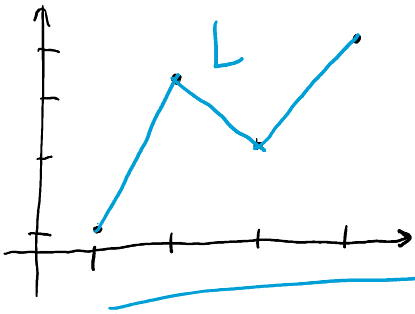
Clase practico 3

Monday, September 16, 2024 5:04 PM

Interpolación lineal a trozos.

$(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ $n+1$ puntos a interpolar



Consiste en interpolar linealmente en los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$. Por lo tanto obtenemos

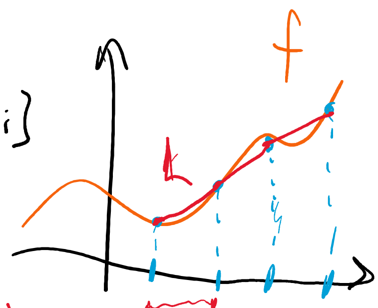
$$\boxed{L(x) = y_i + (x - x_i)\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}]}$$

Tambien se escribe, poniendo $\underbrace{s = x - x_i}$

$$\underbrace{L(s) = y_i + s\,\delta_i}$$

con $s \in [0, x_{i+1} - x_i]$

$$\delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

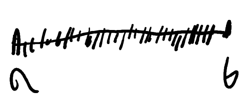


Teorema (Error de interpolación con lineales a trozos).

Sean $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ $n+1$ puntos, f C^2 en el intervalo $[x_0, x_n]$ y L la interpolante lineal a trozos por los puntos $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$. Entonces, si $x \in \underline{[x_i, x_{i+1}]}$, se tiene

$$|f(x) - L(x)| \leq \frac{\|f''\|_{L^\infty([x_i, x_{i+1}])}}{2}(x - x_i)(x_{i+1} - x)$$

Por lo tanto,



$$\| f - L \| \leq \frac{\|f''\|_{L^\infty([x_0, x_n])}}{\dots} \dots x)^2$$

$$\|f - L\|_{L^\infty([x_0,x_n])} \leq \frac{\|f''\|_{L^\infty([x_0,x_n])}}{8} \max_j |x_{j+1} - x_j|^2$$

(En polinomios: $\dfrac{\|f^{(n+1)}\|_{L^\infty}}{(n+1)!} \|w_n\|_{L^\infty}$) Si crece muy rápido, pierdo.

Interpolación cúbica a trozos.

A veces nos puede interesar que la función que usamos para interpolar también sea derivable, para ajustar el valor de la derivada vamos a necesitar polinomios de grado 3.

Dada una terna $\{(x_i, y_i, d_i)\}_{i=0}^n$, queremos una función P que cumpla:

- $P|_{[x_i, x_{i+1}]}$ es un polinomio de grado ≤ 3
- Para cada $i = 0, \ldots, n$ tenemos $P'(x_i) = d_i$ y $P(x_i) = y_i$.

x_i x_{i+1}

$$\begin{cases} P(x_i) = y_i \\ P(x_{i+1}) = y_{i+1} \\ P'(x_i) = d_i \\ P'(x_{i+1}) = d_{i+1} \end{cases}$$

$$p(x) = \left(\frac{3h_i s^2 - 2s^3}{h_i^3}\right) y_{i+1} + \left(\frac{h_i^3 - 3h_i s^2 + 2s^3}{h_i^3}\right) y_i + \frac{s^2(s-h_i)}{h_i^2} d_{i+1} + \frac{s(s-h_i)^2}{h_i^2} d_i. \qquad (3.21)$$

$x \in [x_i, x_{i+1}]$

Aquí, introdujimos la notación

$$h_i := x_{i+1} - x_i,$$

y usamos la variable local que definimos en la Sección 3.4.1,

$$s := x - x_i.$$

Nosotros vamos a ver tres formas de hacer esto, la diferencia está en la elección de los d_i's.

1 Hermite.

Supongamos que hay una f suf. regular tq $f(x_i) = y_i$ y $f'(x_i) = d_i$.

Corolario 3.4.3 (estimación del error de interpolación cúbica a trozos de Hermite). *Sean $n+1$ puntos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, f una función de clase C^4 en el intervalo $[x_0, x_n]$, y p la interpolante cúbica a trozos de Hermite por $x_0, \ldots, x_n$. Entonces, si $x \in [x_i, x_{i+1}]$ para $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, se tiene*

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{\|f^{(4)}\|_{L^\infty([x_i, x_{i+1}])}}{24} (x - x_i)^2 (x_{i+1} - x)^2. \tag{3.23}$$

$< 4!$

Además,

$$\|f - p\|_{L^\infty([x_0, x_n])} \leq \frac{\|f^{(4)}\|_{L^\infty([x_0, x_n])}}{384} \max_{j=0,\ldots,n} (x_{j+1} - x_j)^4. \tag{3.24}$$

2) Splines cúbicas.

Si no conocemos los valores $\{d_i\}$, esta técnica busca hacer que la función p sea lo más regular posible, imponiendo las condiciones

$$p''(x_i^-) = p''(x_i^+), \quad \forall i = 1, \ldots, n-1$$

Con $p''(x_i^{-(+)}) = \lim_{x \to x_i^{-(+)}} p(x)$

Haciendo las cuentas:

dos veces (3.21), obtenemos para cada $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$,

$$p''(x) = \frac{(6h_i - 12s)\delta_i + (6s - 2h_i)d_{i+1} + (6s - 4h_i)d_i}{h_i^2}, \tag{3.25}$$

donde nuevamente usamos la notación

Por lo tanto, si queremos que la interpolante p sea de clase C^2, necesitamos que los coeficientes $d_0, \ldots, d_n$ satisfagan

$$\frac{6\delta_j - 2d_{j+1} - 4d_j}{h_j} = \frac{-6\delta_{j-1} + 4d_j + 2d_{j-1}}{h_{j-1}} \quad \forall j = 1, \ldots, n-1,$$

lo que podemos reescribir como

$$h_j d_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j) d_j + h_{j-1} d_{j+1} = 3h_j \delta_{j-1} + 3h_{j-1}\delta_j \quad \forall j = 1, \ldots, n-1. \tag{3.26}$$

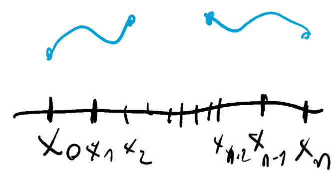
donde nuevamente usamos la notación

$$s = x - x_i, \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad \delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}.$$

Notar que esto igual deja espacio para d_0 y d_n.
Acá hay 3 opciones:

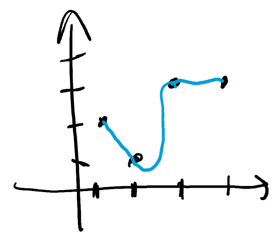
- Prescribir los valores de $p'(x_0)$ y $p'(x_n)$, esto es, tomar d_0 y d_n como datos, por lo que ahora (3.26) corresponde a un sistema de $n-1$ ecuaciones con $n-1$ incógnitas $d_1, \ldots, d_{n-1}$. Esta elección se llama **spline completa.**
- Imponer que $p''(x_0) = 0$ y que $p''(x_n) = 0$. Esto nos agrega dos ecuaciones adicionales más a (3.26) y da lugar a un sistema $(n+1) \times (n+1)$. Hacer esto se conoce como tomar una **spline natural.**

- Imponer que $p''(x_0) = 0$ y que $p''(x_n) = 0$. Esto nos agrega dos ecuaciones adicionales más a (3.26) y da lugar a un sistema $(n+1) \times (n+1)$. Hacer esto se conoce como tomar una **spline natural.**
- Buscar que p tenga un poco más de regularidad cerca de los bordes, esto es, que p sea de clase C^3 en los intervalos $[x_0, x_2]$ y $[x_{n-2}, x_n]$. Como p es una función cúbica a trozos, hacer esto es equivalente a usar la misma función cúbica en $[x_0, x_1]$ que en $[x_1, x_2]$ y respectivamente, en $[x_{n-2}, x_{n-1}]$ que en $[x_{n-1}, x_n]$. Esto es, estamos "eliminando" los nodos x_1 y x_{n-1}, y por esta razón a este tipo de interpolante se la conoce como **spline *not-a-knot*[9].**



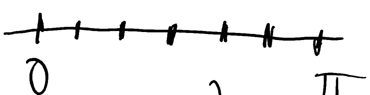
3) Interpolación que "preserva forma":

En Octave es el comando "$\boxed{\text{pchip}}$". No deja que la función p supere los valores $y_0, \dots, y_n$, es decir, no genera osilaciones más allá de estos valores.



---

9) $x_i = \frac{\pi}{n} i \quad i = 0, \dots, n.$ $\quad f(x) = \cos(x)$, P_n interpolante de Hermite



a) $\|f - P_n\|_{L^\infty[0,\pi]} \overset{?}{<} 10^{-3}$

$$\|f - P_n\|_{L^\infty([0,\pi])} \leq \frac{\overbrace{\|f^{(4)}\|_{L^\infty([0,\pi])}}^{\leq 1}}{384} \max_{i=0,\dots,n-1} \overbrace{|x_{i+1} - x_i|}^{= \frac{i+1}{n}\pi - \frac{i}{n}\pi = \frac{\pi}{n}}{}^4$$

b) Octave

$$= \frac{\pi^4}{384} \cdot \frac{1}{n^4},$$

c) Octave.

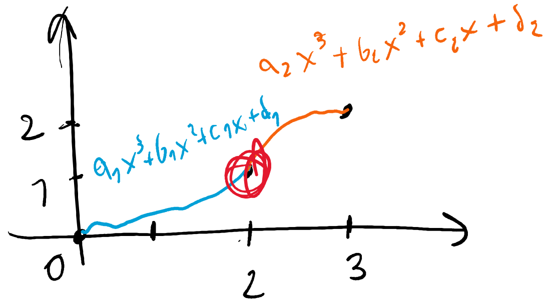
Buscamos $\frac{\pi^4}{n^4 \cdot 384} < 10^{-3} \Rightarrow n^4 > \frac{10^3 \cdot \pi^4}{384}$

$\Rightarrow n \geq 4$ ✓

11) Hallar una spline cúbica $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ tq

- $f(x_i) = y_i$, $(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 3)$ $(y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 2)$

- $f(x_i) = y_i$, $(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 3)$, $(y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 2)$
- $f|_{[x_i, x_{i+1}]}$ es un pol. de grado ≤ 3.
- f, f', f'' son continuas
- $f'(0^+) = 0$, $f'(3^-) = 0$



$x \in [0, 2]$

$\Rightarrow f(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1$, $f'(x) = 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1$

$f(0) = d_1 = 0$

$f(2) = 8a_1 + 4b_1 + 2c_1 + d_1 = 1 \Rightarrow 8a_1 + 4b_1 = 1$

$f'(0^+) = c_1 = 0$

$f'(2^-) = 12a_1 + 4b_1 + c_1 = 12a_1 + 4b_1$

$f''(x) = 6a_1x + 2b_1$

$f''(2^-) = 12a_1 + 2b_1$

$x \in [2, 3]$ $\qquad f'(x) = 3a_2x^2 + 2b_2x + c_2$

$\Rightarrow f(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2$

$f(2^+) = 8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 = 1$

$f(3) = 27a_2 + 9b_2 + 3c_2 + d_2 = 2$

$f(3) = 27a_2 + 9b_2 + 3c_2 + d_2 = 2$

$f'(3^-) = 27a_2 + 6b_2 + c_2 \qquad = 0$

$f'(2^+) = 12a_2 + 4b_2 + c_2$

$f'(2^-) = 12a_1 + 4b_1$

$f'(2^+) = 12a_2 + 4b_2 + c_2$

$f''(x) = 6a_2 x + 2b_2$

$\Rightarrow 12a_1 + 4b_1 - 12a_2 - 4b_2 - c_2 = 0$

$f''(2^+) = 12a_2 + 2b_2$

Como quiero f' y f'' continuas, impongo las ecuaciones $f'(2^-) = f'(2^+)$ y $f''(2^-) = f''(2^+)$.

Entonces

$$\left\{\begin{array}{lllr}
 & d_1 & = 0 & (f(0)=0) \\
 & c_1 & = 0 & (f'(0)=0) \\
8a_1 + 4b_1 & & = 1 & (f(2^-)=1) \\
12a_1 + 4b_1 & - 12a_2 - 4b_2 - c_2 & = 0 & (f'(2^-)=f'(2^+)) \\
12a_1 + 2b_1 & - 12a_2 - 2b_2 & = 0 & (f''(2^-)=f''(2^+)) \\
 & 8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 & = 1 & (f(2^+)=1) \\
 & 27a_2 + 9b_2 + 3c_2 + d_2 & = 2 & (f(3)=2) \\
 & 27a_2 + 6b_2 + c_2 & = 0 & (f'(3)=0)
\end{array}\right.$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
12 & 4 & 0 & 0 & -12 & -4 & -1 & 0 \\
12 & 2 & 0 & 0 & -12 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 9 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 6 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}
=
\begin{matrix} 0.0625 \\ 0.1250 \\ 0.0000 \\ 0 \\ -0.7500 \\ 5.0000 \\ -9.7500 \\ 6.5000 \end{matrix}
$$