Ejercicio 11 (Spline cúbica)**.** Determinar una spline cúbica $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$ tal que

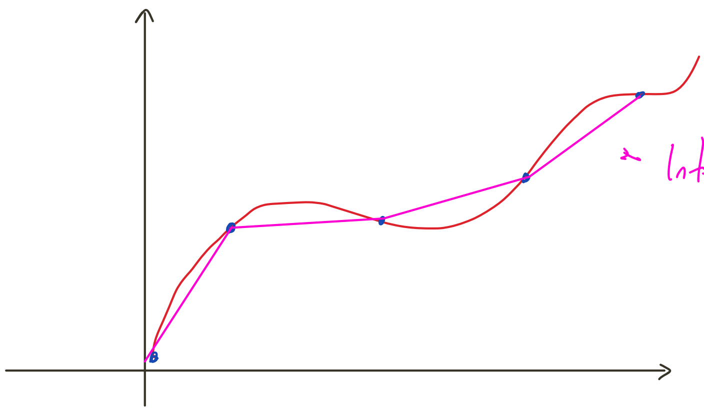
- $f(x_i) = y_i$, for $i = 1, 2, 3$, $(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 3)$, $(y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 2)$;
- $f\big|_{[x_i, x_{i+1}]}$ es un polinomio de grado menor o igual a tres para $i = 1, 2$;
- f, f', f'' son continuas en $(0, 3)$;
- $f'(0^+) = 0$, $f'(3^-) = 0$.

Esto se puede realizar construyendo un sistema de ecuaciones lineales y resolviéndolo en Octave. Graficar la solución y compararla con la salida de la función de Octave `spline`:

```
x = [0 2 3];  y = [0 0 1 2 0];
sc = spline(x, y);
plot(linspace(0,3),ppval(sc,linspace(0,3)),'-r');
```

Repaso: Interpolación (A trozos).

Idea

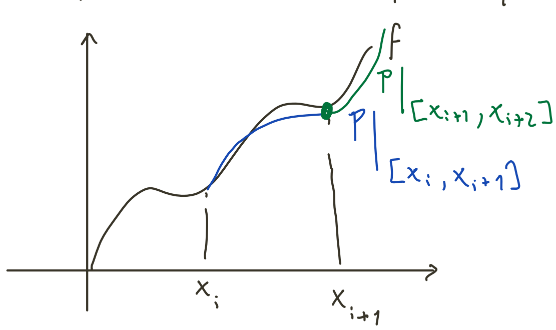


En vez de ajustar todos los datos a un polinomio, los ajustamos a "muchos polinomios"

$[x_i, x_{i+1}]$
recta $y(x_i) = y_i = f(x_i)$
$y(x_{i+1}) = y_{i+1} = f(x_{i+1})$.

La interpolante a trozos lineal es continua pero no derivable (en los puntos (x_i, y_i).)

Puedo querer hacer esto pero que sea derivable. → No alcanza grado 1.



en cada x_i → $P(x_i) = y_i$
$P'(x_i) = d_i$

Si tengo $P\big|_{[x_i, x_{i+1}]}$ y $P\big|_{[x_{i+1}, x_{i+2}]}$

$$\Rightarrow \quad p'\Big|_{[x_{i+1},\, x_{i+2}]}(x_{i+1}) = p'\Big|_{[x_i,\, x_{i+1}]}(x_{i+1}) .$$

$\Rightarrow$ para cada $[x_i, x_{i+1}]$, si interpola p,

$$\textcircled{*}, \quad \left.\begin{array}{ll} p(x_i) = y_i & p(x_{i+1}) = y_{i+1} \\ p'(x_i) = d_i & p'(x_{i+1}) = d_{i+1} \end{array}\right\} \text{ 4 condiciones.}$$

4 grados de libertad en un sistema lineal $_{4\times 4}$ $\Rightarrow$ saco la única solución

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \rightarrow (a_0, a_1, a_2, a_3) \text{ bien elegidos} \Rightarrow \text{Cumple } \textcircled{*}$$

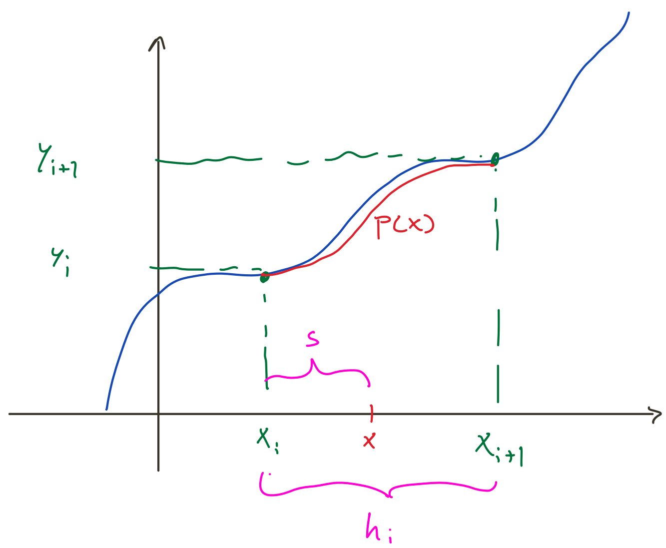
Solución:

$$p(x) = \left(\frac{3h_i s^2 - 2s^3}{h_i^3}\right) y_{i+1} + \left(\frac{h_i^3 - 3h_i s^2 + 2s^3}{h_i^3}\right) y_i + \frac{s^2(s-h_i)}{h_i^2} d_{i+1} + \frac{s(s-h_i)^2}{h_i^2} d_i .$$

$p(x_i) = y_i$, $p(x_{i+1}) = y_{i+1}$ $p'(x_i) = d_i$, $p'(x_{i+1}) = d_{i+1}$

$h_i = x_{i+1} - x_i$, $s = x - x_i$.

Me paro en $x \in [x_i, x_{i+1}]$



Si quiero $p(x) = \ldots$

$\rightarrow$ fácil $\underbrace{h_i,\ s}_{\text{calculo a partir de datos.}}$, $\underbrace{y_{i+1}, y_i}_{\text{datos}}$

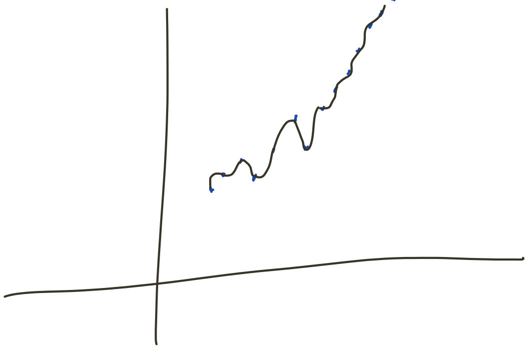
¿y los d_i?

O d_i me los dan como dato o ???

Muchas opciones: Si sé que interpolo a $f(x)$ (ejemplo, es e^{x^2+1})

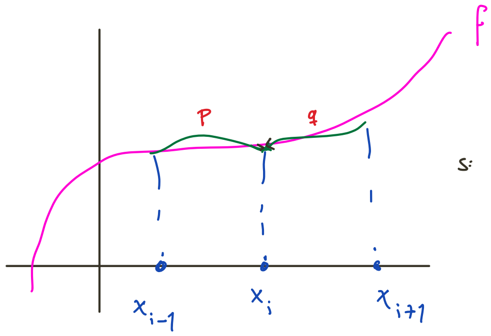
$\rightarrow$ $d_i = (e^{x^2+1})'(x_i)$, es decir lo que debería valer la derivada).

Desventaja: Necesito f!



No sé f y no tiene sentido.

Y si no conocemos la f? → Splines cúbicas (Máxima suavidad posible)



Si $p(x_i) = q(x_i)$ ← continuidad
$p'(x_i) = q'(x_i)$ ← cont. de derivada. (C^1)
$p''(x_i) = q''(x_i)$ ← Clase C^2.

Para cont → $y_i = p(x_i) = q(x_i)$ ✓ dato.
$d_i = p'(x_i) = q'(x_i)$ ← No es dato!

(3.25) Capaz que puedo acomodar d_i para $p''(x_i) = q''(x_i)$.

$$p''(x_j) = \frac{6\delta_j - 2d_{j+1} - 4d_j}{h_j}. \qquad \delta_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j}$$

$$q''(x_j) = \frac{-6\delta_{j-1} + 4d_j + 2d_{j-1}}{h_{j-1}}.$$

Si $\dfrac{6\delta_j - 2d_{j+1} - 4d_j}{h_j} = \dfrac{-6\delta_{j-1} + 4d_j + 2d_{j-1}}{h_{j-1}}$. $\Rightarrow p''(x_j) = q''(x_j) \Rightarrow C^2$.

Si $h_j d_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j) d_j + h_{j-1} d_{j+1} = 3h_j\delta_{j-1} + 3h_{j-1}\delta_j$. $\Rightarrow C^2$. (*)

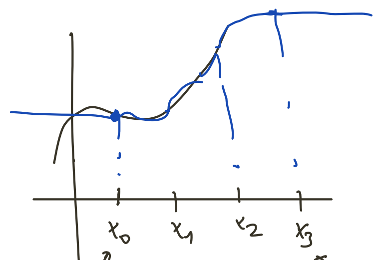
Si tengo h_j, h_{j-1}, d_{j-1}, d_{j+1}, δ_{j-1}, δ_j $\Rightarrow$ Saco d_j.

$h_j = x_{j+1} - x_j$ → lo tengo.

$h_{j-1} = x_j - x_{j-1}$

d_{j-1} ?? d_{j+1} ?? → Me da algo para Nodos interiores.

$\delta_{j-1} = \dfrac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}$ → lo tengo.



No tiene $j-1$

No tiene $j+1$.

⇒ No tengo condiciones para d_0 y d_n.

puedo elegir a dedo d_0 y d_n. Si elijo 0 → Spline natural.
Si elijo otros ($d_0 = 8$, $d_n = -\pi$) ⇒ Spline completa.

Ejercicio 11 (Spline cúbica)**.** Determinar una spline cúbica $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$ tal que

- $f(x_i) = y_i$, for $i = 1, 2, 3$, $(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 3)$, $(y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 2)$;

- $f\big|_{[x_i, x_{i+1}]}$ es un polinomio de grado menor o igual a tres para $i = 1, 2$;
- f, f', f'' son continuas en $(0, 3)$;
- $f'(0^+) = 0$, $f'(3^-) = 0$.

Esto se puede realizar construyendo un sistema de ecuaciones lineales y resolviéndolo en Octave. Graficar la solución y compararla con la salida de la función de Octave `spline`:

```
x = [0 2 3];  y = [0 0 1 2 0];
sc = spline(x, y);
plot(linspace(0,3),ppval(sc,linspace(0,3)),'-r');
```

Cual es la f?

$$p(x) = \left(\frac{3h_i s^2 - 2s^3}{h_i^3}\right) y_{i+1} + \left(\frac{h_i^3 - 3h_i s^2 + 2s^3}{h_i^3}\right) y_i + \frac{s^2 (s - h_i)}{h_i^2} d_{i+1} + \frac{s(s-h_i)^2}{h_i^2} d_i .$$

$p(x_i) = y_i$, $p(x_{i+1}) = y_{i+1}$ $p'(x_i) = d_i$, $p'(x_{i+1}) = d_{i+1}$

$h_i = x_{i+1} - x_i$, $s = x - x_i$.

Necesito esto.

x_1 0 , 0 y_1 0 $d_1 = p'(0) = 0$ por dato
x_2 2 , 1 y_2 d_2 → falta d_2. Como quiero f'' continua, uso (*)
x_3 3 , 2 y_3 . 0 $d_3 = p'(3) = 0$ por dato

Si $h_j d_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j) d_j + h_{j-1} d_{j+1} = 3h_j \delta_{j-1} + 3h_{j-1}\delta_j$. ⇒ C^2. (*)

Si tengo h_j, h_{j-1}, d_{j-1}, d_{j+1}, δ_{j-1}, δ_j ⇒ Saco d_j.

$h_j = x_{j+1} - x_j$ → lo tengo

$h_{j-1} = x_j - x_{j-1}$

Como falta d_2. → $j=2$. d_3, d_1.

$j=2$ en (*).

$$h_2 d_1 + 2(h_1+h_2)d_2 + h_1 d_3 = 3h_2\delta_1 + 3h_1\delta_2.$$

$d_1 = d_3 = 0$ (letra)

$h_2 = x_3 - x_2 = 3-2 = 1$

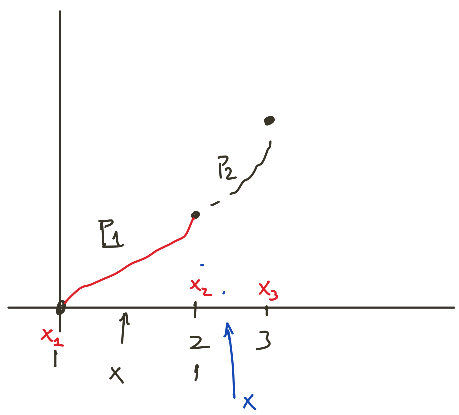
$h_1 = x_2 - x_1 = 2-0 = 2.$

$$\delta_2 = \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} = \frac{2-1}{1} = 1 \qquad \delta_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$1.0 + 2(1+2)d_2 + 2.0 = 3.1\left(\frac{1}{2}\right) + 3(2).1$$

$$6d_2 = \frac{3}{2} + 6. = \frac{15}{2} \Rightarrow d_2 = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} \to d_2 = 5/4.$$

Tengo todos los datos para armar p.. (Terminé).



Cual es la f?

x_1	0 ,	0	y_1	0	d_1
x_2	2 ,	1	y_2	5/4	d_2
x_3	3 ,	2	y_3 .	0	d_3

$$p_i(x) = \left(\frac{3h_i s^2 - 2s^3}{h_i^3}\right) y_{i+1} + \left(\frac{h_i^3 - 3h_i s^2 + 2s^3}{h_i^3}\right) y_i + \frac{s^2(s-h_i)}{h_i^2} d_{i+1} + \frac{s(s-h_i)^2}{h_i^2} d_i .$$

$p(x_i) = y_i$, $p(x_{i+1}) = y_{i+1}$ $p'(x_i) = d_i$, $p'(x_{i+1}) = d_{i+1}$

$h_i = x_{i+1} - x_i$, $s = x - x_i$.

↑ Necesito esto.

$$p_1(x) = \left(\frac{3h_1(x-0)^2 - 2(x-0)^3}{h_1^3}\right).1 + \cancel{\left(\frac{h_1^3 - 3h_1 x^2 + 2x^3}{h_1^3}\right)0} + x^2\frac{(x-h_1)}{h_1^2}\,5/4 + \cancel{x\frac{(x-h_1)^2}{h_1^2}.0}$$

$(s = x-0 = x)$

$$p_1(x) = \frac{6x^2 - 2x^3}{8} + \frac{x^2(x-2)}{4} \cdot \frac{s}{4}$$

$p_2(x)$ se calcula igual, pero $s = x - 2$.