Problema de Mínimos Cuadrados Lineal (PMCL)

$Ax = b \quad A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad m \geq n$ (en general $m > n$)

$$\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \end{pmatrix}$$

más ecuaciones que incógnitas. En general es incompatible

→ Hallar el x que más se aproxime a ser solución

Def: x resuelve el PMCL sii x minimiza $\|Ax - b\|_2^2$

para sacar las raíces
Es equivalente a no ponerlo
norma euclídea

* si $Ax - b = 0$, entonces x es sol. exacta.

Lo que buscamos es que $Ax - b$ sea lo más cercano a 0 posible.

$r := Ax - b$ es un vector que dice qué tanto Ax le erra a b.

¿Cómo pasar de un conjunto de datos a A, b?

1 Datos $\{(x_i, y_i) \,/\, i = 1..n\}$

Se ajustan a $y = F(x) = ax^3 + bx + c$ incógnitas

Vamos a pasar de esto a un PMCL con su A y su v ($Ax = v$)

Datos:

$$
\begin{array}{lll}
(x_1, y_1) \to & y_1 = F(x_1) & ax_1^3 + bx_1 + c = y_1 \\
(x_2, y_2) \to & y_2 = F(x_2) & ax_2^3 + bx_2 + c = y_2 \\
\vdots & & \vdots \\
(x_i, y_i) \to & y_i = F(x_i) & ax_i^3 + bx_i + c = y_i \\
\vdots & & \vdots \\
(x_n, y_n) \to & y_n = F(x_n) & ax_n^3 + bx_n + c = y_n
\end{array}
$$

situación ideal

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^3 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i^3 & x_i & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^3 & x_n & 1 \end{pmatrix}}_{A} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{v}
$$

Como probablemente no haya solución exacta, consideramos el PMCL con esa A y ese v.

$$x = \arg\min \|Ax - v\|_2^2$$

Ecuaciones normales:

$$\underbrace{A^tA}_{n\times n}\, x = \underbrace{A^t v}_{\mathbb{R}^n}$$

- Siempre existe solución. (puede ser única o no)

A^tA puede estar mal condicionada

$$A^tA = \begin{pmatrix} x_1^3 & x_2^3 & \cdots & x_n^3 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^3 & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^3 & x_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma\sim & \Sigma\sim & \Sigma\sim \\ \Sigma\sim & \Sigma\sim & \Sigma\sim \\ \Sigma\sim & \Sigma\sim & n \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^6$$

$$A^t v = \begin{pmatrix} x_1^3 & \cdots & x_n^3 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma\sim \\ \Sigma\sim \\ \Sigma\sim \end{pmatrix}$$

Con producto de matrices calculan las entradas.

$\{(x_i, y_i) / i = 1..n\}$ que aproximan un círculo.

Ec: $x^2 + y^2 = ax + by + c$

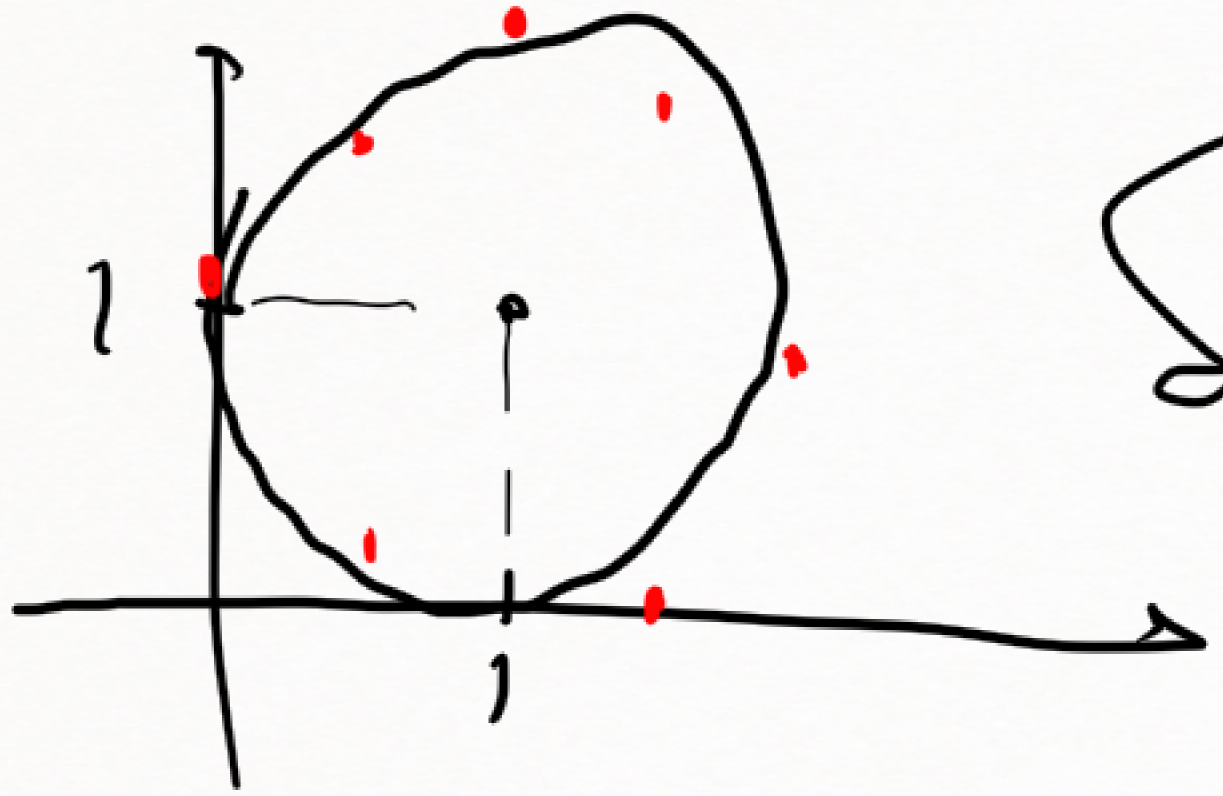
$(x_1, y_i) \to x_1^2 + y_1^2 = a x_1 + b y_1 + c$

$\vdots$

$(x_n, x_n) \to x_n^2 + y_n^2 = a x_n + b y_n + c$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 \\ \vdots \\ x_n^2 + y_n^2 \end{pmatrix}}_{V}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix}}_{X.\wedge 2} + \underbrace{\begin{pmatrix} y_1^2 \\ \vdots \\ y_n^2 \end{pmatrix}}_{Y.\wedge 2}$$



$x^2 + y^2 - ax - by - c = 0$

$x \to A \quad y \to B$