método de Runge-Kutta con paso constante h:

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_k,y_k), \\ K_2 &= f\left(t_k+\frac{h}{2},\ y_k+\frac{h}{4}(K_1+\underbrace{K_2}_{}\!\!)\right), \\ y_{k+1} &= y_k + hK_2. \end{aligned}$$

si no estuviera acá, sería explícito.

a) Indicar si se trata de un método explícito o implícito. Justificar.

b) Analizar la estabilidad absoluta de este método.

c) Se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{y(t)}, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

cuya solución se sabe que satisface $y'(t)>0$ para todo $t>0$. Determinar el valor de y_1 usando el método de Runge-Kutta mencionado arriba con paso $h=1$.

a) Para definir k_2, necesito k_2 del lado derecho $\Rightarrow$ Implícito.

b) Problema test:

$$\begin{cases} y' = \lambda y & \lambda<0 \text{ Fijo.} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_k,y_k), \\ K_2 &= f\left(t_k+\frac{h}{2},\ y_k+\frac{h}{4}(K_1+K_2)\right), \\ y_{k+1} &= y_k + hK_2. \end{aligned}$$

¿Cuál es $f(t,y)$? $\quad y' = f(t,y) = \lambda y.$

$y_{k+1} = y_k + h k_2. \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,?$

$k_1 = f(t_k,y_k) = \lambda y_k.$

$k_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{4}(\lambda y_k + k_2)\right)$

$= \lambda\left(y_k + \frac{h}{4}(\lambda y_k + k_2)\right)$

$$= \lambda y_n \left(1 + \frac{\lambda h}{4}\right) + \frac{\lambda h}{4} k_2 .$$

$$\Rightarrow k_2 = \lambda y_n \left(1 + \frac{\lambda h}{4}\right) + \frac{\lambda h}{4} k_2 .$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{\lambda h}{4}\right) k_2 = \lambda y_n \left(1 + \frac{\lambda h}{4}\right) \Rightarrow k_2 = \frac{\lambda \left(1 + \frac{\lambda h}{4}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda h}{4}\right)} y_n .$$

$$y_{n+1} = y_n + h k_2 = y_n \left(1 + \frac{h\lambda \left(1 + \frac{\lambda h}{4}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda h}{4}\right)} \right)$$

$$= y_n \left(\frac{1 - \frac{\lambda h}{4} + h\lambda + \frac{(\lambda h)^2}{4}}{\left(1 - \frac{\lambda h}{4}\right)} \right) = y_n \overbrace{\left[\frac{\left(1 + \frac{3}{4}\lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{4}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda h}{4}\right)} \right]}^{a}$$

$$= a^{k+1} y_0 = a^{k+1} \cdot \to 0 \Leftrightarrow |a| < 1$$

$$\left| \frac{\left(1 + \frac{3}{4}\lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{4}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda h}{4}\right)} \right| < 1 \iff \left| \left(1 + \frac{3}{4}\lambda h + \frac{(h\lambda)^2}{4}\right) \right| < \left| 1 - \frac{\lambda h}{4} \right| .$$

$$\Rightarrow \quad -1 + \frac{\lambda h}{4} \underset{①}{<} 1 + \frac{3}{4}\lambda h + \frac{(h\lambda)^2}{4} \underset{②}{<} 1 - \frac{\lambda h}{4}$$ Para esto,

① $0 < 2 + \frac{1}{2}(\lambda h) + \frac{(\lambda h)^2}{4}$.

Sea $x = \lambda h \Rightarrow 0 < 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2$

$\Leftrightarrow$ bhaskara, signo.

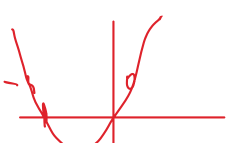
$\Rightarrow$ no tiene raíces.

$\Rightarrow$ se cumple siempre.

$\Rightarrow$ ① ✓ $\forall h$.

② $1 + \frac{3}{4}\lambda h + \frac{(h\lambda)^2}{4} < 1 - \frac{\lambda h}{4} \iff 0 + (h\lambda) + \frac{(h\lambda)^2}{4} < 0.$

$x = h\lambda \Rightarrow x + \frac{x^2}{4} < 0. \to$ raíces $0, -4$



$\Rightarrow x \in (-4, 0)$.

$\Rightarrow x > -4 \Rightarrow \lambda h > -4 \Rightarrow h < \frac{4}{|\lambda|}\left(= \frac{-4}{\lambda}\right).$ $\lambda < 0$!

$x < 0 \Rightarrow \lambda h < 0$ pero $\lambda < 0$ y $h > 0$. ✓

$\Rightarrow h > 0$ y $h < \frac{4}{|\lambda|}$.

c) Se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{y(t)}, \\ y(0) = 1 = y_0 \end{cases} \leftrightarrow \quad y(t_0) = y_0.$$

t_0

cuya solución se sabe que satisface $y'(t) > 0$ para todo $t > 0$. Determinar el valor de y_1 usando el método de Runge-Kutta mencionado arriba con paso $h = 1$.

h

$$K_1 = f(t_k, y_k),$$
$$K_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{4}(K_1 + K_2)\right),$$
$$y_{k+1} = y_k + hK_2.$$

y_1 ? $\quad y_1 = y_{0+1} = y_0 + hk_2 = 1 + hk_2. \to k = 0.$

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{4}(k_1 + k_2)\right) \underset{t_0 = 0}{=} f\left(0 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{4}(k_1 + k_2)\right)$$

?

$$k_1 = f(t_0, y_0) = f(0, 1) = \left.\frac{1}{y}\right|_{(0,1)} = 1.$$

$f(t,y) = \frac{1}{y}$.

$$\Rightarrow k_2 = f\left(\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{4}(1 + k_2)\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}(1 + k_2)} = \frac{1}{\frac{5}{4} + \frac{k_2}{4}} = \frac{4}{5 + k_2}.$$

$$\Rightarrow (5 + k_2)k_2 = 4 \Rightarrow 5k_2 + k_2^2 = 4.$$

$$\frac{-5 \pm \sqrt{25 + 16}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}.$$ ¿Cuál elijo?

Por letra, $y'(t) = f(t, y) > 0 \Rightarrow k_2 = f(\text{algo}) > 0.$

$$\Rightarrow k_2 = \frac{-5 + \sqrt{41}}{2}.$$

$\Rightarrow$ Vuelvo a $y_1 = y_0 + hk_2 = 1 + 1k_2 = 1 + \left(\frac{-5 + \sqrt{41}}{2}\right) = \frac{-3 + \sqrt{41}}{2}.$