

7

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2h F(t_k, y_k)$$

$$y_k \approx y(t_k)$$

$$\begin{cases} y' = F(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y'(t_k) \approx \frac{y(t_{k+1}) - y(t_{k-1}))}{2h} \xrightarrow{\text{idea}} F(t_k, y_k) = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$$

a) $y(t_{k+1}) = y(t_{k-1}) + 2h y'(t_k) + O(h^3)$ ← hay que probarlo.

Taylor centrado en t_k y evaluarla en t_{k+1}, t_{k-1}

Assumir que y_k, y_{k-1} son exactos.
 $y(t_k)$ $y(t_{k-1})$

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) &= y(t_k) + y'(t_k)h + \frac{1}{2}y''(t_k)h^2 + O(h^3) \\ y(t_{k-1}) &= y(t_k) - y'(t_k)h + \frac{1}{2}y''(t_k)h^2 + O(h^3) \\ y(t_{k+1}) - y(t_{k-1}) - 2h y'(t_k) &= O(h^3) - O(h^3) = O(h^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{k+1} - y(t_{k+1}) &= \\ y_{k-1} + 2h F(t_k, y_k) - y(t_{k+1}) &= \\ \textcircled{=} y(t_{k-1}) + 2h y'(t_k) - y(t_{k+1}) &= \\ = O(h^3) \text{ por lo anterior.} & \\ \text{Método de orden 2} & \end{aligned}$$

Como el error local nos dio $O(h^3)$, el error debería ser $O(h^2)$

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad y(t) = e^t$$

Probar que el error relat es $O(h^3)$

Estabilidad absoluta

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \lambda < 0$$

$$y(t) = e^{\lambda t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Queremos que la sucesión
que genera el método también $\rightarrow 0$

$$\frac{L_k}{h^3} \leq C$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{L_k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \left(\frac{L_k}{h^3} \right) = 0$$

$y_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \forall h$ incondicionalmente abs. est.

$y_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ para algunos h condicionalmente abs. est.

$$y_{k+1} = y_k + h \lambda y_{k+1} \quad \leftarrow \text{Euler's method's prob test}$$

$$y_{k+1} = \frac{1}{1-h\lambda} y_k$$

$$y(t) = e^{\lambda t} = e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$$

$$(\lambda = i)$$

