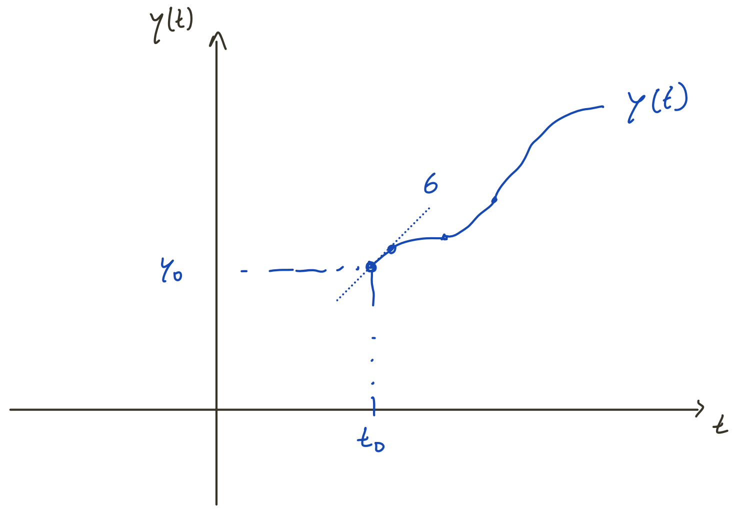
Repaso: EDOs (Ecuaciones diferenciales ordinarias).

Doy regla de evolución para $y(t)$, veo qué funciones la cumplen. (Quiero encontrar $y(t)$).

Considero $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) = f(t,y). \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $\rightarrow$ $\displaystyle\int_{t_0}^{t} y'(t)\,dt = y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(t, y(t))\,dt$

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} f(t, y(t))\,dt + y(t_0).$$



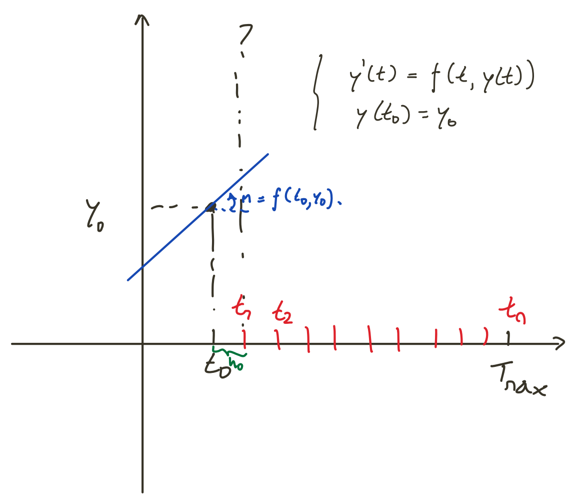
en t_0, Y_0, $\quad y'(t_0) = f(t_0, y(t_0))$

$= f(t_0, Y_0).$ $(= 6)$

ODEs $\rightarrow$ No siempre tiene forma cerrada (No puedo "integrar y listo".)

$\rightarrow$ Se usan métodos numéricos.

Métodos numéricos para ODEs.



$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

$t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < T_{max} = t_n.$

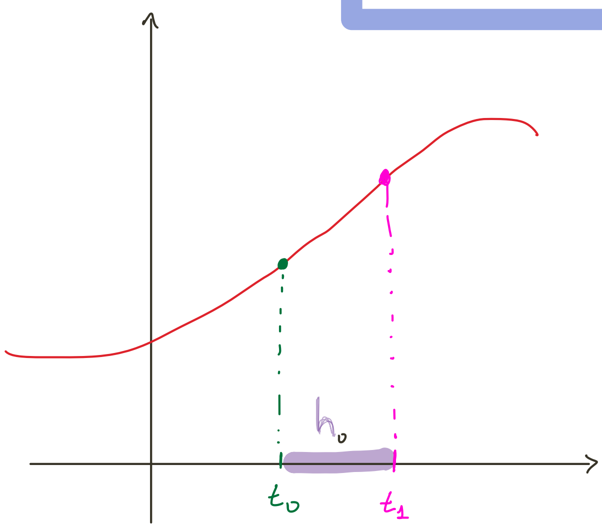
$h_0 = t_1 - t_0$

$\rightarrow y(t_1) = y(t_0 + h_0) = y(t_0) + h_0 y'(t_0) + O(h_0^2).$

$= y(t_0) + h_0 f(t_0, y_0) + O(h_0^2)$

$\to$ Euler: $\quad y_1 := y_0 + h_0 f(t_0, y_0)$. (Método directo)

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k)}$$



Otro taylor:

$$y(t_0) = y(\underbrace{t_0 - t_1}_{-h_0} + t_1) = y(t_1 - h_0)$$

Taylor en t_1.

$$= y(t_1) - h_0 y'(t_1) + O(h_0^2)$$

$$= y(t_1) - h_0 f(t_1, y(t_1)) + \cancel{O(h_0^2)}$$

$$y_0 = y_1 - h_0 f(t_1, y_1).$$

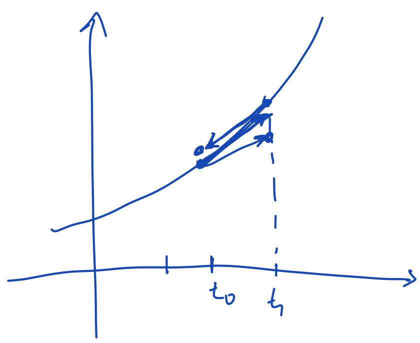
$\to$ $y_1 = \underbrace{y_0 + h_0 f(t_1, y_1)}_{g(y_1)}$ $\leftarrow$ para y_1, buscar pto fijo de $y_0 + h_0 f(t_1, x)$.

Ej: Uso Newton.

$$x = y_1 = y_0 + h_0 \sqrt{t_1^2 + y_1^2} = f(x)$$

$\Rightarrow$ **Euler implícito:**

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1}).$$



Trapecio: Combinar directo + implícito

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h_k}{2}\left(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right).$$

Ejercicio 1 (Forma estándar)**.** Se considera que la *forma estándar* de expresar una EDO (ecuación diferencial ordinaria) con condición inicial es

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

donde y puede ser escalar o vectorial. Expresar las siguientes EDO en forma estándar:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 5y = \cos t, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} y''' + e^t y'' - (t^2+1)y' + 5y = t^2, \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 0, \\ y''(1) = 3. \end{cases} \qquad \begin{cases} u'' = u' + e^t v, \\ v'' = e^t u + v', \\ u(0) = 0, \\ v(0) = 1, \\ u'(0) = 2, \\ v'(0) = -1. \end{cases}$$

Ejercicio 2 (Orden de Euler implícito)**.** Demostrar que el método de Euler hacia atrás es de primer orden.

Ejercicio 4 (Método del trapecio)**.** Hallar el valor aproximado $y(1)$ de la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y' = -2ty^2(1+t) - \dfrac{y}{1+t}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

resolviéndola con el método del trapecio con paso $h = 0{,}1$ (en la iteración de punto fijo, hacer solo tres iteraciones). Calcular el error cometido resolviendo exactamente la ecuación.
[Sugerencia: realizando el cambio de variable $z = y(1+t)$ se obtiene una ecuación de variables separables.]

$$\begin{cases} y''' + e^t y'' - (t^2+1)y' + 5y = t^2, \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 0, \\ y''(1) = 3. \end{cases}$$

" Derivadas "altas" en $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ derivadas "bajas" en $\mathbb{R}^n$ "

Pasos: 1 - Identificar orden más alto (3)

2 - Crear un vector

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ con } \quad \text{entradas.}$$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} \text{ Def}$$

3 - Derivar $Y(t)$.

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}}$$

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y''' \end{pmatrix} \leftarrow \text{Voy a la expresión.}$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ t^2 - e^t y'' + (t^2+1)y' - 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ t^2 - e^t y_2 + (t^2+1)y_1 - 5y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & (t^2+1) & -e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$= AY + b.$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y'(t) = AY + b \\ Y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \\ y''(1) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'' = u' + e^t v, & \to 2 \\ v'' = e^t u + v', & \to 2 \\ u(0) = 0, \\ v(0) = 1, \\ u'(0) = 2, \\ v'(0) = -1. \end{cases}$$

$2 + 2 \to$ para sistemas.

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$$

$$Y'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_1 + e^t v_0 \\ e^t u_0 + v_1 \end{pmatrix}}_{= f(t, Y)} = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & e^t & 1 & 0 \\ e^t & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{= A} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = AY$$

$$\begin{cases} Y'(t) = f(t, Y) \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ejercicio 4 (Método del trapecio)**.** Hallar el valor aproximado $y(1)$ de la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y' = -2ty^2(1+t) - \dfrac{y}{1+t}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

resolviéndola con el método del trapecio con paso $h = 0{,}1$ (en la iteración de punto fijo, hacer solo tres iteraciones). Calcular el error cometido resolviendo exactamente la ecuación.

[Sugerencia: realizando el cambio de variable $z = y(1+t)$ se obtiene una ecuación de variables separables.]

Forma explícita

$$z(t) = y(t) \cdot (1+t) \to z'(t) = y'(t)(1+t) + y(t)$$

$$= -2t\, y^2 (1+t)^2 - \cancel{\frac{y}{(1+t)}}\,\cancel{(1+t)} + \cancel{y} \quad \Rightarrow \quad z'(t) = -2t z^2.$$

$$= -2t\, y^2 (1+t)^2 = -2t z^2.$$

$$z'(t) = -2tz^2. \quad \rightarrow \quad -\frac{z'(t)}{z^2(t)} = 2t.$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} \frac{z'(t)}{z^2(t)}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} 2t\, dt = t_1^2 - t_0^2$$

$u(t) = z(t) \rightarrow du = z' dt$

$$-\int_{z(t_0)}^{z(t_1)} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{u}\Big|_{z(t_0)}^{z(t_1)} = \frac{1}{z(t_1)} - \frac{1}{z(t_0)}$$

$$\frac{1}{z(t_1)} = t_1^2 - t_0^2 + \frac{1}{z(t_0)} \rightarrow z(t_1) = \frac{1}{t_1^2 - t_0^2 + z(t_0)}.$$

Deshago CV. $\quad y(t)(1+t) = \dfrac{1}{t^2 - \underset{0}{t_0^2} + \underset{1}{y_0}\,\underbrace{(1+t_0)}_{1}} \rightarrow y(t) = \dfrac{1}{(1+t)(t^2+1)}. \rightarrow y(1) = \dfrac{1}{2\cdot 2} = \dfrac{1}{4}.$

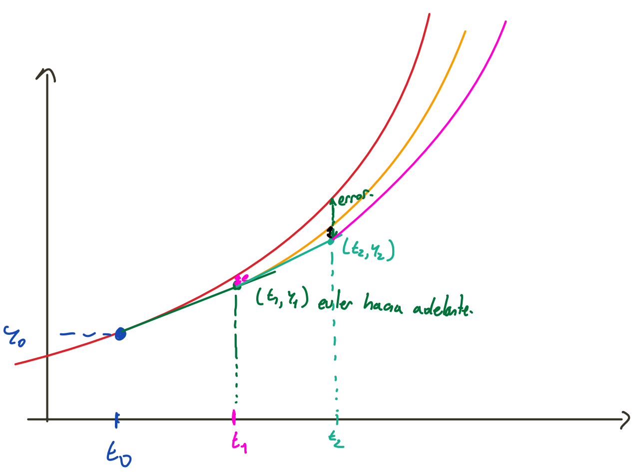
Ejercicio 2 (Orden de Euler implícito)**.** Demostrar que el método de Euler hacia atrás es de primer orden.

Cosas de la forma $y' = f(t,y)$ son: $\quad f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ continua.
f lipschitz resp. a y.

$$|f(t_1, y_1) - f(t_1, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

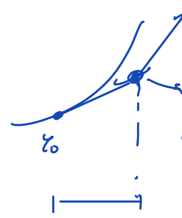
Mismo t_1!

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$



$Y_{k+1} = Y_k + h_k f(t_k, Y_k).$

$Y_2 = Y_1 + h_2 f(t_1, Y_1)$



$$\begin{cases} u(t_1) = Y_1 \\ u' = f(t,u) \end{cases}$$

Error local: $e_{k+1} = Y_{k+1} - u(t_{k+1})$ donde $u / \begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_k) = Y_k \end{cases}$

Def: Un MN es consistente de orden $p \geq 1$ si: $l_{k+1} = O(h_{k+1}^{p+1})$.

(Siempre le resto 1 a $O(h^r) = l_k$).

ej: $l_k = O(h_k^2) \to$ es de orden 1.

Para Euler implícito. $\quad y_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1})$

$$|l_{k+1}| = |y_{k+1} - u(t_{k+1})| = |y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1}) - u(t_{k+1})|$$

$$u(t_{k+1}) = u(t_k) + h_k u'(t_k) + O(h^2)$$
$$= y_k + h_k f(t_k, u(t_k)) + O(h^2) \quad A$$

$$u(t_k) = u(t_{k+1}) - h_k u'(t_{k+1}) + O(h^2).$$

$$= u(t_{k+1}) - h_k f(t_{k+1}, u(t_{k+1})) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow u(t_{k+1}) = y_k + h_k f(t_{k+1}, u(t_{k+1})) + O(h^2). \quad B$$

A o B?

$$|l_{k+1}| = |\cancel{y_k} + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1}) - \cancel{y_k} - h_k f(t_{k+1}, u(t_{k+1}))| + O(h^2).$$

$$= h_k |f(t_{k+1}, y_{k+1}) - f(t_{k+1}, u(t_{k+1}))| + O(h_k^2)$$

$$\leq h_k L |y_{k+1} - u(t_{k+1})| + O(h_k^2) = h_k L |l_{k+1}| + O(h_k^2)$$

$$\Rightarrow (1 - h_k L)|l_{k+1}| \leq O(h_k^2). \quad \Rightarrow \quad |l_{k+1}| \leq \underbrace{\frac{1}{1-h_k L}}_{\substack{\downarrow h \to 0 \\ 1}} O(h^2) \leq C\, O(h^2) = O(h^2).$$

$$\Rightarrow |l_{k+1}| = O(h_k^2) \to \text{Orden } 1.$$