Repaso:

tengo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, quiero buscar un cero. $f(x^*) = 0$.

f cont, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. $\to \exists\ m \in [a,b] \ / \ f(m) = 0$.

Usamos esto para bisección:

Algoritmo:

Datos $a, b, f,$ y $f(a) f(b) < 0$.

```
while b - a ≥ eps (tolerancia)
    m ← (b + a)/2 ;

    check f(m) = 0;
        if true, end

        else
            if f(a)f(m) > 0
                a = m;
          else
                b = m
        end
end.
```

Regla falsa

$m = \dfrac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}$ en algoritmo anterior. ← Corresponde a interpolar $(a, f(a)), (b, f(b))$

$y = \dfrac{f(b) - f(a)}{x_b - x_a}(x - x_a) + f(a) \to y = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_a) + f(a)$

$\uparrow$ "0" $\to -\dfrac{\Delta x}{\Delta f} f(a) + x_a = m$

Secante Itero $x^{k+1} := x^k - \dfrac{f(x^k)(x^{k-1} - x^k)}{f(x^{k-1}) - f(x^k)}$ a partir de x_0, x_1. (Como Newton pero sin derivada)

Newton $x^{k+1} = x_k - \dfrac{f(x^k)}{f'(x^k)}$. (Sale de cortar la tg con el eje x, $y = f(x^k) - f'(x^k)(x - x^k)$.

Ejercicio 1 (Cómputo de recíprocos)**.** Para $a > 0$ fijo, buscamos determinar el valor de $1/a$. Sea

$$f(x) = \frac{1}{x} - a,$$

y busquemos la solución de $f(x) = 0$ con el método de Newton.

a) Escribir la iteración de Newton y mostrar que converge si $0 < x_0 < 1/a$.

[Sugerencia: se puede usar un argumento geométrico o demostrar que $\{x_n\}$ es monótona creciente y acotada por $1/a$.]

b) Usar esta iteración para aproximar $1/\pi$: elegir un valor inicial apropiado y calcular tres iterados. Comparar el resultado con el valor numérico dado por Octave.

Ejercicio 2 (Newton en condiciones favorables)**.** Aplicar el método de Newton a la función $f(x) = x + x^4$ y obtener una recursión explícita, expresando e^{k+1} en función de e^k (observar que $x_* = 0$). Obtener el orden de convergencia para este problema. ¿Por qué es consistente con el orden que demostramos en teórico?

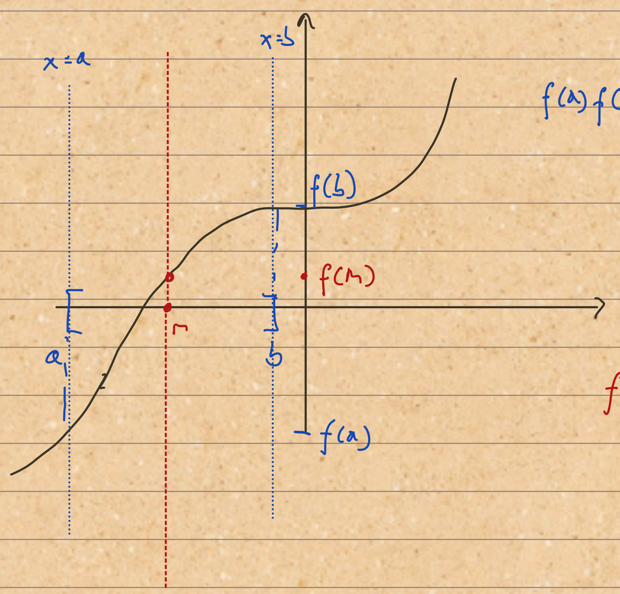
Ejercicio 4 (Secante en un caso difícil)**.** Investigar el comportamiento del método de la secante para la función

$$f(x) = \mathrm{sg}(x-a)\sqrt{|x-a|}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Hablamos de: bisección
regla falsa
secante
Newton.

Arrancamos con $f(x)$, buscamos $x^* / f(x^*) = 0$.

bisección: $[a,b]$, $f(a)f(b) < 0$. (bolzano $\Rightarrow \exists\ c \in [a,b] / f(c) = 0$).

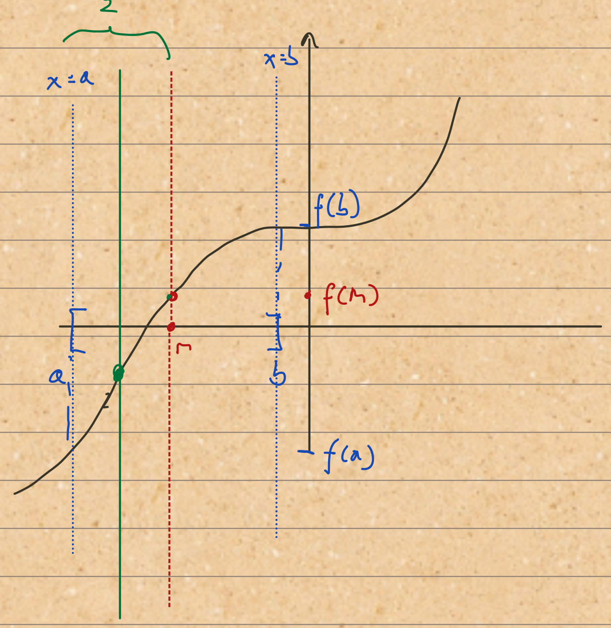


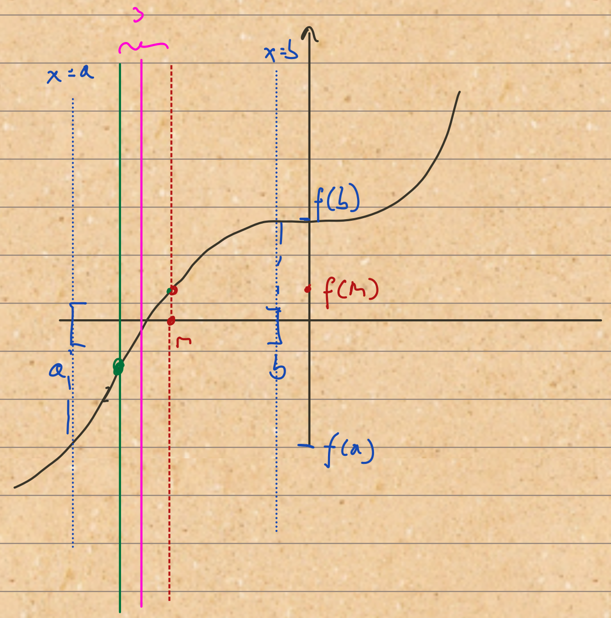
$f(a)f(b) < 0$.

$m = \dfrac{a+b}{2}$.

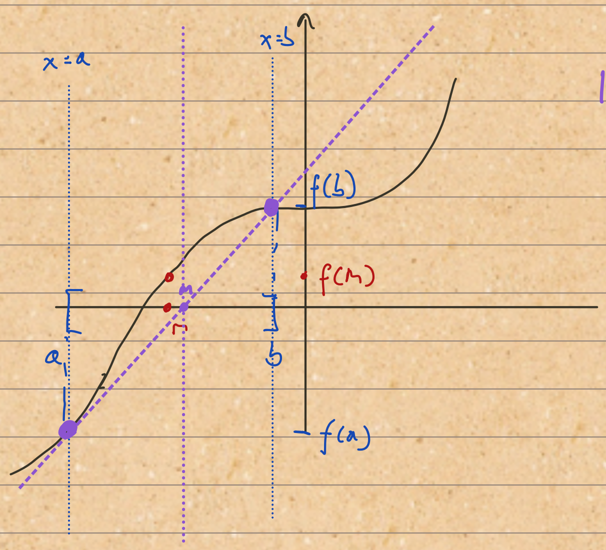
$f(a)f(m) > 0$?
if true $a \leftarrow m$
if false $b \leftarrow m$

Lo hago en while, paro si it > it_max
o error < tolerancia.





Regla falsa: Igual salvo elección de m. (Uso info de f).



Interpolo en $(a, f(a))$, $(b, f(b))$

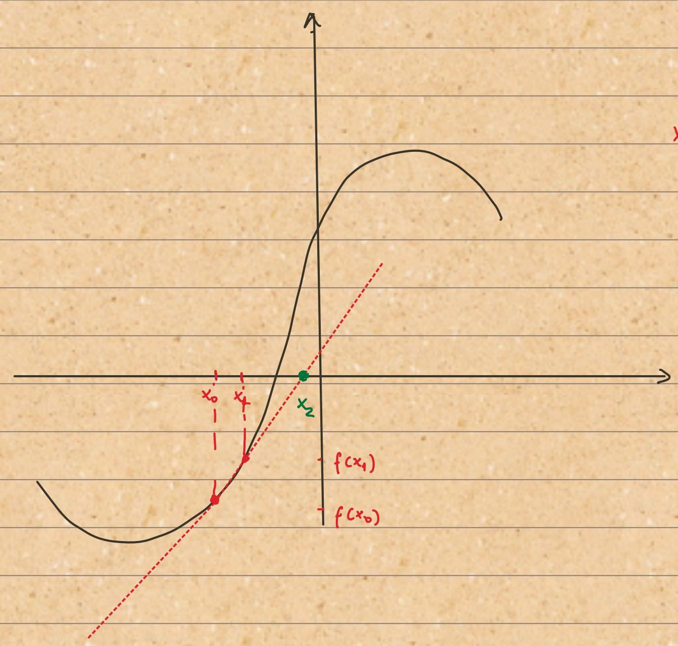
$f(a)f(b)<0.$

$$\frac{af(b) - bf(a)}{f(b)-f(a)} = m$$ ← diferente fórmula.

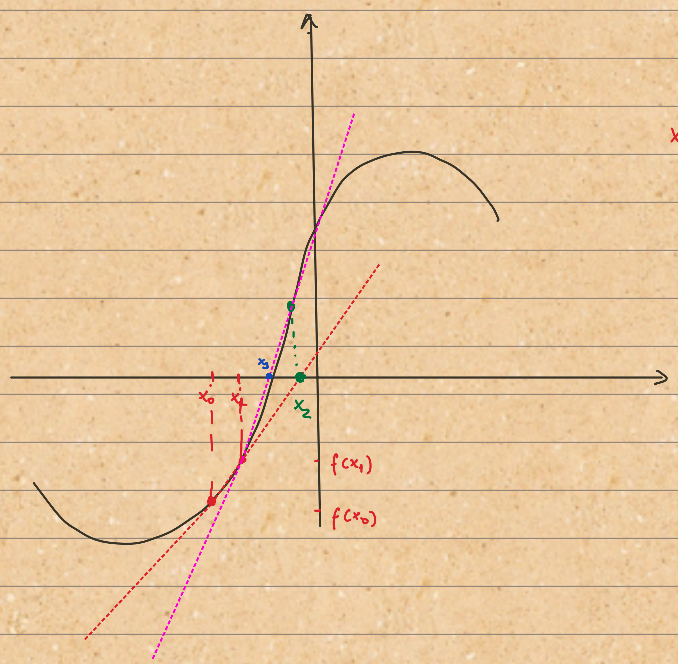
$f(a)f(m) > 0$?
if true $a \leftarrow m$
if false $b \leftarrow m$

Lo hago en while, paro si $it > it\_max$
o $error < tolerancia.$

secante.



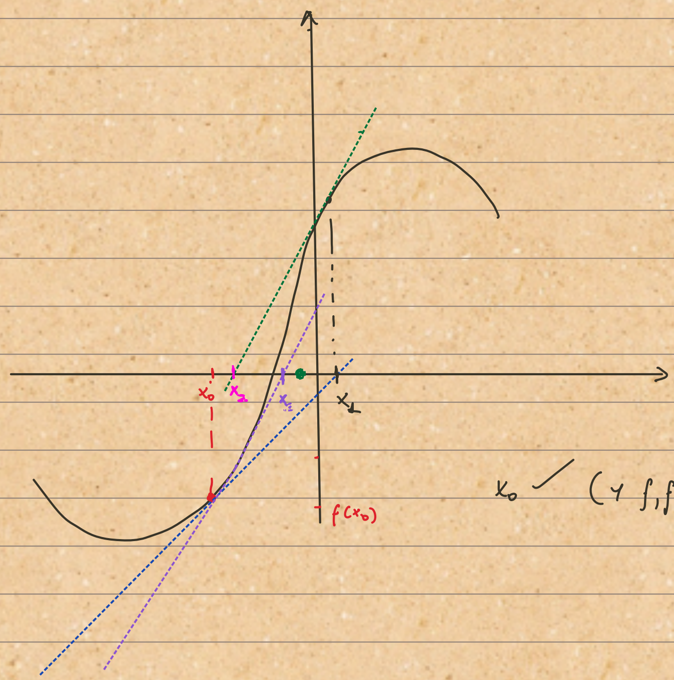
x_0, x_1



x_0, x_1

$$x^{k+1} := x^k - \frac{f(x^k)(x^{k-1} - x^k)}{f(x^{k-1}) - f(x^k)}$$

Newton



x_0 ✓ ($+ f, f'$)

Ejercicio 1 (Cómputo de recíprocos)**.** Para $a > 0$ fijo, buscamos determinar el valor de $1/a$. Sea

$$f(x) = \frac{1}{x} - a,$$

y busquemos la solución de $f(x) = 0$ con el método de Newton.

a) Escribir la iteración de Newton y mostrar que converge si $0 < x_0 < 1/a$.

[Sugerencia: se puede usar un argumento geométrico o demostrar que $\{x_n\}$ es monótona creciente y acotada por $1/a$.]

b) Usar esta iteración para aproximar $1/\pi$: elegir un valor inicial apropiado y calcular tres iterados. Comparar el resultado con el valor numérico dado por Octave.

$f(x) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{x} - a \Rightarrow x = \frac{1}{a}.$

$\Rightarrow$ Si consigo raíz, tengo $\frac{1}{a}$.

a)

$x^{k+1} = x_k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$. $\qquad f(x) = \frac{1}{x} - a, \quad f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

$$x^{k+1} = x^k - \frac{\left(\frac{1}{x^k} - a\right)}{\left(\frac{-1}{(x^k)^2}\right)} = x^k + (x^k)^2\left(\frac{1}{x^k} - a\right) = x^k + x^k - a(x^k)^2$$
$$= 2x^k - a(x^k)^2.$$

Converge si: $0 < x_0 < \frac{1}{a}$

IC: Vale para $x^1 = 2x_0 - a(x^0)^2$

$\{x^k\} \nearrow \qquad x^k < x^{k+1}$?

Svp Vale $x^k \Rightarrow$ Probamos que vale para x^{k+1}

si puedo hacer esto $\Rightarrow$ es cierto.

$x^{k+1} = 2x^k - a(x^k)^2 > 2x^k + \cancel{a}\left(\frac{-1}{\cancel{a}}\right)x^k = 2x^k - x^k = x^k$ ✓

Svp $x^k < \frac{1}{a} \Rightarrow -x^k > -\frac{1}{a}$.

$\Rightarrow$ Vale $\forall k$ (paso base es igual)

$x^{k+1} < \frac{1}{a}$? (Recordar: Monótona crec. + acot. $\Rightarrow$ Converge.)

Paso base: $x_0 < \frac{1}{a}$ ✓ HI: $x^k < \frac{1}{a}$

TI: $x^{k+1} = 2x^k - a(x^k)^2 < \frac{1}{a} \Leftrightarrow 2ax^k - a^2(x^k)^2 < 1$

$\Leftrightarrow 0 < a^2(x^k)^2 - 2ax^k + 1 = (ax^k - 1)^2$. ✓

y es > 0 porque $x^k < \frac{1}{a}$, por HI.

2)

Ejercicio 2 (Newton en condiciones favorables). Aplicar el método de Newton a la función $f(x) = x + x^4$ y obtener una recursión explícita, expresando e^{k+1} en función de e^k (observar que $x_* = 0$). Obtener el orden de convergencia para este problema. ¿Por qué es consistente con el orden que demostramos en teórico?

$$e^{k+1} = x^{k+1} - x^* \qquad (x^* = 0)$$

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}.$$

$$\Rightarrow e^{k+1} = x^{k+1} = x^k - \frac{x^k + (x^k)^4}{1+4(x^k)^3} = \frac{\cancel{x^k} + \cancel{4}^{\,3}(x^k)^4 - \cancel{x^k} - \cancel{(x^k)^4}}{1 + 4(x^k)^3}$$

$$— // —$$

Vel. de conv.

← Orden de conv.

Ahora $$\|e^{k+1}\| = \frac{3\|(x^k)^4\|}{\underbrace{\|1+4(x^k)^3\|}_{\sim 1 \; x^k \text{ chico.}}} \lesssim 3\|(x^k)^4\| = 3\|e^k\|^4.$$

Obs: $e^k = x^k - x^* = x^k$.

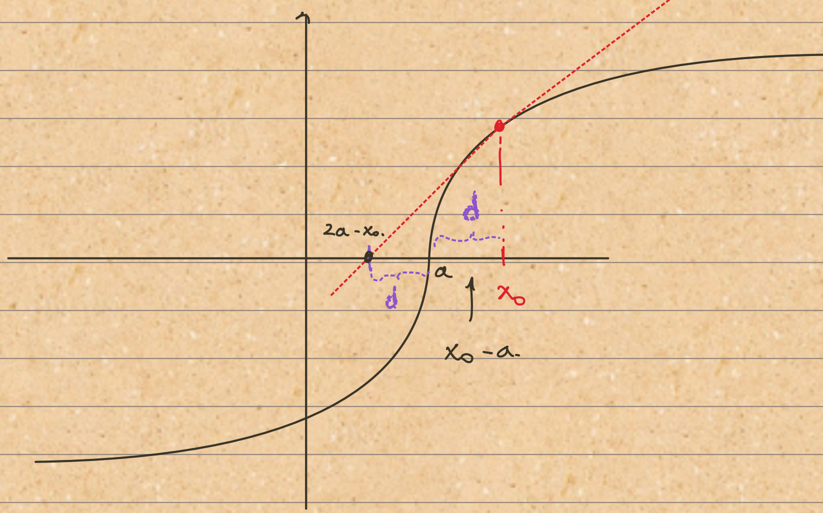
→ Conv. de orden $p=4$.

f C^2 → Newton tiene orden 2 y acá nos dio 4.

Al menos

Ejercicio 4 (Secante en un caso difícil)**.** Investigar el comportamiento del método de la secante para la función

$$f(x) = \mathrm{sg}(x-a)\sqrt{|x-a|}, \quad a \in \mathbb{R}.$$



Sup $x_0 > a$.

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x-a}$ cerca de x_0.

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-a}}$.

Fijo x_0. $\Rightarrow$ tg: $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

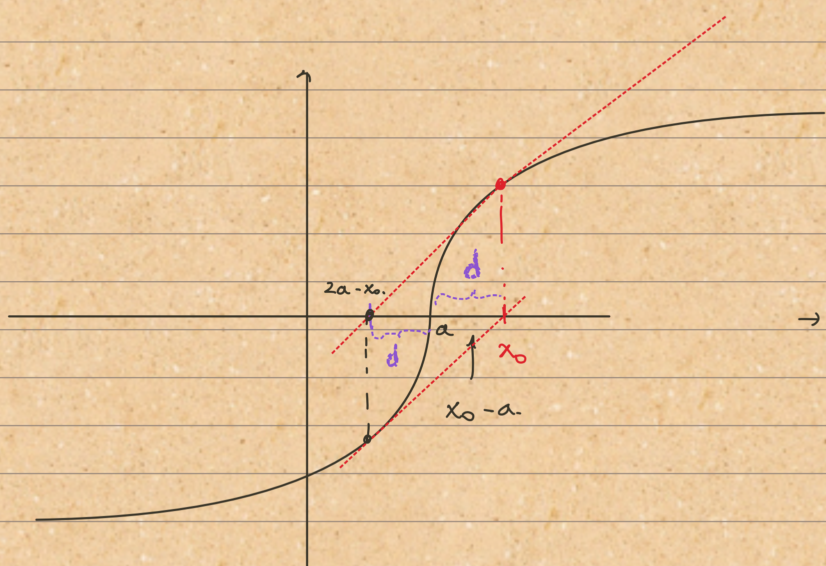
$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_0-a}} (x-x_0) + \sqrt{x_0-a}$.

Quiero $y=0$. $\Rightarrow -\sqrt{x_0-a} \cdot 2\sqrt{x_0-a} = x - x_0$.

$\Rightarrow -2(x_0-a) = x - x_0$.

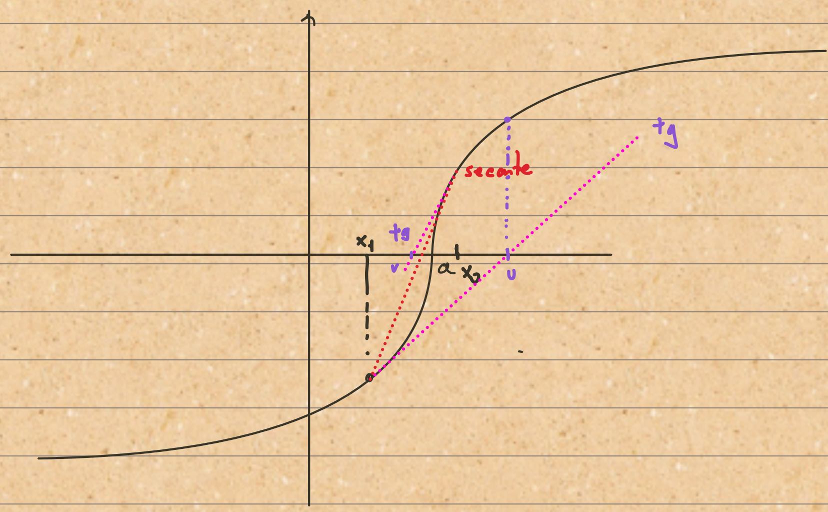
$= -x_0 + 2a = x$. raiz en $2a - x_0$.

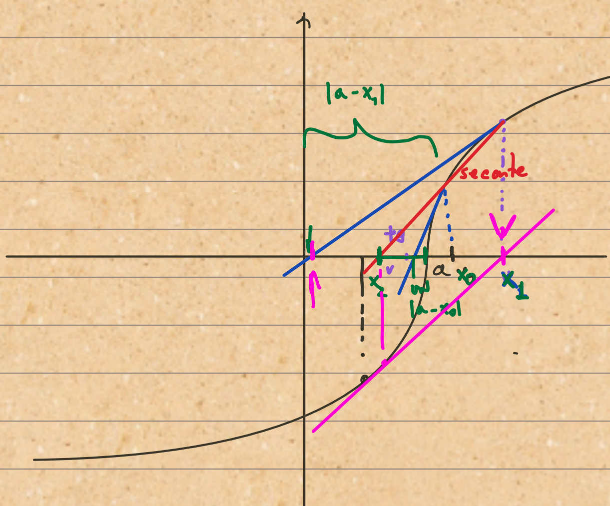
$d(a, 2a-x_0)$? $\quad d(a, 2a-x_0) = |2a - x_0 - a| = |a - x_0| = d$.



Misma cuenta para $2a - x_0 \rightarrow$ corta en x_0.

$\rightarrow$ Newton oscila





Si x_1, x_0 del mismo lado,

x_2 cumple

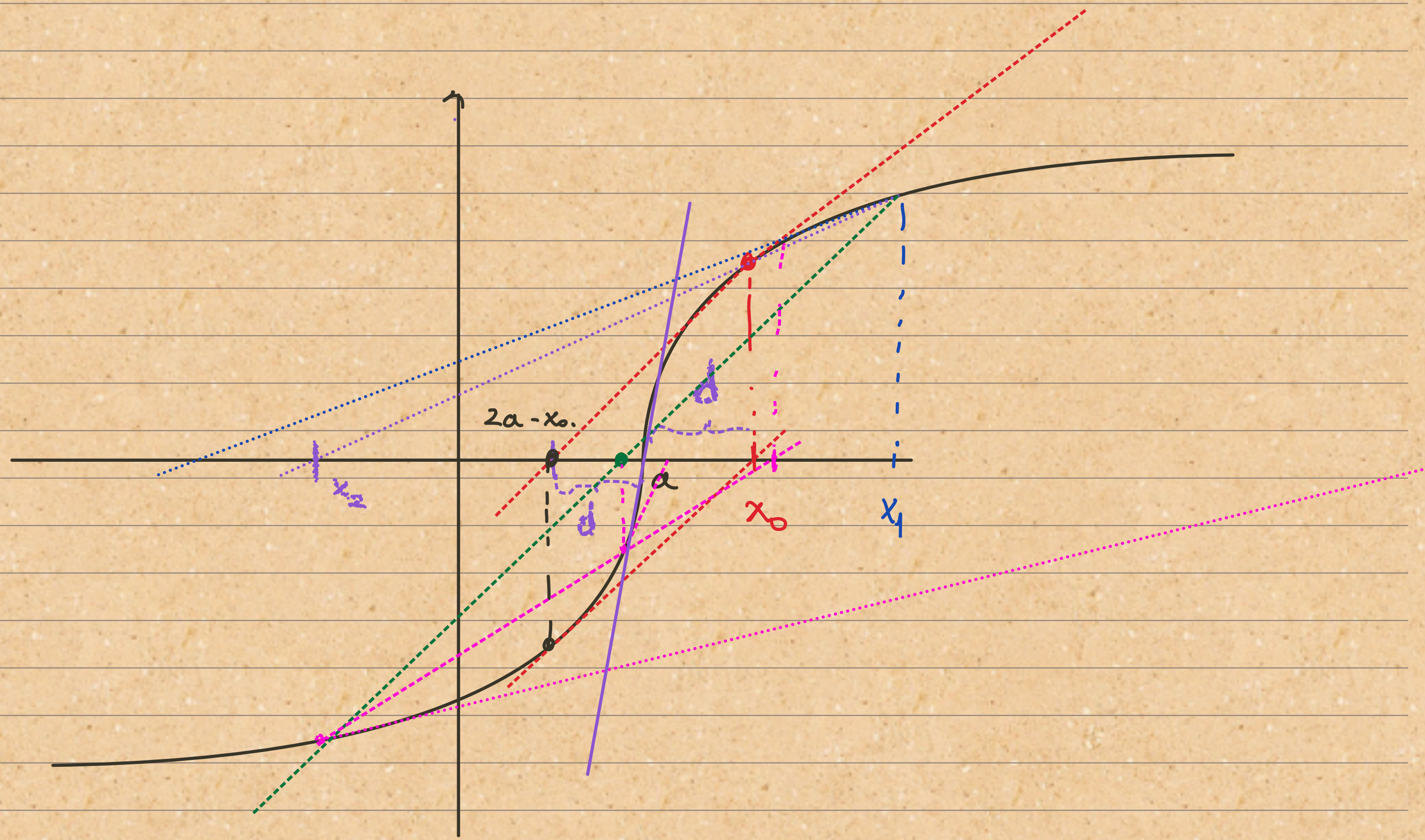
$|x_2 - a| < \max\{|x_0 - a|, |x_1 - a|\}$

$|x_3 - a| < \max\{|x_1 - a|, |x_2 - a|\}$

Si están de lados opuestos, vale también.

$\Rightarrow$ Converge.

Caso 1



(1) < max $\{8, 2\}$. (1) = 6.

(2) < max $\{2, 6\}$, (2) = 5

(3) < max $\{6, 5\}$, 4 = (3)

(4) < max $\{5, 4\}$