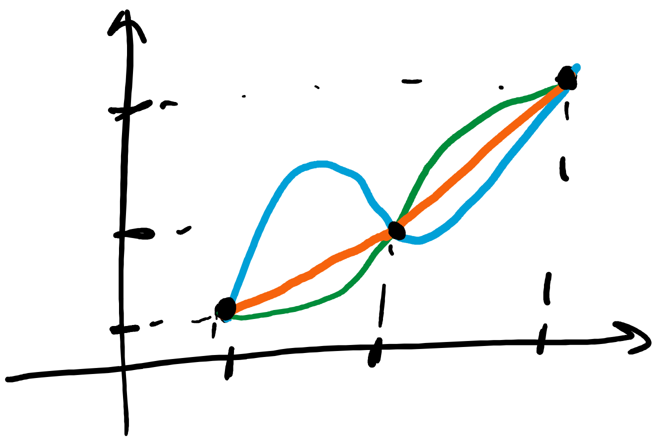
11 de setiembre

Wednesday, September 11, 2024 9:29 AM

Interpolación.

Tenemos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ $n+1$ puntos en $\mathbb{R}^2$ y queremos una función que pase por ellos.



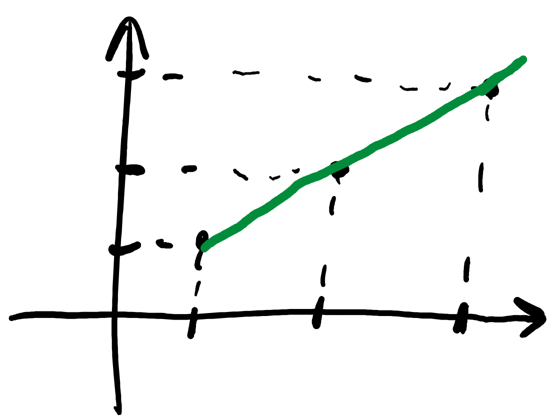
Nos vamos a centrar en interpolación con polinomios, donde podemos asegurar unicidad.

Ej: Si hay un único punto (x_0, y_0) el pol. cte $P(x_0) \equiv y_0$

Con dos, hay una única recta que los une.

Con tres puntos no alineados, hay una única parábola que pasa por ellos.

Teorema. Dados $n+1$ puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Existe un único polinomio P_n de grado $\leq n$ tal que $P(x_i) = y_i$.



Forma de Vandermonde.

Forma de Vandermonde.

Ponemos $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, y se tiene que cumplir $P_n(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, \dots, n+1$

Es decir, $\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j = y_i \quad \forall i = 0, \dots, n+1$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ & \vdots & & \ddots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de Vandermonde}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

1) Hallar el pol. interpolante por los puntos

$$(\underbrace{-1}_{x_0}, \underbrace{0}_{y_0}),\ (\underbrace{0}_{x_1}, \underbrace{3}_{y_1}),\ (\underbrace{1}_{x_2}, \underbrace{2}_{y_2}).$$

a) $P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 = 3 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - a_1 + a_2 = 0 \\ 3 + a_1 + a_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6 + 2a_2 = 2$$

$$\Rightarrow a_2 = -2 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$\Rightarrow P_2(x) = -2x^2 + x + 3$$

Forma de Lagrange.

La forma de Vandermonde escribe

al polinomio interpolante en la base $\{1, x, \dots, x^n\}$ y hallamos los coef.

Dados $n+1$ puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$ y $k \in \{0, \dots, n\}$, definimos el polinomio base de Lagrange como el único pol. de grado $\leq n$ tal que

$$L_n^k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

O sea, es el polinomio interpolante por los puntos $(x_0, 0), \dots, (x_{k-1}, 0), (x_k, 1)\ (x_{k+1}, 0), \dots$

$(x_n, 0)$

$(x_n, 0)$.

L_n^k tiene n raíces $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$

$$\Rightarrow L_n^k(x) = a(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)$$

Para hallar a:

$$1 = L_n^k(x_k) = a \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)$$

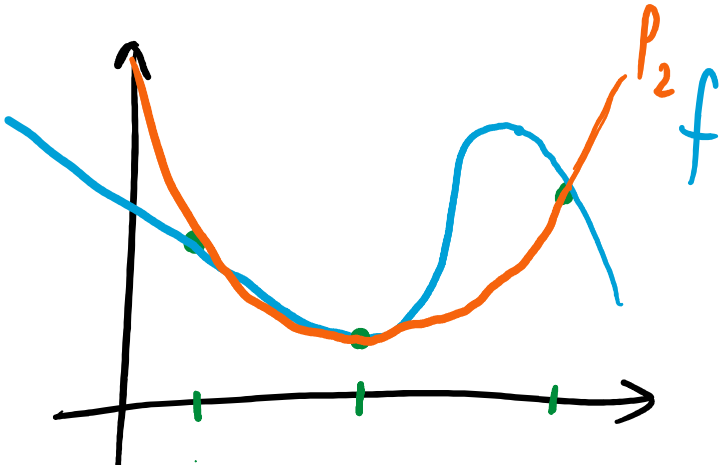
$$\Rightarrow a = \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)}$$

$\Rightarrow L_n^k(x)$ $(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)$

$$\Rightarrow L_n^k(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

En esta base $\{L_n^0, L_n^1, \dots, L_n^n\}$ el polinomio interpolante se escribe como

$$\underline{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \widehat{y_k} L_n^k(x)}$$



1) b) $(\overset{x_0}{-1}, 0), (0, 3), (1, 2)$

$(P_2(x) = -2x^2 + x + 3)$

$$\left(P_2(x) = -2x^2 + x + 3\right)$$

$$L_2^0(x) = a\,x\,(x-1)$$

(Es porque es de grado ≤ 2 y se anula en 0 y en 1)

$$L_2^0(-1) = 2a = 1$$

$$\Rightarrow a = 1/2$$

$$\Rightarrow L_2^0(x) = \tfrac{1}{2}\,x\,(x-1)$$

$$L_2^1(x) = a\,(x+1)\,(x-1)$$

$$L_2^1(0) = 1 = -a \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow L_2^1(x) = -(x+1)(x-1)$$

$$L_2^2(x) = a\,x\,(x+1)$$

$$L_2^2(1) = 1 = 2a \Rightarrow a = 1/2$$

$$L_2^2(1) = 1 = 2a \Rightarrow a = 1/2$$

$$\Rightarrow L_2^2(x) = 1/2\, x(x+1)$$

$$P_2(x) = 0 \cdot L_2^0(x) + 3L_2^1(x) + 2L_2^2(x)$$

$$= -3\overbrace{(x+1)(x-1)}^{x^2-1} + x(x+1)$$

$$= -3x^2 + 3 + x^2 + x$$

$$= -2x^2 + x + 3$$

Forma de Newton.

Usa el polinomio interpolante anterior para calcular el siguiente.

(I) Arrancamos con (x_0, y_0), el pol. que lo interpola es $P_0(x) \equiv y_0$.

(II) Dado P_{k-1} el interpolante de los primeros $(x_0, y_0), \dots, (x_{k-1}, y_{k-1})$, vamos a construir P_k el interpolante de $(x_0, y_0), \dots, (x_{k-1}, y_{k-1}), (x_k, y_k)$.

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + \frac{(y_k - P_{k-1}(x_k))(x - x_0)\dots(x - x_{k-1})}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})}$$

$P_k(x) = P_{k-1}(x) + q(x)$ con $\deg(q) = k$

$\Rightarrow q(x_j) = P_k(x_j) - P_{k-1}(x_j) = 0 \quad \forall j = 0, \dots, k-1$

$$\Rightarrow q(x) = a\,(x - x_0)\dots(x - x_{k-1})$$

$$q(x_k) = \overbrace{P_k(x_k)}^{=\,y_k} - P_{k-1}(x_k)$$

$$= y_k - P_{k-1}(x_k)$$

$$\Rightarrow a = \frac{y_k - P_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})}$$

1) c) $(\underset{x_0}{-1}, 0)$, $(\underset{x_1}{0}, 3)$, $(\underset{x_2}{1}, 2)$

- $P_0(x) \equiv 0$

- P_1 es el interpolante por $(-1,0)$ y $(0,3)$

$$P_1(x) = 3(x+1) = 3x + 3$$

$$P_1(x) = 3(x+1) = 3x+3$$

- P_2 el interpolante que buscamos

$$P_2(x) = P_1(x) + \frac{(y_2 - P_1(x_2))}{\underbrace{(x_2 - x_0)}_{\substack{1+1\\=2}}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{\substack{1-0\\=1}}}(x - x_0)(x - x_1)$$

$$= \underline{P_1(x)} + \frac{(2 - \overbrace{P_1(1)}^{3+3=6})}{2}(x+1)x$$

$$= 3x + 3 + \frac{-4}{2}(x+1)x$$

$$= 3x + 3 - 2x^2 - 2x = -2x^2 + x + 3$$