

13 Datos: Pesos y alturas $\{(h_i, p_i)\}$

Relación: $p = c_1 h^{c_2}$

PMCNL ^{no lineal}

c_1, c_2 : parámetros a hallar

PMCL: $F(x) = c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x) + \dots + c_n \phi_n(x)$. Los $\phi_i(x)$ pueden ser no lineales, pero respecto a los c_i es lineal.

• Se puede llevar a $Ax = b$ ($x = [c_1, \dots, c_n]$)

• PMCNL: hay dependencia no lineal respecto a algún c_i y no es equivalente a un sistema de la forma $Ax = b$.

$$c_1 h_1^{c_2} = p_1$$

$$c_1 h_2^{c_2} = p_2$$

$$c_1 h_n^{c_2} = p_n$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

No se aplica el razonamiento de PMCL de forma directa.

Se resuelve mezclando

Newton-Raph

PMCL

Gauss-Newton
conceptual

Datos $\{(h_i, p_i) \mid i = 1 \dots n\}$ $p = \alpha_1 h^{\alpha_2}$

caso exacto

$$\alpha_1 h_1^{\alpha_2} - p_1 = 0$$

$$\vdots$$
$$\alpha_1 h_n^{\alpha_2} - p_n = 0$$

$$\rightarrow r(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 h_1^{\alpha_2} - p_1 \\ \alpha_1 h_2^{\alpha_2} - p_2 \\ \vdots \\ \alpha_1 h_n^{\alpha_2} - p_n \end{pmatrix}$$

• La entrada i -ésima de $r(\alpha_1, \alpha_2)$ nos dice cuánto le erramos en el dato i -ésimo usando parámetros α_1, α_2 .

PMCNL: Hallar α_1, α_2 tq minimicen $\|r(\alpha_1, \alpha_2)\|_2^2$ ¿Cómo lo hacemos?

* Enfoque: Linealizar el problema, resolver la versión linealizada e iterar. (NR)

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \quad \alpha^1 = (\alpha_1^1, \alpha_2^1) \rightarrow \alpha^2 = (\alpha_1^2, \alpha_2^2) \dots$$

$\alpha^k \rightarrow \alpha^{k+1}$: Hacemos Taylor de orden 1 de $r(\alpha)$ centrado en α^k .

$$r(\alpha) \approx r(\alpha^k) + J_r(\alpha^k) (\alpha - \alpha^k)$$

$$\underbrace{J_r(\alpha^k)}_{M_{n \times 2}} \underbrace{d^k}_{\substack{\text{incógnita} \\ \mathbb{R}^2}} = - \underbrace{r(\alpha^k)}_{\mathbb{R}^n}$$

Resolver PMCL

$$\Rightarrow \text{desolvamos CV}$$
$$\alpha^{k+1} = \alpha^k + d^k$$

$$P = \alpha_1 h^{\alpha_2}$$

$$F(h; \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 h^{\alpha_2}$$

$$r(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 h_1^{\alpha_2} - P_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 h_n^{\alpha_2} - P_n \end{pmatrix}$$

$$J_r(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \\ h_1^{\alpha_2} & \alpha_1 \log(h_1) h_1^{\alpha_2} \\ h_2^{\alpha_2} & \alpha_1 \log(h_2) h_2^{\alpha_2} \\ \vdots & \vdots \\ h_n^{\alpha_2} & \alpha_1 \log(h_n) h_n^{\alpha_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 h^{\alpha_2} = \alpha_1 e^{\log(h) \alpha_2} \\ = \alpha_1 e^{\alpha_2 \log(h)} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\alpha_1 h^{\alpha_2}) = \alpha_1 \log(h) e^{\alpha_2 \log(h)} \\ = \alpha_1 \log(h) h^{\alpha_2} \end{array} \right. \quad \text{, } h^{\alpha_2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\alpha_1 h^{\alpha_2}) = h^{\alpha_2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\alpha_1 h^{\alpha_2}) \neq \alpha_1 \alpha_2 h^{\alpha_2-1} \quad \begin{matrix} \nearrow \frac{\partial}{\partial h} \\ \end{matrix}$$

$$\left(\alpha_1 e^{\alpha_2 \log(h)} \right) = \alpha_1 \log(h) h^{\alpha_2}$$

$$p = x_1 h^{x_2} \rightarrow \log(p) = \log(x_1 h^{x_2})$$

$$\rightarrow \log(p) = \underbrace{\log(x_1)}_{d_1} + \underline{x_2} \log(h)$$

PMCL datos $\{(\log(h_i), \log(p_i))\}$ $\log(p_i) = d_1 + x_2 \log(h_i)$

después de resolverlo,
nos quedamos con e_1
 $x_1 := e^{d_1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \log(h_1) \\ 1 & \log(h_2) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \log(h_n) \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} \log(p_1) \\ \log(p_2) \\ \vdots \\ \log(p_n) \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} d_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

PMCL minimize residual con los logaritmos

minimize

$$\left\| \begin{pmatrix} \log(x_1 h_1^{x_2}) - \log(p_1) \\ \vdots \\ \log(x_n h_n^{x_n}) - \log(p_n) \end{pmatrix} \right\|$$

$\neq \log(x_1 h_1^{x_2} - p_1)$

PMCNL

minimize

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 h_1^{x_2} - p_1 \\ \vdots \\ x_n h_n^{x_n} - p_n \end{pmatrix} \right\|$$