4 de Septiembre.

Wednesday, September 4, 2024 9:37 AM

Métodos iterativos.

La idea es resolver $Ax^* = b$, y estos métodos generan una sucesión $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ que idealmente $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x^*$.

Nos vamos a centrar en métodos de la forma
$$\begin{cases} x_{k+1} = Qx_k + r \\ x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

donde $Q \in M_n(\mathbb{R})$ y $r \in \mathbb{R}^n$, llamados Métodos matriciales generales (MIM).

Lo que vamos a querer es que

$Ax^* = b$ sii, $x^* = Qx^* + r$.

Definimos $\rho(Q) := \max\limits_{\lambda \text{ vap}} |\lambda|$ el radio espectral.

λ vap de Q

Teorema. Un MIM es convergente para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sii. $\rho(Q) < 1$.

Corolario. Si $\|Q\| < 1$ en alguna norma inducida $\Rightarrow$ el MIM converge $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Método de Jacobi.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ii} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

Si $a_{ii} \neq 0$ $\forall i$

M. Id. ...

a_{ii} Multiplicar por D^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & -F \\ -E & \ddots \end{pmatrix} = D - E - F$$

$$\rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j<i} a_{ij} x_j + \sum_{j>i} a_{ij} x_j$$

$$x = \underbrace{D^{-1} b}_{r_J} + \underbrace{D^{-1}(E+F)}_{Q_J} x$$

$$\Rightarrow x = r_J + Q_J x$$

El método de Jacobi es:

$$\begin{cases} x_{k+1} = D^{-1}(E+F)x_k + D^{-1}b \\ x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

ó

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{k}}{a_{ii}}$$

$$\begin{cases} \cdots & a_{ii} \\ x_0 \in \mathbb{R}^n \\ & 0 \end{cases}$$

Gauss-Siedel:

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^k}{a_{ii}}$$

$$Ax = b \;, \quad A = D - E - F$$

$$\Rightarrow (D - E - F)x = b$$

$$\downarrow$$

$$(D-E)x = Fx + b$$

$$\Rightarrow x = (D-E)^{-1}Fx + (D-E)^{-1}b$$

$$\Rightarrow x = (D-E)^{-1} F x + (D-E)^{-1} b$$

$$\begin{cases} x^{k+1} = (D-E)^{-1} F x^k + (D-E)^{-1} b \\ x^0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Teorema (Criterio de conv. solo para J y G-S)

Si A es dominante por filas ó columnas $\Rightarrow$ J y G-S convergen.

A es dominante por filas si

$$\underbrace{|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i = 1, \dots, n}$$

Es equivalente con que los círculos de

Es equivalente con que los círculos de Gresh. no lleguen al cero.

---

13) a) Sin hallar Q, ver si Jacobi converge para

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 5 & -2 & -10 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & -10 \end{pmatrix}$$

A_1 es dominante por filas ✓

A_2 " " por columnas ✓

$$A_1 = \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}}_{\texttt{diag(diag(A))}}}^{D} - \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\texttt{triu(A,1)}}}^{F} - \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{\texttt{tril(A,-1)}}}^{E}$$

En octave: diag(diag(A)) triu(A,1) tril(A,-1)

$$Q_J = D^{-1}(E+F)$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & 2/10 \\ 1/4 & 0 & 2/10 \\ -5/4 & 2/5 & 0 \end{pmatrix}$$

← Hallar vaps y luego que verificar que todos tienen módulo < 1.

b) $$A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$$

No es dominante por filas ni por columnas

$$A_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}}_{D} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}}_{E} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$D \qquad E \qquad F$$

$$\Rightarrow Q_J = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3/5 \\ -8/5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(Q_J - \lambda I_d\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3/5 \\ -8/5 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 + \frac{24}{25}$$

$$= \left(\lambda + \sqrt{\frac{24}{25}}\, i\right)\left(\lambda - \sqrt{\frac{24}{25}}\, i\right)$$

$$\rho(Q_J) = \text{máx}\left\{ \left|\sqrt{\frac{24}{25}}\, i\right| , \left|-\sqrt{\frac{24}{25}}\, i\right| \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{24}{25}} < 1$$

$\Rightarrow$ Jacobi converje en este caso.

c) Lo mismo pero para G-S

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

$$Q_{GS} = (D - E)^{-1} F$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{25}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 8/25 & -1/5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q_{GS} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 8/25 & -1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3/5 \\ 0 & 24/25 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(Q_{GS} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3/5 \\ 0 & 24/25 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda\left(24/25 - \lambda\right)$$

$\Rightarrow$ Vaps de Q_{GS} : 0 y $24/25$

$$\Rightarrow \rho(Q) = \frac{24}{25} < 1$$

15) Ver que pasa con la iteración

$$x^{k+1} = Qx^k + v$$

cuando $\rho(Q) \geq 1$

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \mu & \\ 0 & & \gamma \end{pmatrix} \quad |\lambda| > 1 \quad |\mu|, |\gamma| < 1$$

$$Q^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n x_1 \\ \mu^n x_2 \\ \gamma^n x_3 \end{pmatrix} \qquad Q^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & & 0 \\ & \mu^n & \\ 0 & & \gamma^n \end{pmatrix}$$

$$\lambda^n x_1 \xrightarrow{n \to \infty} \infty$$

si $x_1 = 0$ esto

si $x_1 = 0$ esto no pasa.

Si armo con iterados tq la primer coord. de x_0 es igual a la de la solución r

$$\Rightarrow e_0 = x^* - x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$Q^n e_0 = e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu^n y \\ \gamma^n z \end{pmatrix}$$

$$\mu^n y \xrightarrow{n \to \infty} 0, \quad \gamma^n z \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$\Rightarrow \rho(Q) \geq 1$ no implica que nunca se converja.