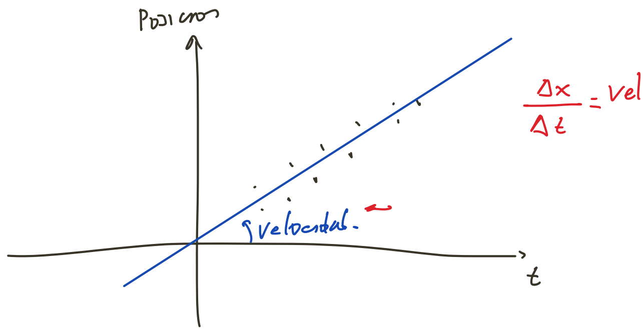
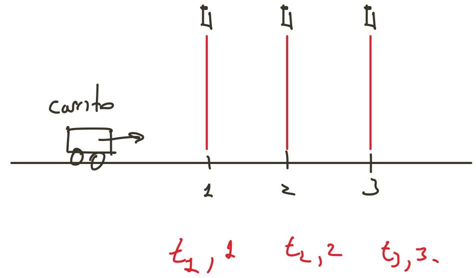
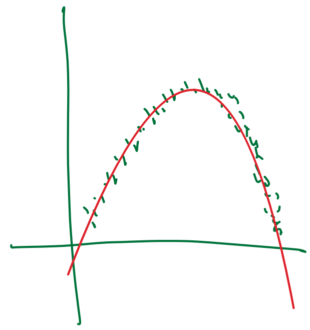
Resumen: **Mínimos cuadrados.**

Suponemos que tenemos m mediciones $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\dots,m}$







Interpolación: tengo n puntos $\to$ pol de grado $n-1$ que pasa por todos.

En general: tomamos muchas mediciones, expresamos el resultado en términos de algunas funciones.

Si elijo $\phi_1, \dots, \phi_n$ funciones, espero que los datos se ajusten a

$$a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) + \dots + a_n \phi_n(x) \quad \to \quad \text{pongo } x_i \text{ y me da } \approx y_i.$$

Cómo encontrar los a_i / tengo mejor aprox posible?

en qué sentido? Ej: mínimos cuadrados.

$\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\dots,m}$, $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ funciones. asumo que busco $(m > n)$ $\gg$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(x) \qquad a_i \text{ (fijos).}$$

Idealmente. $f(x_i) = y_i$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \dots & \phi_n(x_2) \\ & & & \vdots \\ \phi_1(x_m) & \phi_2(x_m) & \dots & \phi_n(x_m) \end{pmatrix}}_{= A} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \to$ Matriz de diseño. (la armo con datos conocidos: ϕ_i, x_j).

$$\overset{\phi, x_i}{} \; A \underline{x} = \overset{y_i}{y} \leftarrow \text{Conocida.}$$

No tiene nada que ver con x_i's.

Como $Ax = y \leftarrow \in \mathbb{R}^m$. puedo tomar $Ax - y \in \mathbb{R}^m$.

$\to$ puedo hacer $\| Ax - y \|_2$ y quiero minimizar $\| Ax - y \|_2$, $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\Updownarrow$$

minimizar $\| Ax - y \|_2^2$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Teo: x^* minimiza si $A^t A x^* = A^t y$. (Ecuaciones Normales)

Si quiero $f(x) = \sum a_i \phi_i(x)$, para hallar a_i

1- Armo A (ϕ_i, x_j)

2- planteo $\underbrace{\overset{n \times n}{A^t} \, \overset{m \times n}{A}}$ $x^* = A^t y \leftarrow$ Uso y_i $\to$ $Bx^* = w \iff x^* = B^{-1} w$.

$A^t A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. $\to$ si invierto, $x^* = (A^t A)^{-1} A^t y$

$\to a_i = x_i^*$.

Desventaja: 1. Caro el tiempo de ejecución
2. Fácil si bien condicionada, difícil si no.

— // —

QR: $Ax^* = y$.

$\exists$ $Q \in M_{m \times m}(\mathbb{R}^n)$ ortogonal, $R \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ triang. sup /

$$A = QR = \begin{pmatrix} \text{Ortogonal} \end{pmatrix} \begin{array}{c} n \\ \begin{pmatrix} \diagdown & \\ 0 & \\ \hline 0 & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} m \\ \}\, m-n \end{array} \qquad R = \begin{pmatrix} R_1 \in M_{n \times n} \\ R_2 \in M_{m-n \times n} \end{pmatrix}.$$

n

$$Ax^* = QRx^* = y \iff Rx^* = Q^{-1}y = \overset{\text{ortogonal}}{Q^t}y = \text{ortogonal}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \\ \tilde{y}_{n+1} \\ \vdots \\ \tilde{y}_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \diagdown \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} = Rx^* = Q^t y \checkmark$$

Como $R = 0$ abajo de n, me quedo con $R_{(1;n)\times(1;n)}$.

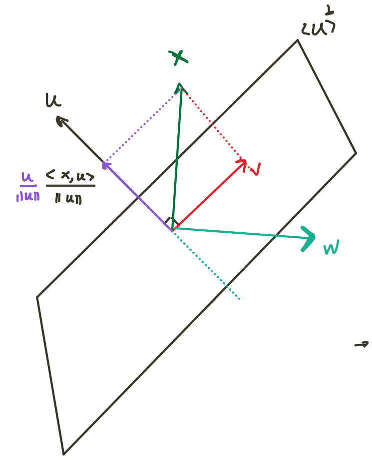
$$Rx^*_{(1;n)} = Q^t y_{(1:n)}.$$

1- Armo A.
2. hago QR.
3- hago $Q^t y$.
4 - me olvido de $y_i > n$, $R_{ij} > n$
5 - Resuelvo en pc. (Sust. hacia atrás).
6. Error = norma $Q^t y_{(n+1;m)}$

¿Y QR?

Householder:

Quiero que, fijado u, H sea una simetría especular respecto a $\langle u\rangle^\perp$



→ si le resto a x el vector $\frac{\langle x,u\rangle}{\|u\|}\frac{u}{\|u\|}$

- Consigo v

- si le resto nuevamente $\frac{\langle x,u\rangle}{\|u\|}\frac{u}{\|u\|}$

- Consigo w

→ $Hx = x - \frac{2}{\|u\|^2}\langle x,u\rangle u. \Rightarrow H = I - \frac{2}{\|u\|^2}\underbrace{u\otimes u}_{uu^t}.$

↑ transf ortogonal!

Prod de ortogonales = ortogonal.

Para armar QR, voy a querer mandar columnas de A a vectores fijos.

→ Fijo x y el vector objetivo v, necesito encontrar el u.

Sup. $H x \underset{\text{quiero}}{=} \alpha e_k$. → $|\alpha| = \|x\|$ → basta tomar $u = x + \sigma e_k$, $\sigma = \pm\|x\|_2$.

Haciendo esto, $Hx = -\sigma e_k$. (En general se toma $\sigma = sg(x_k)\|x\|_2$, permite que $x + \sigma e_k$ tengan = signo en k y evita cancelaciones.)

Para QR. $H_n \cdots H_1 A := R$, H_k manda x = col k-ésima de matriz $\tilde{A}^{(k)}$ en $\pm\|\tilde{A}^k\| e_k$.

$\to\ Q := (H_n \ldots H_1)^{-1}$.

$\to$ Si: quiero $Hx = -\|x\| e_1 \to Hx = -\sigma e_k$ y $\sigma = \|x\| \to u = x + \|x\| e_k$.

$Hx = \|x\| e_1 \to Hx = -\sigma e_k$ y $\sigma = -\|x\| \to u = x - \|x\| e_k$.

Ejercicio 4 (Reflexiones de Householder)**.** a) Sea $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$. Hallar la reflexión de Householder H que cumple $H\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -11 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

b) Hallar (computacionalmente) vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tales que $H\mathbf{u} = -\mathbf{u}$, $H\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Pueden ser útiles los comandos `eig` o `eigs`.

Ejercicio 5 (Mínimos cuadrados triangular superior)**.**

a) ¿Cuál es la norma Euclídea mínima del vector residuo para el problema de mínimos cuadrados

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}?$$

b) ¿Cuál es la solución a este problema?

Ejercicio 7 (Basado en el examen de julio de 2024)**.** Consideremos los puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0\ldots,3}$ dados por $(0,1)$, $(\pi/2, 2)$, $(\pi, 1)$, $(3\pi/2, 1)$. Queremos ajustar a dichos puntos con una función de la forma

$$y \approx f(x) = a\cos(x) + b\,\mathrm{sen}(x) + c\cos(4x),$$

en el sentido de los mínimos cuadrados.

a) ¿Cuál es la matriz de diseño del problema?

b) Escribir y resolver las ecuaciones normales asociadas al problema. ¿Están bien condicionadas?

c) Si se quiere resolver el problema de mínimos cuadrados mediante un método de ortogonalización usando reflexiones de Householder, ¿cuál es la primer transformación que se debe tomar? ¿Cuántas reflexiones se deben hacer?

a) $x = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad Hx = \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ← el vector x se usa para armar u. Después podes evaluar en x arbitrario con ese u.

Si: tiene $+$ $\to$ va con $-$

$-$ $\to$ va con $+$

Dijimos: 1 _ Si tengo $Hx = \sigma e_k \to \sigma = \pm\|x\| \to \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -11 \cdot e_1$ → tiene $-$ → va con $+$.

$\to \|x\| = 11$? $\quad \sqrt{9^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{121} = 11$. ✓

se puede.

para hacerlo, tomo $\underline{u := x + \|x\| e_1} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Lo meto en la fórmula y sale.

$Hx = x - \frac{2}{\|u\|^2} \langle x, u \rangle u \to H \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - 2 \frac{\langle (x_1, x_2, x_3), (20, 2, 6) \rangle}{\|(20, 2, 6)\|^2} \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

general. →

Ejercicio 5 (Mínimos cuadrados triangular superior).

a) ¿Cuál es la norma Euclídea mínima del vector residuo para el problema de mínimos cuadrados

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}?$$

b) ¿Cuál es la solución a este problema?

a) $r = Ax - y$

$$\|Ax - y\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 2 \\ x_2 - 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{\underbrace{(x_1 + x_2 - 2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x_2 - 1)^2}_{\geq 0} + 1} \geq 1.$$

Si consigo $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2 = 0 \\ x_2 - 1 = 0 \end{cases}$ $\to$ el mínimo es 1. $\to x_2 = 1$ $\quad x_1 + 1 - 2 = 0 \to x_1 = 1$

$\to$ es $(1,1)$, $\left\| A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - y \right\| = 1$ y es mínima.

b) $$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$A = QR. \to R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to Q = Id.$

$$R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ Nunca va a tener sol!

$\to$ Corto por los primeros n.

$\to$ Resuelvo $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ $\to (x_1, x_2) = (1,1).$

Ejercicio 7 (Basado en el examen de julio de 2024). Consideremos los puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0\ldots,3}$ dados por $(0,1)$, $(\pi/2, 2)$, $(\pi, 1)$, $(3\pi/2, 1)$. Queremos ajustar a dichos puntos con una función de la forma

$$y \approx f(x) = a\underbrace{\cos(x)}_{\phi_1} + b\underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{\phi_2} + c\underbrace{\cos(4x)}_{\phi_3},$$

en el sentido de los mínimos cuadrados.

a) ¿Cuál es la matriz de diseño del problema?

b) Escribir y resolver las ecuaciones normales asociadas al problema. ¿Están bien condicionadas?

$A = (a_{ij})_{i,j} \qquad a_{ij} = \phi_i(x_j)$

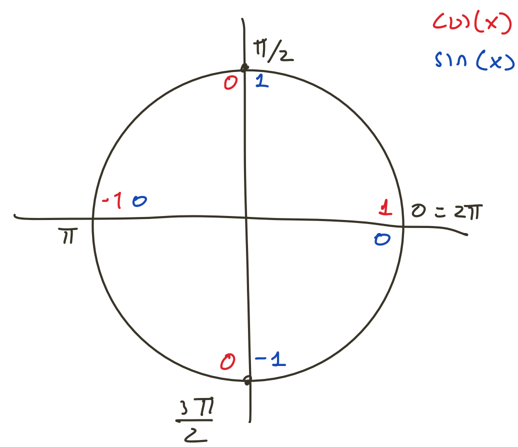
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(0) & \operatorname{sn}(0) & \cos(4\cdot 0) \\ \cos(\pi/2) & \operatorname{sn}(\pi/2) & \cos(4\cdot\pi/2) \\ \cos(\pi) & \operatorname{sn}(\pi) & \cos(4\pi) \\ \cos(\frac{3\pi}{2}) & \operatorname{sn}(\frac{3\pi}{2}) & \cos(4\cdot\frac{3\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

↑ Matriz de diseño.

$\cos(4\pi) = \cos(2\pi) = 1$

$\cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$

$\cos\left(4\cdot\frac{3\pi}{2}\right) = \cos(6\pi) = 1.$



b) Ec. normales

$$A^t A x = A^t y.$$

$A^t: ij \to ji$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim (A^t A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$A^t y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{A^tA}{\shortparallel}$$

bien cond?

$$\kappa(A^tA, \| \|_\infty) = \|A^tA\| \cdot \|(A^tA)^{-1}\| = 4 \cdot \|(A^tA)^{-1}\| = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Bien cond.

c) Si se quiere resolver el problema de mínimos cuadrados mediante un método de ortogonalización usando reflexiones de Householder, ¿cuál es la primer transformación que se debe tomar? ¿Cuántas reflexiones se deben hacer?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ tomo $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|A^{(1)}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

y la quiero mandar a $H_1 A^{(1)} = \pm \|A^{(1)}\| e_1$.

$\rightarrow u = A^{(1)} \pm \|A^{(1)}\| e_1$

eligiendo según $sg(A^{(1)}_1) = sg(1)$

$$u = A^{(1)} + \|A^{(1)}\| e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\rightarrow H_1 x = x - \frac{2}{\|u\|^2} \langle x, u \rangle u$ siendo $u =$

$$\Rightarrow H_1 A = \begin{pmatrix} \|A^{(1)}\| & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 \\ 0 & \alpha_4 & \beta_4 \end{pmatrix} \rightarrow H_2(H_1 A)$$

"e_1"

$\rightarrow$ Son 3 reflexiones.