14 de agosto.

Wednesday, August 14, 2024 9:29 AM

$$x = \pm (1+f)\, 2^{e}$$

- El signo $\pm$ ocupa 1 bit.
- f es la mantisa que cumple:
  - $0 \leq f < 1$
  - $2^{52} f \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ 0 \leq f < 1 \\ \bullet\ 2^{52} f \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow f \in \left\{0, \frac{1}{2^{52}}, \dots, \frac{2^{52}-1}{2^{52}}\right\}$$

- $e \,/\, -1022 \leq e \leq 1023$

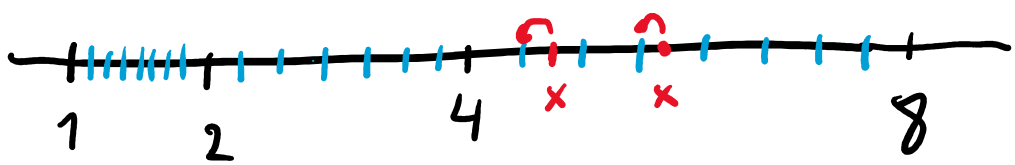
$1023 + 1022 + 1 = 2046$ opciones $(2^{11} - 2)$

- Definimos el epsilon de máquina ε_M como la distancia del 1 al siguiente representable.

$$\Rightarrow \varepsilon_M = d(1, 1 + 1/2^{52}) = 1/2^{52} \approx 2{,}22 \times 10^{-16}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_M = d\left(1,\ 1+\frac{1}{2^{52}}\right) = \frac{1}{2^{52}} \approx 2{,}22\times 10^{-16}$$

Dado $x \in \mathbb{R}$, $\quad x \longrightarrow fl(x) \equiv$ representable más cercano a x



- El representable más grande es
  - $$Real_{max} = +\left(1 + \frac{2^{52}-1}{2^{52}}\right)2^{1023}$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2^{52}}\right)2^{1023}$$

$$\approx 1{,}80 \times 10^{308}$$

  - $$Real_{min} = +(1+0)\cdot 2^{-1022} \approx 2{,}23\times 10^{-308}$$

- $Real_{min} = +(1+0)\cdot 2^{-1022} \approx 2{,}23\times 10^{-308}$

(Obs. El IEEE deja como opción poder tener números entre $\varepsilon_M \cdot Real_{min}$ y $Real_{min}$
Se representan con exponente $e = -1023$ y mantisas $2^{-52}, \ldots, 1-2^{-52}$)

Teorema. $\left|\dfrac{fl(x)-x}{x}\right| \leq \dfrac{\varepsilon_M}{2}$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase C^1 y $x\in\mathbb{R}$. Queremos calcular $f(x)=y$. Lo mejor a lo que podemos aspirar es a calcular $fl(f(fl(x))) = \tilde{y}$.

Tenemos

$$\left|\frac{\tilde{y}-y}{y}\right| \leq \frac{\varepsilon_M}{2} + K_f(x)\,\frac{\varepsilon_M}{2}$$

$$\left|\frac{\ldots}{y}\right| \leq \frac{\varepsilon_M}{2} + K_f(x)\frac{\ldots}{2}$$

• $K_f(x) := \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\, x\right|$ es el número de condición de f en x.

Si $\tilde{x} \approx x$, entonces

$$\left|\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right| \underset{\uparrow}{\approx} \left|\frac{(\tilde{x} - x)\, f'(x)}{f(x)}\right| = \overbrace{\left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right| \cdot \left|x\frac{f'(x)}{f(x)}\right|}^{\varepsilon_x \cdot K_f(x)}$$

$$f(\tilde{x}) \approx f(x) + (\tilde{x} - x)\, f'(x)$$

Taylor en x

Ejercicio 2.

Precisión simple: $x = \pm(1+f)\cdot 2^e$

• El signo ocupa 1 bit

- El signo ocupa 1 bit
- $f \,/\, 0 \leq f < 1$, y $2^{23} f \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow f \in \left\{0, 2^{-23}, \ldots, \frac{2^{23}-1}{2^{23}}\right\}$$

- $-126 \leq e \leq 127$

i) $\varepsilon_M = 2^{-23} \approx 1{,}19 \times 10^{-7}$ (En precisión doble $\varepsilon_M \approx 2{,}22 \times 10^{-16}$)

ii) $\text{Realmáx} = \left(1 + \frac{2^{23}-1}{2^{23}}\right) 2^{127} = \left(2 - \frac{1}{2^{23}}\right) 2^{127}$

$$\approx 3{,}40 \times 10^{38}$$

(En precisión doble: $\text{Realmáx} = 1{,}80 \times 10^{308}$)

iii) $\text{Realmin} = (1+0)\, 2^{-126} = 2^{-126} \approx 1{,}18 \times 10^{-38}$

(En precisión doble: $\text{Realmin} = 2{,}23 \times 10^{-308}$)

(En precisión doble: Realmin $= 2,23 \times 10^{-308}$)

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, g(x) = \frac{x^3}{x - \operatorname{sen}(x)}$$

y $x = 5 \times 10^{-4}$

En octave: $g(x) = 6$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x - \operatorname{sen}(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{1 - \cos(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{6x}{\operatorname{sen}(x)} = 6$$

Otra opción con cosas del curso

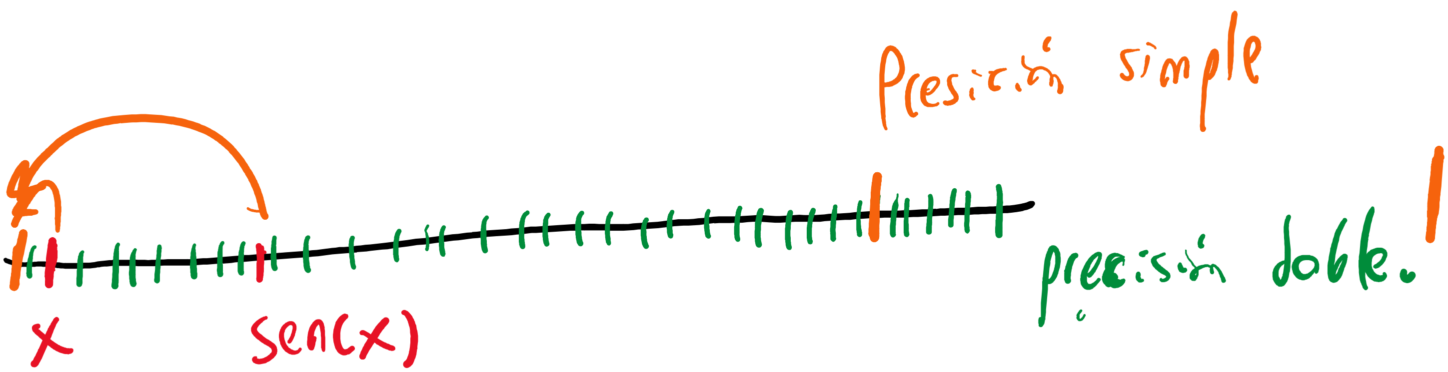
$$\lim \frac{x^3}{\ldots} = \lim \frac{x^3}{x^3 \ldots (x)} = \lim \frac{1}{\ldots (x)}$$

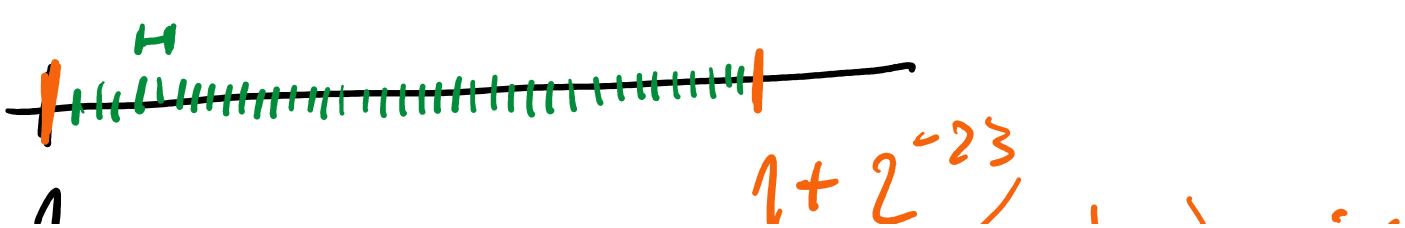
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x - \operatorname{sen}(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^3/6 + r_3(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1/6 + \frac{r_3(x)}{x^3}} = 6$$

$$\operatorname{sen}(x) = x - x^3/6 + r_3(x)$$

$$\frac{r_3(x)}{x^3} \xrightarrow{x \to 0} 0$$

$$\frac{r_3(x)}{x^2} = \overbrace{x}^{\to 0} \, \overbrace{\frac{r_3(x)}{x^3}}^{\to 0} \xrightarrow{x \to 0} 0$$





1

$1+2^{-23}$ epsilon de máquina para precisión simple.

$\varepsilon_M = 2,22\times10^{-16}$ para precisión doble

$\varepsilon_M = 1,19\times10^{-7}$ " precisión simple

¿Cuantos representables de precisión doble hay entre 1 y $1+2^{-23}$?

Esto es más o menos, cuantas veces entra $2,22\times10^{-16}$ entre 1 y $1+1,19\times10^{-7}$, es decir, $\dfrac{1,19\times10^{-7}}{2,22\times10^{-16}} \approx 5,35\times10^{8}$