Ejercicio 1 (Un sistema esencialmente triangular inferior). Explicar cómo resolver de forma eficiente un sistema lineal de la forma

$$\begin{bmatrix} \mathcal{O} & L_1 \\ L_2 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

donde L_1 y L_2 son matrices triangulares inferiores y no singulares, $\mathcal{O}$ es la matriz nula, B es una matriz arbitraria, y los vectores están particionados acordemente. Describir los pasos necesarios en términos de las submatrices y vectores dados.

Ejercicio 2 (Sustitución hacia atrás). Escribir una función `x = atras(U,b)` que tome como entradas una matriz triangular superior U y un vector columna $\mathbf{b}$, y resuelva el sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mediante sustitución hacia atrás.

Ejercicio 6 (Fórmula de actualización de la inversa). Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invertible, considerar la matriz $B = A - \mathbf{u}\mathbf{v}^t$, donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son columnas de n elementos.

a) Probar que si B es invertible entonces su inversa es

$$B^{-1} = A^{-1} + \alpha(A^{-1}\mathbf{u})(\mathbf{v}^t A^{-1})$$

para un escalar adecuado α que se determinará.
[Sugerencia: $\mathbf{v}^t A^{-1}\mathbf{u}$ es un número distinto de 1.]

b) Aplicar la fórmula anterior para corregir la inversa de A cuando se efectúa un cambio en una de sus columnas. Para ello seguir estos pasos:

- Definir una matriz A de 6×6 y hallar su inversa con el comando `inv`.
- Definir una matriz B igual a A excepto en su columna 4, que será de unos.
- Elegir vectores columna $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de forma que $B = A - \mathbf{u}\mathbf{v}^t$.
- Usar la fórmula anterior para hallar B^{-1} y verificar el resultado.

Ejercicio 9 (Descomposición de Cholesky). El algoritmo de Cholesky permite factorizar matrices simétricas definidas positivas de forma eficiente.

Recordemos que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es *simétrica* si $A = A^t$ y es *definida positiva* si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

- la forma cuadrática $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ es positiva para todo vector $\mathbf{x}$ no nulo;
- todos los valores propios de A son positivos;
- existe una matriz $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangular superior tal que $A = R^t R$. Esta es la llamada descomposición de Cholesky.

Usando la última condición arriba e igualando los elementos en la fórmula $A = R^t R$, obtenemos

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} r_{ki} r_{kj}, \quad i \leq j.$$

Usar estas ecuaciones en un orden adecuado para computar los elementos de R de forma eficiente.

Resolver $\quad Ax = b \quad A \in M_n(\mathbb{R}) \quad b \in \mathbb{R}^n$

$\to$ EG + pivoteo $\sim O\left(\frac{2}{3}n^3\right)$

triangular sup $\to$ sust. hacia atrás $\quad O(n^2)$

" $\quad$ inf $\to$ sust. hacia adelante. $\quad O(n^2)$

Ejercicio 1 (Un sistema esencialmente triangular inferior)**.** Explicar cómo resolver de forma eficiente un sistema lineal de la forma

$$\begin{bmatrix} \mathcal{O} & L_1 \\ L_2 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

donde L_1 y L_2 son matrices triangulares inferiores y no singulares, $\mathcal{O}$ es la matriz nula, B es una matriz arbitraria, y los vectores están particionados acordemente. Describir los pasos necesarios en términos de las submatrices y vectores dados.

$$\begin{array}{c} n\{ \\ n\{ \end{array} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} L_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} L_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \\ \underbrace{\qquad}_{n} & \underbrace{\qquad}_{n} \end{bmatrix} \begin{array}{c} n\{ \\ n\{ \end{array} \begin{bmatrix} [x] \\ [y] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ox + L_1 y \\ L_2 x + By \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{vector} \\ \text{vector} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$$

tr. inf.

$$\sim \begin{cases} L_1 y = b \to y \text{ sust. hacia adelante } O(n^2) \\ L_2 x + By = c. \quad (\text{II}) \end{cases}$$

Obtengo $y \to$ uso en (II)

$L_2 x = c - By \to$ Sust. hacia adelante en x. $O(n^2)$

1) Resolver $\quad L_1 y = b \quad O(n^2)$.

2. - Despejar $\quad L_2 x = c - By$

3 - Usar y del paso 1 $\to L_2 x =$ vector conocido. $\sim O(n^2)$

4 - Resolver ec. anterior $O(n^2)$

Total: $O(n^2)$

Ejercicio 2 (Sustitución hacia atrás)**.** Escribir una función `x = atras(U,b)` que tome como entradas una matriz triangular superior U y un vector columna $\mathbf{b}$, y resuelva el sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mediante sustitución hacia atrás.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = b_1 \qquad \sim \qquad \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j = b_i \leftarrow \qquad a_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

$$\sum_{j=2}^{n} a_{2j} x_j = b_2 \qquad\qquad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

$$a_{nn} x_n = b_n \rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - \sum_{j=n-1+1}^{n} a_{(n-1)j} x_j}{a_{(n-1)(n-1)}} = \frac{b_{n-1} - a_{(n-1)(n)} x_n}{a_{(n-1)(n-1)}}$$

$$a_{(n-1)(n-1)} x_{n-1} + a_{(n-1)(n)} x_n = b_{n-1}$$

Ejercicio 6 (Fórmula de actualización de la inversa)**.** Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invertible, considerar la matriz $B = A - \mathbf{u}\mathbf{v}^t$, donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son columnas de n elementos.

a) Probar que si B es invertible entonces su inversa es

$$B^{-1} = A^{-1} + \alpha(A^{-1}\mathbf{u})(\mathbf{v}^t A^{-1})$$

para un escalar adecuado α que se determinará.
[Sugerencia: $\mathbf{v}^t A^{-1}\mathbf{u}$ es un número distinto de 1.]

b) Aplicar la fórmula anterior para corregir la inversa de A cuando se efectúa un cambio en una de sus columnas. Para ello seguir estos pasos:

- Definir una matriz A de 6×6 y hallar su inversa con el comando `inv`.
- Definir una matriz B igual a A excepto en su columna 4, que será de unos.
- Elegir vectores columna $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de forma que $B = A - \mathbf{u}\mathbf{v}^t$.
- Usar la fórmula anterior para hallar B^{-1} y verificar el resultado.

uv^t ?

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & \cdots & u_1v_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_nv_1 & \cdots & u_nv_n \end{bmatrix}$$

$B = A - uv^t$ probar $B^{-1} = A^{-1} + \alpha(A^{-1}u)(v^tA^{-1})$

B^{-1} es inversa de B si:

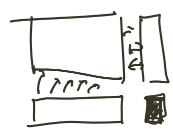
$BB^{-1} = Id.$

$$BB^{-1} = (A - uv^t)\left(A^{-1} + \alpha(A^{-1}u)(v^tA^{-1})\right)$$

$$= AA^{-1} + \alpha A(A^{-1}u)(v^tA^{-1}) - uv^tA^{-1} - \alpha uv^t(A^{-1}u)(v^tA^{-1}).$$

$$= I + \alpha uv^tA^{-1} - uv^tA^{-1} - \alpha uv^tA^{-1}u(v^tA^{-1})$$

Qué es $v^tA^{-1}u$?



$\to$ número.

$u \in M_{n\times 1}$ y $v \in M_{1\times k} \to uv \in M_{n\times k}$.

$$= I + \alpha uv^tA^{-1} - uv^tA^{-1} - \alpha u v^tA^{-1}u(v^tA^{-1})$$

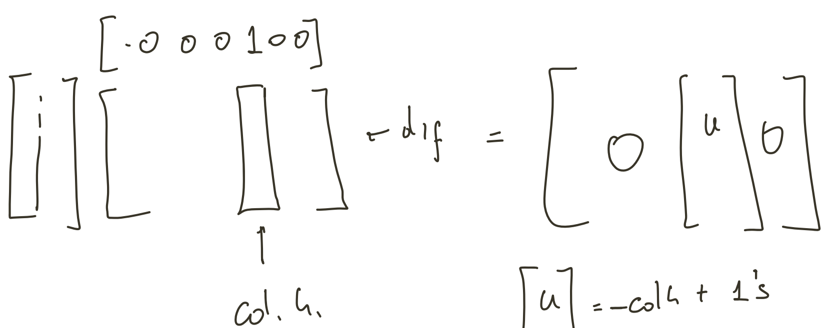
$$= I + \alpha uv^tA^{-1} - uv^tA^{-1} - \alpha(v^tA^{-1}u)(uv^tA^{-1})$$

$$= I + \left(\alpha - 1 - \alpha(v^tA^{-1}u)\right)uv^tA^{-1}.$$

$\to \alpha - 1 - \alpha(v^tA^{-1}u) = 0. \Leftrightarrow \alpha(1 - v^tA^{-1}u) = 1 \to \alpha = \dfrac{1}{1 - v^tA^{-1}u}.$

b) dif A y $B \to$ col 4.

$Dif = -uv^t$



$[u] = -col\,4 + 1's$