Ejercicio 12 (Convergencia II)**.** Analizar, según $\alpha \in \mathbb{R}$, las propiedades de convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para la resolución de un sistema lineal cuya matriz es

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 15 (Radio espectral grande)**.** El objetivo de este ejercicio es analizar qué ocurre con una sucesión $\{x^k\}$ generada mediante la iteración estacionaria

$$\mathbf{x}^{k+1} = Q\mathbf{x}^k + \mathbf{r}, \quad \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$$

en el caso en que $\rho(Q) \geq 1$.

a) Sea $\mathbf{e}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*$ el error en el paso k-ésimo. Demostrar que se cumple la ecuación $\mathbf{e}^k = Q^k\mathbf{e}^0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

b) Probar que si $\mathbf{e}^0$ es un vector propio de Q con valor propio asociado λ, entonces $\mathbf{e}^k = \lambda^k\mathbf{e}^0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

c) Probar que, si Q tiene un valor propio λ tal que

  a) $|\lambda| < 1$, entonces existe un $\mathbf{x}^0$ tal que $\mathbf{x}^k$ converge a $\mathbf{x}^*$;

  b) $|\lambda| = 1$, entonces existe un $\mathbf{x}^0$ tal que $\|\mathbf{e}^k\|_2$ permanece constante, y por lo tanto la iteración no converge;

  c) $|\lambda| > 1$, entonces existe un $\mathbf{x}^0$ tal que $\|\mathbf{e}^k\|_2 \to \infty$, y por lo tanto la iteración diverge.

Ejercicio 16 (Divergencia del método SOR)**.** Demostrar que $\det(Q_{SOR}) = (1-\omega)^n$ y deducir que el método SOR solamente puede ser convergente si ω está en el intervalo $(0, 2)$.

SOR: $Q_{SOR} := (D - \omega E)^{-1}\left((1-\omega)D + \omega F\right) \quad r_{SOR} := \omega (D - \omega E)^{-1} b.$

Repaso (MIM)

Idea: 2 tipos (hasta ahora)
- Métodos directos → arremangarse + cuentas (EG + pivoteo)
- Métodos indirectos → aprox a solución.

ahora.

Método indirecto: parto de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ → $x^{k+1} = f(x^k)$, f cierta regla.
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$x_0 \xrightarrow{f} x^1 \to x^2 \xrightarrow{f} x^3 \to \dots \to x^*$ ← final.

Si $f(x) = Qx + r$, $Q \in M_n(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{R}^n$ $\rightarrow$ Método matricial.

Nos interesa resolver $Ax = b$, A, b dados.

$$A = \begin{pmatrix} & & -F \\ & D & \\ -E & & \end{pmatrix} \rightarrow A = D - E - F$$

$$Q_J = D^{-1}(E+F), \quad Q_{GS} = (D-E)^{-1}F. \quad \rightarrow x^{k+1} = Qx^k + r.$$

$$r_J = D^{-1}b \qquad r_{GS} = (D-E)^{-1}b$$

¿Cuándo $x^k \to x^* \;/\; Ax^* = b$?

$$\rho(M) = \max_{\substack{i=1,\dots,n \\ \lambda_i \text{ vp.}}} |\lambda_i|$$

Criterio: converge sii $\rho(Q) < 1$.

Más fácil: Miro A y si $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \; \forall i$

o $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ji}| \; \forall i$ $\Big\} \Rightarrow$ GS y J convergen.

(Diagonal dominante)

Suficiente.

Ejercicio 12 (Convergencia II). Analizar, según $\alpha \in \mathbb{R}$, las propiedades de convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para la resolución de un sistema lineal cuya matriz es

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

<u>Método 1</u> diag dominante.

$$\left.\begin{array}{l} |\alpha| > 0 + 1 = 1 \\ |\alpha| > 0 \\ |\alpha| > 0 + 1 = 1 \end{array}\right\} |\alpha| > 1.$$

Si $|\alpha| > 1 \Rightarrow$ J y GS convergen.

Para hallar ρ : dos matrices, Q_J, Q_{GS}.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix} = -E + D - F \quad , \quad -E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad -F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$Q_J = D^{-1}(E+F) = \frac{1}{\alpha} Id \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para hallar $\rho(Q_J)$ necesito λ_i vp.

$$\det(Q_J - \lambda Id) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1/\alpha \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -1/\alpha & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 1/\alpha \left(\frac{-\lambda}{\alpha}\right) = -\lambda^3 + \frac{\lambda}{\alpha^2} = \lambda\left(-\lambda^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) = 0$$

$\rightarrow \lambda = 0.$

$\lambda = \pm\sqrt{1/\alpha^2} = \pm 1/|\alpha|$

$$\rho(Q_J) = \max\{0, \frac{1}{|\alpha|}, \frac{1}{|\alpha|}\} = \frac{1}{|\alpha|}$$

$\rightarrow$ Converge sii $\rho(Q_J) < 1 \iff \frac{1}{|\alpha|} < 1 \iff 1 < |\alpha|.$

$$Q_{GS} = (D-E)^{-1} F = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha & 0 \\ -1/\alpha^2 & 0 & 1/\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha & 0 \\ -1/\alpha^2 & 0 & 1/\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha^2 \end{bmatrix}$$

$$\pi(Q_{GS}) = \det(Q_{GS} - \lambda I_d) = 0.$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1/\alpha \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha^2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2\left(\lambda - 1/\alpha^2\right) = 0. \rightarrow \lambda = 0. \quad \text{o} \quad \lambda = 1/\alpha^2.$$

x fila

$$\rho(Q_{GS}) = \max\{0, \tfrac{1}{\alpha^2}\} = \frac{1}{\alpha^2} < 1 \iff |\alpha| > 1.$$

Ejercicio 15 (Radio espectral grande)**.** El objetivo de este ejercicio es analizar qué ocurre con una sucesión $\{x^k\}$ generada mediante la iteración estacionaria

$$\underbrace{\lim \mathbf{x}^{k+1}}_{x^*} = \underbrace{\lim Q\mathbf{x}^k}_{Q \underbrace{\lim x^k}_{x^*} + r.} + \mathbf{r}, \quad \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$$

en el caso en que $\rho(Q) \geq 1$.

a) Sea $\mathbf{e}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*$ el error en el paso k-ésimo. Demostrar que se cumple la ecuación $\mathbf{e}^k = Q^k\mathbf{e}^0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

b) Probar que si $\mathbf{e}^0$ es un vector propio de Q con valor propio asociado λ, entonces $\mathbf{e}^k = \lambda^k\mathbf{e}^0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

c) Probar que, si Q tiene un valor propio λ tal que

   a) $|\lambda| < 1$, entonces existe un $\mathbf{x}^0$ tal que $\mathbf{x}^k$ converge a $\mathbf{x}^*$;

   b) $|\lambda| = 1$, entonces existe un $\mathbf{x}^0$ tal que $\|\mathbf{e}^k\|_2$ permanece constante, y por lo tanto la iteración no converge;

   c) $|\lambda| > 1$, entonces existe un $\mathbf{x}^0$ tal que $\|\mathbf{e}^k\|_2 \to \infty$, y por lo tanto la iteración diverge.

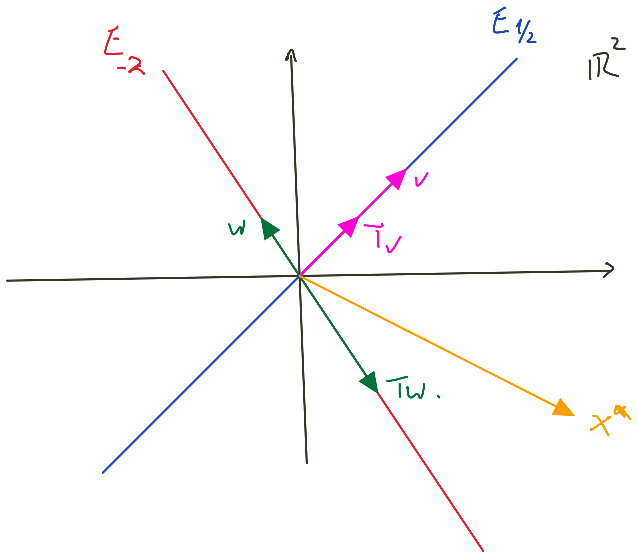
a) $e^{k+1} = x^{k+1} - x^*$ $\qquad$ x^* sol $\Rightarrow$ punto fijo $\quad x^* = Qx^* + r.$

$$= Qx^k + r - (Qx^* + r) = Q(x^k - x^*).$$
$$= Qe^k.$$
$$\underset{\text{repito}}{=} Q\cdot(x^k - x^*) = Q\left(Qx^{k-1} + \cancel{r} - (Qx^* + \cancel{r})\right)$$
$$= Q\cdot(Q(x^{k-1} - x^*)). = Q^2(x^{k-1} - x^*) = Q^2 e^{k-1}.$$

$$= Q^{k+1} e^0 .$$

b) $e^0 \in E_\lambda$. $(Qe^0 = \lambda e^0)$. $\Rightarrow$ $Q^2 e^0 = Q(Qe^0) = Q(\lambda e^0) = \lambda Q e^0 = \lambda . \lambda e^0$.

Análogo para $Q^k e^0$. $\to$ $Q^k e^0 = \lambda^k e^0$.



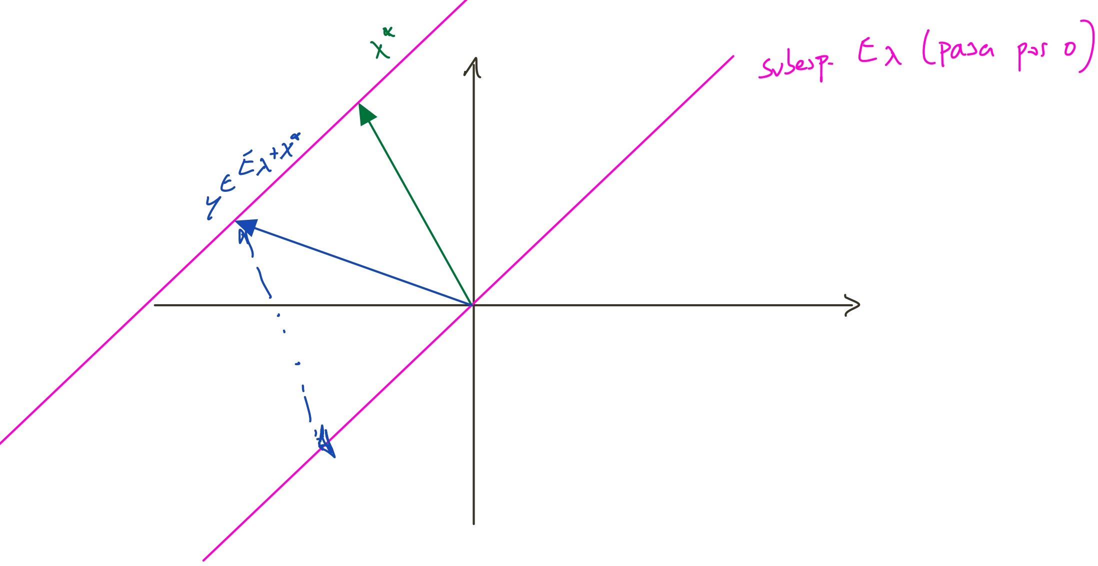
$x^k \to x$ sii $x^k - x \to 0$ sii $e^k \to 0$.

Tomo $y \in E_\lambda$, $|\lambda| < 1$. $\Rightarrow$ $y = x_0 - x^* \in E_\lambda$. (Existe x_0 / $y = x_0 - x^*$)

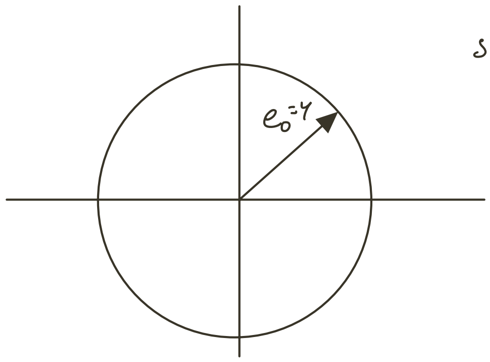
$\Rightarrow Q^k y = \lambda^k y$ si $|\lambda| < 1 \Rightarrow \lambda^k y \to 0$.

Para que $y \in E_\lambda \Rightarrow x^0 - x^* \in E_\lambda$. $\Rightarrow x^0 \in \underbrace{E_\lambda + x^*}_{Y}$.

Igual que antes $y \in E_\lambda$, $|\lambda| = 1$ $\Rightarrow \|y\| = \|\lambda^k y\| = \underbrace{|\lambda|^k}_{1} \|y\|$



$|\lambda| = 1$

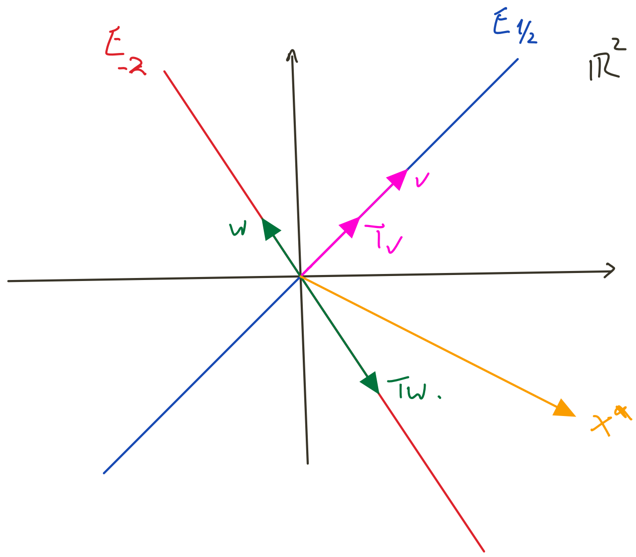


si $e_0 \in E_{|\lambda|=1} \Rightarrow Qe_0 = \lambda e_0$ y $|\lambda e_0| = |\lambda||e_0| = |e_0|$.

$\Rightarrow$ el error "gira" y no converge

$|\lambda| > 1$

$\to \|Q^k e^0\| = |\lambda|^k \|e^0\| \to \infty.$



Ejercicio 16 (Divergencia del método SOR)**.** Demostrar que $\det(Q_{SOR}) = (1-\omega)^n$ y deducir que el método SOR solamente puede ser convergente si ω está en el intervalo $(0, 2)$.

<u>SOR:</u> $Q_{SOR} := (D-\omega E)^{-1}\left((1-\omega)D + \omega F\right)$ $\quad r_{SOR} := \omega (D-\omega E)^{-1} b.$

$$\det(Q_{SOR}) = \det\left((D-\omega E)^{-1}\left((1-\omega)D+\omega F\right)\right) = \det\left((D-\omega E)^{-1}\right)\det\left((1-\omega)D+\omega F\right)$$

$$= \frac{\det\left((1-\omega)D+\omega F\right)}{\det(D-\omega E)}.$$

$\det(\text{Triang}) = \prod \text{diagonal}.$

$$= \frac{\det\left((1-\omega)D\right)}{\det(D)} = \frac{(1-\omega)^n \cancel{\det(D)}}{\cancel{\det(D)}} = (1-\omega)^n.$$

$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

$\rho(Q) < 1$ sii $\omega \in (0,2)$.

$\chi_\lambda(A) = \det(A - \lambda I) \to p(\lambda) = \det(A-\lambda I)$ cumple $p(0) = \det(A)$.

$\Rightarrow$ el término indep de $p(\lambda) = \det(A)$.

Si $p(x) = a_0(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$, a_0 término dominante

α_i raíces.

$$= a_0 x^n + \cdots + a_0 \prod \alpha_i$$

$$A \quad \begin{bmatrix} -\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & -\lambda \end{bmatrix}$$

para $\chi_\lambda(A) \to a_0 = (-1)^n$

$$\Rightarrow |\det(A)| = |a_0 \prod \alpha_i| = |\prod \alpha_i|$$

$\rho(Q) < 1 \Rightarrow \max|\lambda_i| < 1 \Rightarrow$ son todos < 1

$$\Rightarrow |\prod \lambda_i| < 1 \Leftarrow |\det(A)| < 1 \Leftrightarrow (1-w)^n < 1 \Leftrightarrow w \in (0,2)$$