$$f(x^*) = 0 \iff g(x^*) = x^*, \rightarrow \overbrace{g(x) - x^*}^{f.} \text{ cumple } g(x^*) - x^* = 0 \quad (4.10)$$

y proponemos un método de la forma

$f \mapsto f(x) + x \rightarrow \underbrace{f(x^*) + x^*}_{g} = x^*$

$$\rightarrow \begin{cases} x^{k+1} = g(x^k) \\ x^0 \in \mathbb{R} \end{cases} . \qquad \text{(MIG)}$$

Definición 4.7.1 (función contractiva)**.** Una función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **contractiva** en $I \subset \mathbb{R}$ si existe $0 \leq m < 1$ tal que

$$|g(x) - g(y)| \leq m\,|x - y| \quad \forall x, y, \in I. \qquad (4.11)$$

△

Pregunta

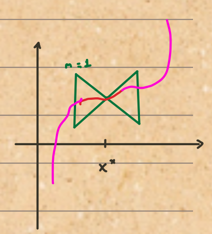
$f(x^*) = 0$

$\exists\, g \,/\, g(x^*) = 0 \iff f(x^*) = 0?$

Corolario 4.7.2 (convergencia de (MIG))**.** *Sea x^* un punto fijo de g y supongamos que existe un entorno $I_\delta = (x^* - \delta, x^* + \delta)$ en el que g es contractiva. Entonces, si $x^0 \in I_\delta$, la sucesión $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dada por (MIG) verifica*

$$x^k \in I_\delta \quad \forall k, \qquad \lim_{k\to\infty} x^k = x^*.$$

En particular, por el Ejercicio 4.2, parte b), esta conclusión vale si g es derivable en I_δ y se tiene $|g'(x)| \leq m < 1$ para todo $x \in I_\delta$.



Teorema 4.7.4 (orden y velocidad de convergencia)**.** *Sea g de clase C^r, y supongamos que la sucesión $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ generada por (MIG) converge a x^*, siendo x^* punto fijo de g. Entonces, x^k converge a x^* con orden $p \leq r$ y velocidad $\frac{|g^{(p)}(x^*)|}{p!}$, si y solo si $g^{(i)}(x^*) = 0$ para $i = 1, \ldots, p-1$ y $g^{(p)}(x^*) \neq 0$.*

Ejercicio 8 (Iteraciones de punto fijo)**.** Para resolver la ecuación $x + \log(x) = 0$ usando una iteración de punto fijo, se proponen las siguientes fórmulas:

$$x^{k+1} = -\log(x^k), \qquad x^{k+1} = e^{-x^k}, \qquad x^{k+1} = \frac{x^k + e^{-x^k}}{2}.$$

Si se sabe que la raíz está cerca de $x = 0{,}5$, ¿cuáles de las fórmulas anteriores se pueden usar? ¿Cuál es mejor? Experimentar con las tres fórmulas y discutir los resultados.

Ejercicio 9 (Un método iterativo)**.** El método de Newton para resolver la ecuación escalar $f(x) = 0$ requiere que evaluemos la derivada de f en cada iteración. Supongamos que reemplazamos el valor de la derivada por una constante d, esto es, usamos el método iterativo

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{d}.$$

a) Asumiendo que f es suficientemente regular, ¿bajo qué condiciones en d esta iteración es localmente convergente?

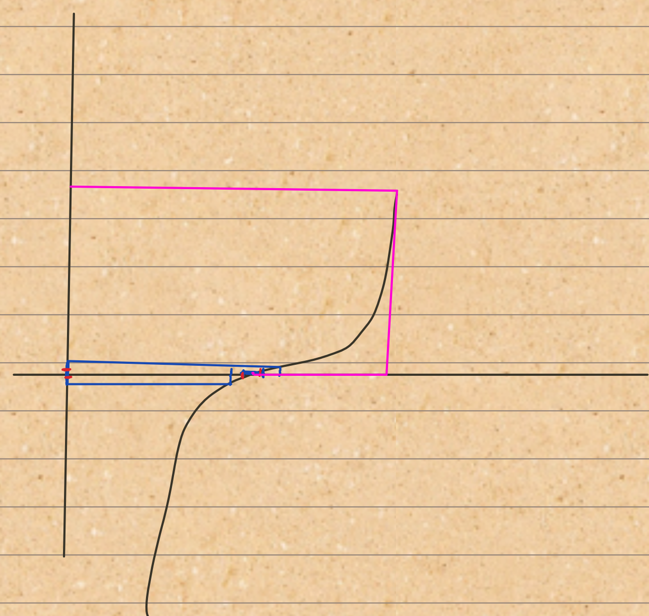
b) En general, ¿qué orden de convergencia tiene esta iteración?

c) ¿Existe un valor de d que asegure convergencia cuadrática?

d) Implementar el método en Octave y usarlo para calcular numéricamente el valor de $\log 3$ como raíz de la función $f(x) = e^x - 3$. Probar iniciando con $x^0 = 1$ y con los valores $d = 1$, $d = 2$ y $d = 3$, y verificar computacionalmente lo hallado en las partes anteriores. Para ello, para los valores de d para los que espera convergencia, computar para $k = 0, \ldots, 4$,

$$\frac{|e^{k+1}|}{|e^k|^p},$$

donde p es el orden de convergencia predicho.



Ejercicio 11 (Basado en examen de julio de 2013)**.** Se desea resolver la ecuación de punto fijo $x = f(x)$, con f de clase C^2, utilizando el siguiente método:

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}, \\ x^{k+1} = x^k + a(x^k - f(x^k)). \end{cases} \qquad \text{(M)}$$

a) Hallar $a \in \mathbb{R}$ para maximizar el orden de convergencia del método (M). Asumir que existe solución $\alpha = f(\alpha)$ y además verifica $f'(\alpha) \neq 1$. En las partes siguientes se utilizará el método (M) con el valor de a hallado anteriormente.

b) Sea $f(x) = 2/x$. Hallar el mayor intervalo I tal que $\sqrt{2} \in I$ y el método converge siempre que $x_0 \in I$.

c) Sean $x^0 = 1$ y $e^k = x^k - \sqrt{2}$ el error en el paso k. Haciendo un desarrollo de Taylor para $g(x) = x + a(x - f(x))$ alrededor de $\sqrt{2}$, y usando que $2/x^3 \leq 2$ para todo $x \in [1, 2]$, probar que $|e^{k+1}| \leq (e^k)^2$ para todo k.

d) Utilizando la parte anterior, determinar una cantidad suficiente de iteraciones para asegurar un error menor que 10^{-5}.

e) Mostrar que, si en vez de un desarrollo de Taylor se usa explícitamente la definición de x^{k+1}, se mejora un poco la cota obtenida en la parte c). Específicamente, probar que $|e^{k+1}| \leq \frac{(e^k)^2}{2}$ y afinar la cota en la cantidad de iteraciones de la parte d).

Ejercicio 8 (Iteraciones de punto fijo). Para resolver la ecuación $x + \log(x) = 0$ usando una iteración de punto fijo, se proponen las siguientes fórmulas:

$\log(x) = \log(e^{-x}) = -x \iff \log(x) + x = 0.$

$$x^{k+1} = -\log(x^k), \qquad x^{k+1} = e^{-x^k}, \qquad x^{k+1} = \frac{x^k + e^{-x^k}}{2}.$$

Si se sabe que la raíz está cerca de $x = 0{,}5$, ¿cuáles de las fórmulas anteriores se pueden usar? ¿Cuál es mejor? Experimentar con las tres fórmulas y discutir los resultados.

$x + \log(x) = 0. \iff x = -\log(x)$

Si defino $g_1(x) = -\log(x) \rightarrow x^*$ es raíz de $x + \log(x) \iff x^* = g_1(x^*)$.

$x + \log(x) = 0 \iff 2x + \log(x) = x \iff x = \dfrac{-\log(x) + x}{2}$

def $g_2(x) = \dfrac{-\log(x) + x}{2}$

tengo dos formas de resolver iterativamente $x + \log(x) = 0$:

1 : $x^* = g_1(x^*) \rightarrow x^{k+1} = g_1(x^k) = -\log(x^k)$

2 : $x^* = g_2(x^*) \rightarrow x^{k+1} = g_2(x^k) = \dfrac{-\log(x^k) + x^k}{2}$.

¿Qué criterios tengo para decir $x^{k+1} = g(x^k)$ es un buen método?

Contractividad: Si g contractiva $\Rightarrow$ buen método.

Obs: Si g es C^1 (derivable y der continua) y $|g'(\text{raíz})| < 1$

$\Rightarrow$ g contractiva en un entorno de (raíz) y el método es bueno por 4.7.2.

basta chequear cerca de la raíz.

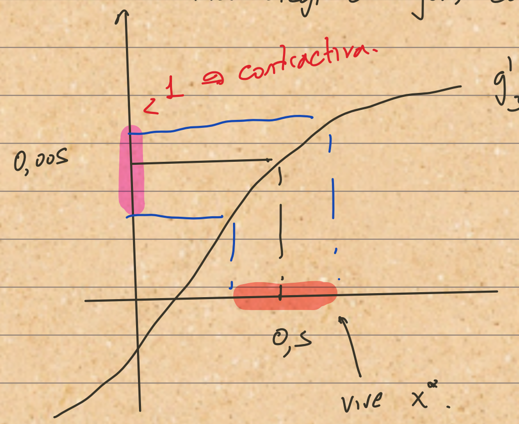
$x = 1/2$.

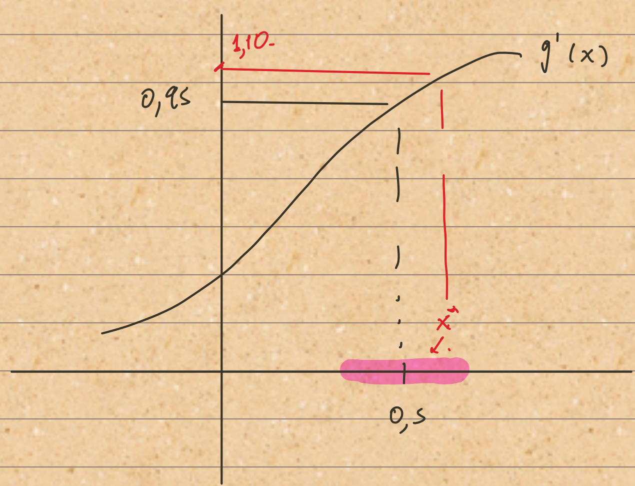
$g_1(x) = -\log(x) \qquad g_2(x) = +e^{-x} \qquad g_3(x) = \dfrac{x + e^{-x}}{2}$

$g_1'(x) = -\dfrac{1}{x} \qquad g_2'(x) = -e^{-x} \qquad g_3'(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{2}$

$|g_1'(\tfrac{1}{2})| = 2 > 1 \qquad |g_2'(\tfrac{1}{2})| = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}} < 1 \qquad |g_3'(\tfrac{1}{2})| = \dfrac{1 - 1/\sqrt{e}}{2} < 1$

Para elegir el mejor, comparo y agarro el más chico.





$|g(x_1) - g(x_2)| < 0,005\,|x_1 - x_2|$

$< 0,95\,|x_1 - x_2|$

$|g(g(x_1)) - g(g(x_2))| < 0,005\,|g(x_1) - g(x_2)|$

$< (0,005)^2\,|x_1 - x_2|.$

Ejercicio 9 (Un método iterativo)**.** El método de Newton para resolver la ecuación escalar $f(x) = 0$ requiere que evaluemos la derivada de f en cada iteración. Supongamos que reemplazamos el valor de la derivada por una constante d, esto es, usamos el método iterativo

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{d}.$$

a) Asumiendo que f es suficientemente regular, ¿bajo qué condiciones en d esta iteración es localmente convergente?

b) En general, ¿qué orden de convergencia tiene esta iteración?

c) ¿Existe un valor de d que asegure convergencia cuadrática?

d) Implementar el método en Octave y usarlo para calcular numéricamente el valor de $\log 3$ como raíz de la función $f(x) = e^x - 3$. Probar iniciando con $x^0 = 1$ y con los valores $d = 1$, $d = 2$ y $d = 3$, y verificar computacionalmente lo hallado en las partes anteriores. Para ello, para los valores de d para los que espera convergencia, computar para $k = 0, \ldots, 4$,

$$\frac{|e^{k+1}|}{|e^k|^p},$$

donde p es el orden de convergencia predicho.

a) $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{d} \rightarrow |g'(x)| < 1 \iff \left|1 - \dfrac{f'(x)}{d}\right| < 1.$

$|d - f'(x)| < |d|.$

Si x^* es el punto fijo $\Rightarrow$ $|g'(x^*)| < 1$ asegura un entorno donde es contractiva.

Si aproximamos x^* de una forma "razonable" → basta que

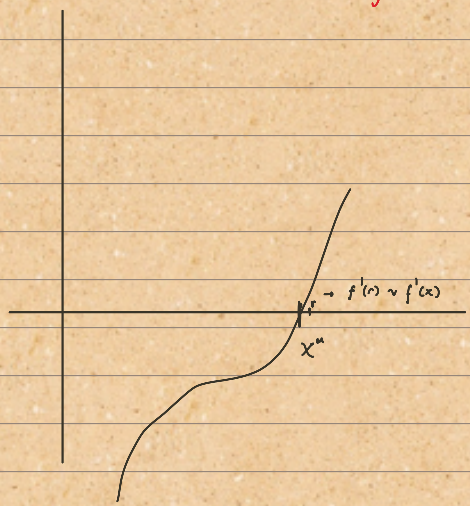
$$\left| 1 - \frac{f'(x^*)}{d} \right| < 1. \Rightarrow \text{Si } \frac{f'(x^*)}{d} \approx 1 \rightarrow \left| 1 - \frac{f'(x^*)}{d} \right| \approx 0.$$

⇒ converge cerca de x^*.

Tomo d cercano a $f'(x^*)$ y entonces $\frac{f'(x^*)}{d} \approx 1$ y vale lo anterior.

Ejemplo → Me dan f. → Uso bisección, hallo una raíz aproximada (r)
evalúo $f'(r)$ y defino $d = f'(r)$.

b) Orden ?



Tengo que derivar $g(x)$ y evaluar en x^* → $g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{d}$

$$\rightarrow g'(x^*) = 1 - \frac{f'(x^*)}{d} \rightarrow \text{Si } d \neq f'(x^*)$$

$$\rightarrow g'(x^*) \neq 0.$$

Como la primera der no se anula → Orden 1. (En general)

¿Podemos anularla de alguna forma? (Si consigo $g'(x^*) = 0$ → teo 4.7.4 me asegura Orden 2 o >.)
Si yo elijo $d = f'(x^*)$ → $g'(x^*) = 0$ → Orden > 1. (Si tengo suerte.)

Ejercicio 11 (Basado en examen de julio de 2013)**.** Se desea resolver la ecuación de punto fijo $x = f(x)$, con f de clase C^2, utilizando el siguiente método:

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}, \\ x^{k+1} = x^k + a(x^k - f(x^k)). = g(x^k). \end{cases} \qquad \text{(M)}$$

a) Hallar $a \in \mathbb{R}$ para maximizar el orden de convergencia del método (M). Asumir que existe solución $\alpha = f(\alpha)$ y además verifica $f'(\alpha) \neq 1$. En las partes siguientes se utilizará el método (M) con el valor de a hallado anteriormente.

b) Sea $f(x) = 2/x$. Hallar el mayor intervalo I tal que $\sqrt{2} \in I$ y el método converge siempre que $x_0 \in I$. $e^0 = 1-\sqrt{2} \sim 0{,}41 \to e^1$

c) Sean $x^0 = 1$ y $e^k = x^k - \sqrt{2}$ el error en el paso k. Haciendo un desarrollo de Taylor para $g(x) = x + a(x - f(x))$ alrededor de $\sqrt{2}$, y usando que $2/x^3 \leq 2$ para todo $x \in [1, 2]$, probar que $|e^{k+1}| \leq (e^k)^2$ para todo k.

d) Utilizando la parte anterior, determinar una cantidad suficiente de iteraciones para asegurar un error menor que 10^{-5}.

e) Mostrar que, si en vez de un desarrollo de Taylor se usa explícitamente la definición de x^{k+1}, se mejora un poco la cota obtenida en la parte c). Específicamente, probar que $|e^{k+1}| \leq \frac{(e^k)^2}{2}$ y afinar la cota en la cantidad de iteraciones de la parte d).

evaluadas en la raíz.

a) Basta anular tantas derivadas de g^{λ} (EN ORDEN) como pueda.

(Si puedo anular todos los órdenes >2 pero no el 2 $\Rightarrow$ Orden 2)

$$g(x) = x + a(x - f(x))$$

$$g'(\alpha) = 1 + a(1 - f'(\alpha)) = 0 \to a(1-f'(\alpha)) = -1 \to a = \frac{-1}{1-f'(\alpha)}.$$

(Cualquier otro a va a tener orden 1)

$\neq 0$ por letra.

(Esto ya asegura orden ≥ 2).

$$g''(\alpha) = a(-f''(\alpha)) = -af''(\alpha) = +\frac{f''(\alpha)}{1-f'(\alpha)} = ??$$

b)

Sea $f(x) = 2/x$. Hallar el mayor intervalo I tal que $\sqrt{2} \in I$ y el método converge siempre que $x_0 \in I$.

$$x^{k+1} = x^k + \left(\frac{-1}{1-f'(\alpha)}\right)(x^k - f(x^k)).$$

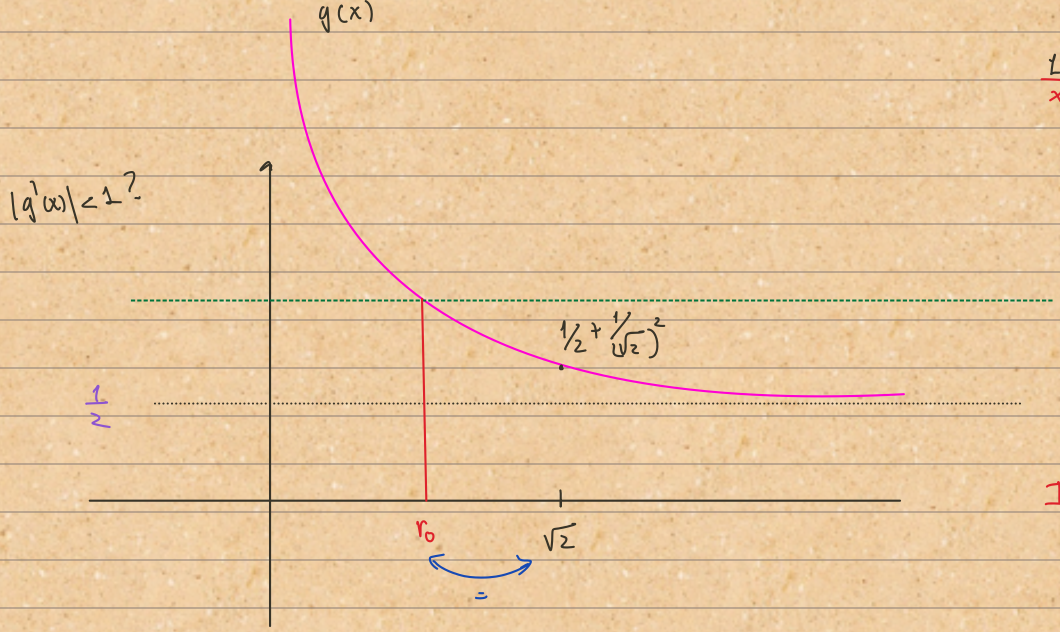
Obs: $f(\sqrt{2}) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \Rightarrow \alpha = \sqrt{2}$ ✓

$$a = \frac{-1}{1-f'(\alpha)} \to f(\alpha) = \sqrt{2}, \quad f'(x) = \frac{-2}{x^2} \to f'(\alpha) = f'(\sqrt{2}) = \frac{-2}{2} = -1.$$

$$\Rightarrow a = \frac{-1}{1-(-1)} = -\frac{1}{2}. \Rightarrow g(x^k) = x^k - \frac{1}{2}\left(x^k - \frac{2}{x^k}\right).$$

basta asegurar $|g'(x)| < 1$ (En todo I!)

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} \quad , \quad \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}\right| < 1.$$



$\frac{1}{x^2} \to$ 1 en 1

$\to 0$ en ∞

$\to \infty$ en 0.

$I = (r_0, +\infty)$.

para hallar r_0, tengo que buscar r_0 / $g'(r_0) = 1$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} = 1 \to \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} \to x^2 = 2 \to x = \pm\sqrt{2}.$$

$x = \sqrt{2}$ (es un intervalo y en 0 no def.)

$I = (\sqrt{2}, +\infty)$.

c) Sean $x^0 = 1$ y $e^k = x^k - \sqrt{2}$ el error en el paso k. Haciendo un desarrollo de Taylor para $g(x) = x + a(x - f(x))$ alrededor de $\sqrt{2}$, y usando que $2/x^3 \leq 2$ para todo $x \in [1, 2]$, probar que $|e^{k+1}| \leq (e^k)^2$ para todo k.

$$g(x) = x - \frac{1}{2}(x - f(x)) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}.$$

$$g(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

$$g'(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

$$g''(c) = \frac{2}{(c)^3}$$

$$e^{k+1} = x^{k+1} - \sqrt{2}$$

$$= g(x^k) - \sqrt{2}.$$

Lagrange.

$$= g(\sqrt{2}) + g'(\sqrt{2})(x^k - \sqrt{2}) + g''(c)\frac{(x^k - \sqrt{2})^2}{2} - \sqrt{2}.$$

$$= \cancel{\sqrt{2}} + 0(x^k - \sqrt{2}) + \frac{2}{c^3}\frac{(x^k - \sqrt{2})^2}{2} - \cancel{\sqrt{2}}$$

$c \in [1, \sqrt{2}] \subset [1, 2]$

$\sqrt{2}$ en $[1, \ldots]$

$= e^k$ (si hacen taylos

$\in [1,2]$ en el pto a aprox.)

$$\leq 2\frac{(x^k-\sqrt{2})^2}{2} = (x^k-\sqrt{2})^2 = (e^k)^2.$$

c) Error $e^0 = 1-\sqrt{2} \to e^1 \leq (e^0)^2$ y lo saco explícito. Repito hasta llegar a la cota deseada.

d) $$e^{k+1} = g(x^k) - \sqrt{2} = x^k - \frac{1}{2}\left(x^k - \frac{2}{x^k}\right) - \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2x^k - x^k + \frac{2}{x^k} - 2\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2e^k - \frac{\overbrace{{x^k}^2 - 2}^{(x^k+\sqrt{2})(x^k-\sqrt{2})}}{x^k}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2e^k - \frac{e^k(x^k+\sqrt{2})}{x^k}\right) = \frac{e^k}{2}\left(\frac{\overbrace{2x^k - x^k}^{=x^k} - \sqrt{2}}{x^k}\right)$$

$$= \frac{e^k}{2}(x^k\sqrt{2}) = \frac{(e^k)^2}{2}.$$